Exercice 1. EPITA 2025 – Pile je gagne, Face tu perds.

1. $\Big((\mathrm{X}=n)\Big)_{n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$ est un système complet d'événements.

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)+\mathbb{P}(\mathrm{X}=+\infty)=1$.

2. Soit X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier pile, avec $(\mathrm{X}=+\infty)$: Pile ne tombe jamais.
$\mathrm{X}\sim\mathcal{G}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$, et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)=\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^n}$.
Ainsi $\displaystyle\mathbb{P}(\mathrm{X}=+\infty)=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)=1-\frac{1/2}{1-1/2}=0$.
On en déduit que l'événement "la pièce donne au moins une fois pile" est de probabilité 1.

3. Soit $\mathrm{U}=\mathrm{Y}+1$. $(\mathrm{U}=n)=(\mathrm{Y}=n-1)$: la séquence apparaît pour la première fois lors du n-ième groupe de 3 lancers.
Or la probabilité d'obtenir PPF lors de trois lancers est $\dfrac{1}{8}$. Donc $\mathrm{U}\sim\mathcal{G}\Big(\dfrac{1}{8}\Big)$.
Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n)=\mathbb{P}(\mathrm{U}=n+1)=\Big(\dfrac{7}{8}\Big)^n\dfrac{1}{8}$. Puis $\displaystyle\mathbb{P}(\mathrm{Y}=+\infty)=1-\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{7}{8}\Big)^n\frac{1}{8}=1-\frac{1}{8}\times\frac{1}{1-7/8}=0$.
Donc la probabilité que la séquence PPF apparaisse au moins une fois vaut 1.

4. Soit $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 4$. Les événements $(\mathrm{Z}\leq k-2)$, $(\mathrm{Z}=k-1)$, $(\mathrm{Z}=k)$, $(\mathrm{Z}\geq k+1)$ forment un SCE.
Donc, par la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)=\underbrace{\mathbb{P}_{(\mathrm{Z}\leq k-2)}(\mathrm{A}_k)}_{=\frac{1}{4}}\mathbb{P}(\mathrm{Z}\leq k-2)+\underbrace{\mathbb{P}_{(\mathrm{Z}=k-1)}(\mathrm{A}_k)}_{=\frac{1}{2}}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k-1)+\underbrace{\mathbb{P}_{(\mathrm{Z}=k)}(\mathrm{A}_k)}_{=1}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)+\underbrace{\mathbb{P}_{(\mathrm{Z}\geq k+1)}(\mathrm{A}_k)}_{=0}\mathbb{P}(\mathrm{Z}\geq k+1).$$

$\mathbb{P}_{(\mathrm{Z}=k-1)}(\mathrm{A}_k)=\dfrac{1}{2}$ car P_{k-1} est réalisé. $\mathbb{P}_{(\mathrm{Z}=k)}(\mathrm{A}_k)=1$ car $\mathrm{P}_{k-1}\cap\mathrm{P}_k$ est réalisé.
Ainsi : $\forall\ k\geq 4$, $\mathbb{P}(\mathrm{A}_k)=\dfrac{1}{4}\mathbb{P}(\mathrm{Z}\leq k-2)+\dfrac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k-1)+\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)$.

5. Les lancers étant indépendants, $\mathbb{P}(\mathrm{A}_k)=\dfrac{1}{4}$. De plus $\mathbb{P}(\mathrm{Z}\geq k-1)+\mathbb{P}(\mathrm{Z}\leq k-2)=1$.
Comme la formule reste valable pour $k\geq 2$, on obtient :
$\dfrac{1}{4}\mathbb{P}(\mathrm{Z}\geq k-1)=\mathbb{P}(\mathrm{A}_k)-\dfrac{1}{4}\mathbb{P}(\mathrm{Z}\leq k-2)=\dfrac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k-1)+\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)$.

6. $\displaystyle\mathrm{E}(\mathrm{Z})=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{Z}\geq n)$. Par la question précédente, $\mathbb{P}(\mathrm{Z}\geq n)=2\mathbb{P}(\mathrm{Z}=n)+4\mathbb{P}(\mathrm{Z}=n+1)$.
Or $\sum\mathbb{P}(\mathrm{Z}=n)$ est convergente (de somme 1), Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(\mathrm{Z}\geq n)$ converge, et Z est d'espérance finie.

Puis $\displaystyle\mathrm{E}(\mathrm{Z})=2\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=n)}_{=1}+4\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=n)}_{=1}=6$ (car $\mathbb{P}(\mathrm{Z}=1)=0$).

7. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)&=\mathbb{P}(\mathrm{Z}\geq k)-\mathbb{P}(\mathrm{Z}\geq k+1)\\&\underset{\mathrm{Q5}}{=}2\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)+4\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k+1)-\Big(2\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k+1)+4\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k+2)\Big)\ .\\&=2\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)+2\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k+1)-4\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k+2)\end{aligned}$$

D'où : $\forall\ k\geq 2$, $\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k+2)=\dfrac{1}{4}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)+\dfrac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k+1)$.

$\displaystyle\mathrm{G}_\mathrm{Z}(t)=\sum_{k=2}^{+\infty}t^k\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)=t^2\mathbb{P}(\mathrm{Z}=2)+t^3\mathbb{P}(\mathrm{Z}=3)+\sum_{k=2}^{+\infty}t^{k+2}\Big(\frac{1}{4}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k+1)\Big)$, par ce qui vient d'être démontré.

Or $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}t^{k+2}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)=t^2\mathrm{G}_\mathrm{Z}(t)$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}t^{k+2}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k+1)=t\mathrm{G}_\mathrm{Z}(t)-t^3\mathbb{P}(\mathrm{Z}=2)$.

De plus $\mathbb{P}(\mathrm{Z}=2)=\dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{Z}=3)=\dfrac{1}{8}$. D'où $\Big(1-\dfrac{t^2}{4}-\dfrac{t}{2}\Big)\mathrm{G}_\mathrm{Z}(t)=\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t^3}{8}-\dfrac{t^3}{8}$.

On en conclut que : $\mathrm{G}_\mathrm{Z}(t)=\dfrac{t^2}{4-2t-t^2}$.

8. $\mathrm{G}_\mathrm{Z}'(t)=\dfrac{2t(4-2t-t^2)-t^2(-2-2t)}{(4-2t-t^2)^2}$ et $\mathrm{G}_\mathrm{Z}'(1)=\dfrac{2-(-4)}{1^2}=6$: on retrouve bien $\mathrm{E}(\mathrm{Z})=6$.

Exercice 2. Mines-Ponts 2018 MP - Partie A. Quelques exemples

1. a) On considère $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0, \pi]$. On a $S(\theta)^2 = I_2$ et il y en a une infinité.

$\boxed{\text{La matrice } A = I_2 \text{ admet une infinité de racines carrées}}$

b) En écrivant $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, $P(A) = P(I_2) = \sum_{k=0}^{d} a_k I_2 = P(1) I_2$.

c) Soit X une racine carrée de $A = I_2$ qui soit un polynôme en A
Ceci nous fournit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X = P(I_2)$
Alors $X = P(1)I_2$ et $I_2 = X^2 = P(1)^2 I_2$ donc $P(1) \in \{-1, 1\}$ donc $X \in \{I_2, -I_2\}$
La réciproque étant évidente :

$\boxed{\text{Les racines carrées de } I_2 \text{ qui sont des polynômes en A sont les matrices } I_2 \text{ ou } -I_2}$

2. a) Comme $A^2 = 0_3$, $X^4 = A^2 = 0_3$ donc X est nilpotente.

b) Prenons $J = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice nilpotente. Alors $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathrm{R}$, $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = A$. $\boxed{\text{A admet une infinité de racines carrées}}$

c) Pour $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, $P(A) = a_0 I_3 + a_1 A$ puisque : $\forall k \geqslant 2, A^k = 0$. Donc $P(A) \in \mathrm{Vect}(I_3, A)$.
Réciproquement si $M = \lambda I_3 + \mu A$, alors $M = P(A)$ avec $P = \mu X + \lambda$, donc $M \in \mathbb{C}[A]$.

$\boxed{\mathbb{C}[A] = \mathrm{Vect}(I_3, A).}$

d) On suppose l'existence de X polynôme en A qui soit une racine carré de A. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X = aI_3 + bA$.
De plus $A = X^2 = a^2 I_3 + 2abA$
Par coefficients diagonaux, on trouve $a = 0$ donc $A = X^2 = 0$ ce qui est absurde.

$\boxed{\text{Aucune racine carrée de A n'est un polynôme en A}}$

3) a) Existence : Comme A est symétrique réelle, le théorème spectral nous fournit $\Omega \in O(n)$ et $D = diag(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ (où les λ_i sont les valeurs propres de A comptées avec multiplicités) tel que $A = \Omega D \Omega^T$.
Comme A est définie positive, on peut écrire $D = \delta^2$ où $\delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$
de sorte que $\delta^2 = D$ et ainsi $\left(\Omega\delta\Omega^T\right)^2 = A$
De plus les valeurs propres de $\Omega\delta\Omega^T$ sont strictement positives car $\forall i \in [\![1\,;\; n]\!],\ \sqrt{\lambda_i} > 0$
et $\left(\Omega\delta\Omega^T\right)^T = \left(\Omega^T\right)^T \delta^T \Omega^T = \Omega\delta\Omega^T$
Ainsi $\Omega\delta\Omega^T$ est racine carrée de A symétrique réelle définie positive.

b) Unicité : Soit B une racine carrée de A symétrique réelle définie positive.
Je note respectivement a et b les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés aux matrices A et B.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$. On a $\lambda > 0$.
Comme $a \circ b = a^3 = b \circ a$, $E_\lambda(a)$ est stable par b.
Je note id_λ l'identité de $E_\lambda(a)$ et b_λ l'endomorphisme induit par b sur $E_\lambda(a)$
Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(b_\lambda)$. Soit x un vecteur propre de b_λ associé à μ
On a $a(x) = b^2(x)$ donc $\lambda x = b(\mu x) = \mu b(x) = \mu^2 x$
Comme $x \neq 0$, on a $\mu^2 = \lambda$ et ainsi $\mu = \sqrt{\lambda}$ car $\mu \in \mathrm{Sp}(b_\lambda) \subset \mathrm{Sp}(b) = \mathrm{Sp}(B) \subset]0, +\infty[$
La matrice B étant symétrique réelle, l'endomorphisme b est symétrique car la base canonique est orthonormée.
Ainsi l'endomorphisme induit b_λ est symétrique donc diagonalisable or $\mathrm{Sp}(b_\lambda) \subset \{\sqrt{\lambda}\}$

Par conséquent $b_\lambda = \sqrt{\lambda} id$. Ainsi

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(a),\ \forall x \in E_\lambda(a),\ b(x) = \sqrt{\lambda} x \qquad (1)$$

or $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(a)} E_\lambda(a)$ car A est diagonalisable
Ainsi l'application linéaire b et donc B sont entièrement déterminées par la relation (1)
Ce qui nous donne l'unicité.

Conclusion : $\boxed{\text{A admet une unique racine carrée symétrique réelle définie positive}}$