

Durée : 4 heures.

On s'efforcera d'argumenter rigoureusement ses raisonnements en évitant le style télégraphique et en rédigeant de vraies phrases (sujet, verbe et compléments éventuels!).

**On encadrera la réponse finale de chaque question.**

Si on est amené à admettre la réponse à une question, on l'indiquera clairement sur la copie.

\*\*\*\*\*

## EXERCICE 1, D'APRÈS AGRÉGATION 2026

### I. Premier exemple

Soit  $q$  la forme quadratique définie sur  $\mathbb{R}^3$  par

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz.$$

1. En exploitant des identités remarquables, montrer que  $q(x, y, z) \geq 0$  pour tout triplet de réels  $(x, y, z)$ . On pourra commencer par développer l'expression  $\left(x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)^2$ .
2. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | q(x, y, z) = 0\}$ .

Dans la suite de cette partie, on se propose de retrouver ces résultats par une autre méthode.

Soit

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Justifier que  $K$  est diagonalisable.
4. Calculer  $K^2$  et en déduire le spectre de  $K$ .
5. Pour  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  calculer  $X^T K X$  et retrouver la réponse à la première question.
6. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Justifier que  $D = P^{-1} K P$  est une matrice diagonale et expliciter  $D$ . On pourra observer qu'il n'est pas nécessaire de calculer  $P^{-1}$  pour cela.

7. Déterminer une matrice orthogonale  $Q$  telle que

$$Q^T K Q = D.$$

### II. Cas général

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note :

- $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ;
- $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1}^n$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .
- pour  $p$  entier naturel non nul,  $U_{n,p}$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients valent 1 ;
- $q_n$  la forme quadratique définie sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  par

$$q_n \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

- $K_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par

$$K_n = nI_n - U_{n,n} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

8. Justifier l'existence d'une matrice  $D_n$  diagonale à coefficients réels et d'une matrice  $Q_n$  orthogonale telles que  $K_n = Q_n D_n Q_n^T$ .
9. Montrer que  $\chi_{K_n} = X(X-n)^{n-1}$  et que l'on peut choisir pour  $D_n$  la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux  $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n}$  vérifient  $\delta_1 = 0$  et  $\delta_2 = \delta_3 = \dots = \delta_n = n$ .
10.  $K_n$  est-elle une matrice symétrique positive? Est-elle positive et définie?
11. Pour  $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , justifier que  $X^T K_n X = q_n(X)$ .
12. En déduire que la forme quadratique  $q_n$  est positive sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .
13. Déterminer une base de  $\text{Ker}(K_n)$ .
14. On note  $\text{SEP}(K_n, n)$  le sous-espace propre de  $K_n$  associé à la valeur propre  $n$ . Justifier que  $\text{SEP}(K_n, n) = (\text{Ker}(K_n))^\perp$  et en déduire une équation de  $\text{SEP}(K_n, n)$ .
15. Montrer que  $\mathcal{B}_n = (b_i)_{i=2}^n = (e_1 - e_i)_{i=2}^n$  est une base de ce sous-espace propre.
16. Pour  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ , calculer  $Y^T D_n Y$ . En déduire que  $q_n(X) = 0$  si, et seulement si,  $X \in \text{Ker}(K_n)$ .
17. Énoncer le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une famille finie. On donnera les formules explicites utilisées pour construire la famille orthonormée.
18. Donner **sans justification** la forme générale des vecteurs  $f_i$  de la famille  $\mathcal{F}_n = (f_i)_{i=2}^n$  obtenue par orthonormalisation de  $\mathcal{B}_n$ . (On pourra, au brouillon, calculer quelques vecteurs, conjecturer la formule et la vérifier.)
19. En déduire une matrice  $Q_n$  satisfaisant la relation de la question 8.

## EXERCICE 2, D'APRÈS CCINP 2019

### Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape  $n = 0$ , on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

① le mouvement du pion de l'étape  $n$  à l'étape  $n + 1$  ne dépend que de la position du pion à l'étape  $n$ ; plus précisément, il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.

② pour passer de l'étape  $n$  à l'étape  $n + 1$ , on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $A_n$  l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape  $n$ ",  $B_n$  l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape  $n$ " et  $C_n$  l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape  $n$ ". On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \mathbb{P}(A_n), \quad q_n = \mathbb{P}(B_n), \quad r_n = \mathbb{P}(C_n), \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans le démontrer** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec  $\mathbb{P}(F) > 0$ , on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée  $\mathbb{P}(E | F)$  ou  $\mathbb{P}_F(E)$ ) par :

$$\mathbb{P}(E | F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}.$$

### Partie I - Calcul des probabilités

20. Calculer les nombres  $p_n$ ,  $q_n$  et  $r_n$  pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .
21. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a la relation  $V_{n+1} = MV_n$ .
22. En déduire que  $V_n = M^n V_0$ , puis une expression de  $p_n$ ,  $q_n$  et  $r_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
23. Déterminer les limites respectives des suites  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Interpréter le résultat.

### Partie II - Nombre moyen de passages en A

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $a_n$  le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape  $n$  et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}.$$

24. Interpréter la variable aléatoire  $X_1 + \dots + X_n$  et le nombre  $\mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n]$ .
25. Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $X_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
26. En déduire une expression de  $a_n$ .

### Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire  $T_B$  de la façon suivante :

- ① si le pion ne passe jamais en B, on pose  $T_B = 0$ ;
  - ② sinon,  $T_B$  est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.
- Nous allons déterminer la loi de  $T_B$  et son espérance.

27. Calculer  $\mathbb{P}(T_B = 1)$  et  $\mathbb{P}(T_B = 2)$ .
28. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer  $\overline{B_n}$  en fonction de  $A_n$  et  $C_n$ .
29. Établir que  $\mathbb{P}(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{4} \mathbb{P}(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$ , puis en déduire que  $\mathbb{P}(B_3 | \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{4}$ .

Dans la suite, on admet la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(B_{n+1} \mid \bigcap_{k=1}^n \overline{B_k}\right) = \frac{1}{4}.$$

30. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $\mathbb{P}(T_B = k)$ . Que vaut  $\mathbb{P}(T_B = 0)$  ?
31. Justifier que la variable aléatoire  $T_B$  admet une espérance. Quelle est l'espérance de  $T_B$  ?

### EXERCICE 3, D'APRÈS CCINP 2020

#### Calcul de l'intégrale de Dirichlet

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction  $f : [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[, \quad f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction  $u : [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[, \quad u(x, t) = -\frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité  $|\sin(t)| \leq |t|$  valable pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

#### Partie I - Préliminaires

**32.** Soit  $x > 0$ . Montrer que la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

**33.** En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale  $I$  est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

est convergente. En déduire que l'intégrale  $I$  converge.

**34.** Soit  $x \geq 0$ . Montrer que  $t \mapsto u(x, t)$  est une primitive de la fonction  $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$  sur  $]0, +\infty[$ .

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction  $F : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt.$$

#### Partie II - Calcul de $F$ sur $]0, +\infty[$

**35.** Montrer que  $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$  pour tout  $x > 0$ . En déduire la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

**36.** Soit  $a > 0$ . Montrer que la fonction  $F$  est dérivable sur  $[a, +\infty[$  et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt.$$

**37.** En déduire que la fonction  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et déterminer une expression de  $F'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ . Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

#### Partie III - Conclusion

On considère les fonctions  $F_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $F_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définies par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x, t) dt \text{ et } F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x, t) dt.$$

**38.** Montrer que la fonction  $F_1$  est continue sur  $[0, 1]$ .

**39.** Soit  $x \in [0, 1]$ . Montrer que la fonction  $t \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  et que :

$$F_2(x) = \frac{x \sin(1) + \cos(1)}{1 + x^2} e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt.$$

**40.** Montrer que la fonction  $F_2$  est continue sur  $[0, 1]$ .

**41.** En déduire que la fonction  $F$  est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale  $I$ .