

DEVOIR SURVEILLÉ NO 6  
Premier Germinal 234

Concours Commun Mines-Ponts

Maths II PC (3 heures)

2023

Chaînes de Markov en temps continu

Dans tout le sujet on fixe un entier naturel  $N \geq 2$ .

- Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ . Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$ , on note  $A[i, j]$  le coefficient à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$  de  $A$ . Par abus, si  $A$  est une matrice colonne ( $q = 1$ ), on note  $A[i]$  pour  $A[i, 1]$ . De même, si  $A$  est une matrice ligne ( $p = 1$ ), on note  $A[i]$  pour  $A[1, i]$ .
- On identifie  $\mathbf{R}^N$  avec  $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$ , on note  $E_k \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$  la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf le  $k^e$  qui vaut 1. On rappelle que  $(E_1, \dots, E_N)$  est une base de  $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ .
- On note  $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$  le vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a donc, pour tout  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ,  $U[i] = 1$ .
- On appelle *noyau de Markov* une matrice  $K \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$  telle que  
(M<sub>1</sub>)  $\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ ,  $K[i, j] \geq 0$ ,  
(M<sub>2</sub>)  $\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^N K[i, j] = 1$ .
- On appelle *probabilité* un vecteur ligne  $\mu \in \mathcal{M}_{1,N}(\mathbf{R})$  tel que  
(P<sub>1</sub>)  $\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ,  $\mu[i] \geq 0$ ,  
(P<sub>2</sub>)  $\sum_{j=1}^N \mu[j] = 1$ .
- On notera  $I_N$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ .

## Préliminaires

1 ▷ Soit  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ . Montrer que  $A$  vérifie (M<sub>2</sub>) si et seulement si  $AU = U$ .

En déduire que si  $A$  et  $B$  sont deux noyaux de Markov, alors  $AB$  est encore un noyau de Markov.

On considère un noyau de Markov  $K$ .

2 ▷ Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $K^n$  est un noyau de Markov.

3 ▷ Soit  $t \in \mathbf{R}$  et  $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ . Justifier que la série  $\sum \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$  converge.

On notera  $H_t$  la matrice de  $\mathcal{M}_N(\mathbf{R})$  définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, H_t[i, j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}.$$

4 ▷ Montrer que pour tout réel  $t \in \mathbf{R}_+$ ,  $H_t$  est un noyau de Markov.

5 ▷ Montrer que pour tout  $(t, s) \in \mathbf{R}_+^2$ ,  $H_{t+s} = H_t H_s$ .

On pourra faire apparaître un produit de Cauchy.

## Partie 1 — Modélisation probabiliste

On cherche à modéliser un système ayant  $N$  états numérotés de 1 à  $N$ . À l'instant initial, le système est dans l'état 1. Le système est soumis à des impulsions.

On suppose que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ , à chaque impulsion, si le système est dans l'état  $i$ , il se retrouve dans l'état  $j$  avec une probabilité  $p_{i,j}$  qui ne dépend que de l'état où il était avant l'impulsion.

Ce système est modélisé par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Pour tout entier  $k \in \mathbf{N}$ , on note  $Z_k$  la variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 1; N \rrbracket$  qui correspond à l'état du système après  $k$  impulsions. Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$  et tout entier naturel  $k$  tels que  $P(Z_k = i) \neq 0$ , on a donc  $P(Z_{k+1} = j \mid Z_k = i) = p_{i,j}$ . En particulier, cette probabilité ne dépend pas de  $k$ . De plus, la variable  $Z_0$  est la variable certaine de valeur 1.

On considère la matrice  $K$  de  $\mathcal{M}_N(\mathbf{R})$  définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, K[i, j] = p_{i,j}.$$

**6** ▷ Justifier que  $K$  est un noyau de Markov.

**7** ▷ Soit  $n \in \mathbf{N}$  et  $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$ . Montrer que  $P(Z_n = j) = K^n[1, j]$ .

*On pourra raisonner par récurrence.*

**8** ▷ Soit  $t \in \mathbf{R}_+$ . On suppose que le nombre d'impulsions après un temps  $t$  est donné par une variable aléatoire  $Y_t$  suivant la loi de Poisson de paramètre  $t$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$ , on note  $A_{t,j}$  l'événement « le système est dans l'état  $j$  après un temps  $t$  ». Justifier que  $P(A_{t,j}) = H_t[1, j]$ .

## Partie 2 — Étude d'un endomorphisme autoadjoint

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $N$ . On note  $(\cdot \mid \cdot)$  le produit scalaire et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée. Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . On note  $q_u : E \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction définie par

$$\forall x \in E, q_u(x) = (u(x) \mid x),$$

et on suppose que pour tout  $x \in E$ ,  $q_u(x) \geq 0$ .

**9** ▷ Énoncer le théorème spectral pour l'endomorphisme  $u$ .

Que peut-on dire des valeurs propres de  $u$ ?

On suppose que 0 est valeur propre simple de  $u$  et on note  $\lambda_2$  la plus petite valeur propre non nulle de  $u$ . On note aussi  $p : E \rightarrow E$  la projection orthogonale sur la droite vectorielle  $\text{Ker}(u)$ .

**10** ▷ Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $q_u(x - p(x)) \geq \lambda_2 \|x - p(x)\|^2$ .

### Partie 3 — Convergence de $H_t[i, j]$

On considère un noyau de Markov  $K$ . On suppose que 1 est une valeur propre simple de  $K$ .

On suppose qu'il existe une probabilité  $\pi \in \mathcal{M}_{1, N}(\mathbf{R})$  telle que

- (a)  $\forall j \in \llbracket 1; N \rrbracket, \pi[j] \neq 0$ .
- (b)  $\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, \pi[i]K[i, j] = K[j, i]\pi[j]$ . On dit que  $K$  est  $\pi$ -réversible.

Un rapide calcul montre alors que pour tout réel positif  $t$ ,  $H_t$  est aussi un noyau de Markov  $\pi$ -réversible, c'est-à-dire

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2, \quad \pi[i]H_t[i, j] = H_t[j, i]\pi[j].$$

On ne demande donc pas de démontrer ce résultat.

Pour finir, si  $X$  et  $Y$  sont dans  $\mathcal{M}_{N, 1}(\mathbf{R})$ , on pose

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^N X[i]Y[i]\pi[i].$$

Dans cette dernière partie, on cherche à déterminer, si  $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ , la limite de  $H_t[i, j]$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$  et à majorer la vitesse de convergence.

- 11 ▷ Montrer que  $\pi K = \pi$ .
- 12 ▷ Montrer que  $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{N, 1}(\mathbf{R})$ .

Dans la suite on note  $E$  l'espace euclidien  $\mathcal{M}_{N, 1}(\mathbf{R})$  muni de ce produit scalaire.

- 13 ▷ On considère l'endomorphisme  $u$  de  $E$  défini par  $u(X) = (I_N - K)X$ . Montrer que  $u$  est un endomorphisme autoadjoint de  $E$  et que  $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(U)$ .
- 14 ▷ Montrer que pour tout  $X \in E$ ,

$$q_u(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X[i] - X[j])^2 K[i, j] \pi[i].$$

Que dire des valeurs propres de  $u$  ?

Soit  $X \in E$ . On note  $\psi_X$  la fonction définie sur  $E$  à valeurs dans  $E$  par  $\psi_X(t) = H_t X$ . On note aussi  $\varphi_X$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  par  $\varphi_X(t) = \|H_t X\|^2$ .

- 15 ▷ Justifier que  $\psi_X$  est dérivable et que pour tout  $t$  dans  $\mathbf{R}$ ,

$$\psi'_X(t) = -(I_N - K)H_t X.$$

- 16 ▷ En déduire que  $\varphi_X$  est dérivable et exprimer  $\varphi'_X$  à l'aide de  $q_u$ .

On note  $p : E \rightarrow E$  la projection orthogonale sur  $\text{Ker}(u)$ .

- 17 ▷ Soit  $t \in \mathbf{R}_+$ . Montrer que  $p(H_t X) = p(X)$ .
- 18 ▷ On pose  $Y = X - p(X)$ . On note  $\lambda$  la plus petite valeur propre non nulle de  $u$ .
  - Montrer que pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,  $\varphi'_Y(t) \leq -2\lambda\varphi_Y(t)$ .
  - En déduire que pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,  $\|H_t X - p(X)\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|X - p(X)\|^2$ .
- 19 ▷ Soit  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$  et  $t \in \mathbf{R}_+$ . Montrer que  $\|H_t E_i - \pi[i]U\| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\pi[i]}$ .

**20** ▷ Montrer que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$  et tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,

$$\mathbf{H}_t[i, j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^N \left( \mathbf{H}_{\frac{t}{2}}[i, k] - \pi[k] \right) \left( \mathbf{H}_{\frac{t}{2}}[k, j] - \pi[j] \right).$$

*On pourra utiliser la question 5.*

**21** ▷ En déduire que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$  et tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,

$$\left| \mathbf{H}_t[i, j] - \pi[j] \right| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}.$$

Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{H}_t[i, j]$ .

FIN DU PROBLÈME