Exercice 1, d'après Agrégation 2026

1. $q(x,y,z) = \left(x - \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}(y-z)^2 \geqslant 0.$

2. $q(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2} = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff x = y = z$ et $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.

3. K est symétrique réelle donc diagonalisable.

4. $\mathrm{K}^2 = 3\mathrm{K}$ donc $\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-3)$ est un polynôme annulateur de K. Donc $\mathrm{Sp(K)} \subset \{0,3\}$. Comme $\mathrm{rg(K)} = 2$, $0 \in \mathrm{Sp(K)}$ et $\dim(\mathrm{SEP}(\mathrm{K},0)) = 1$. Étant diagonalisable, K possède au moins une autre valeur propre. Donc $\mathrm{Sp(K)} = \{0,3\}$.

5. $\mathrm{X^TKX} = 2q(x,y,z)$ or K est symétrique positive car à valeurs propres toutes positives donc q est positive.

6. Il suffit d'observer que les colonnes C_1, C_2 et C_3 forment une base de vecteurs propres de K. En effet $\mathrm{KC}_1 = 0$, $\mathrm{KC}_2 = 3\mathrm{C}_2$ et $\mathrm{KC}_3 = 3\mathrm{C}_3$ avec $(\mathrm{C}_2,\mathrm{C}_3)$ libre, donc $\mathrm{SEP}(\mathrm{K},0) = \mathrm{Vect}(\mathrm{C}_1)$ et $\mathrm{SEP}(\mathrm{K},3) = \mathrm{Vect}(\mathrm{C}_2,\mathrm{C}_3)$. P est une matrice de passage vers une base formée de vecteurs propres. Alors $\mathrm{D} = \mathit{diag}(0,3,3)$.

7. $(\Gamma_1) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $(\Gamma_2,\Gamma_3) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$ sont des bases orthonormales de $\mathrm{SEP}(\mathrm{K},0)$ et $\mathrm{SEP}(\mathrm{K},3)$ (la seconde obtenue par le procédé de Gram-Schmidt). Donc $\mathrm{Q} = (\Gamma_1|\Gamma_2|\Gamma_3)$ convient.

8. K est symétrique réelle donc d'après le théorème spectral il existe une matrice D_n diagonale à coefficients réels et une matrice Q_n orthogonale telles que $\mathrm{K}_n = \mathrm{Q}_n\mathrm{D}_n\mathrm{Q}_n^{\mathrm{T}}$.

9. Trois stratégies pour calculer ce polyôme caractéristique...

• On peut s'inspirer de la première partie et calculer K_n^2 :
$\mathrm{K}_n^2 = n^2\mathrm{I}_n - 2n\mathrm{U}_{n,n} + \mathrm{U}_{n,n}^2$ or $\mathrm{U}_{n,n}^2 = n\mathrm{U}_{n,n}$ donc $\mathrm{K}_n^2 = n\mathrm{K}_n$.
Alors $\mathrm{X}(\mathrm{X}-n)$ est annulateur de K_n, donc il existe $k \in [\![0\,;\ n]\!]$ tel que $\chi_{\mathrm{K}_n} = \mathrm{X}^{n-k}(\mathrm{X}-n)^k$.
Comme K_n est diagonalisable, $k = \mu(n) = \dim(\mathrm{SEP}(\mathrm{K}_n,n)) = n - \mathrm{rg}(\mathrm{K}_n - n\mathrm{I}_n) = n-1$, et $\chi_{\mathrm{K}_n} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-n)^{n-1}$.

• Sinon on calcule $\chi_{\mathrm{K}_n} = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{K}_n)$. On sommant toutes les colonnes sur la première, on peut factoriser par X. Puis en ajoutant la première ligne à toutes les autres, on a une matrice triangulaire de déterminant $(\mathrm{X}-n)^{n-1}$...

• Et puis **si on n'aime pas les calculs**, on observe que $\mathrm{rg}(\mathrm{K}_n - n\mathrm{I}_n) = 1$, donc n est valeur propre de multiplicité $n-1$. Comme $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{K}_n) = n(n-1) = n\mu(n)$, la dernière valeur propre est nécessairement 0 et $\chi_{\mathrm{K}_n} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-n)^{n-1}$.

• **Enfin** K_n étant diagonalisable, les multiplicités sont les dimensions des sous-espaces propres donc K_n est bien semblable à une matrice diagonale comportant un 0 sur sa diagonale puis $n-1$ fois le coefficient n.

10. K_n est une matrice symétrique positive car $\mathrm{Sp}(\mathrm{K}_n) \subset \mathbb{R}^+$, mais non définie car $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{K}_n)$.

11. Pour $\mathrm{X} = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^{\mathrm{T}}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{X^TK}_n\mathrm{X} = q_n(\mathrm{X})$.

12. Donc la forme quadratique q_n est positive sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

13. Comme $\mathrm{K}_n\mathrm{U}_{n,1} = 0_{n,1}$ et comme 0 est de multiplicité 1, $\mathrm{Ker}(\mathrm{K}_n) = \mathrm{SEP}(\mathrm{K}_n,0) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U}_{n,1})$.

14. D'après le théorème spectral, les sous-espaces propres de K_n sont supplémentaires et orthogonaux. Comme K_n n'a que deux sous-espaces propres $\mathrm{SEP}(\mathrm{K}_n,n) = \left(\mathrm{SEP}(\mathrm{K}_n,0)\right)^{\perp}$. Donc

$$\left(\mathrm{X} \in \mathrm{SEP}(\mathrm{K}_n,n) \iff \mathrm{X} \perp \mathrm{U}_{n,1}\right),$$

ce qui équivaut à l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ lorsque $\mathrm{X} = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^{\mathrm{T}}$.

15. Card $(\mathcal{B}_n) = n-1 = \dim(\mathrm{SEP}(\mathrm{K}_n, n))$ et les vecteurs b_i vérifient l'équation précédente donc sont dans ce sous-espace.
De plus $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \lambda_i b_i = \left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i\right) e_1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i e_i$ donc $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \lambda_i b_i = 0$ entraîne $\lambda_i = 0$ pour tout i puisque (e_i) est une famille libre. Ainsi $\mathcal{B}_n$ est libre, donc est une base de $\mathrm{SEP}(\mathrm{K}_n, n)$.

16. • $\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}_n\mathrm{Y} = 0 \times y_0 + n\displaystyle\sum_{i=2}^{n} y_i^2 = n\sum_{i=2}^{n} y_i^2$.

• $q_n(\mathrm{X}) = 0 \Rightarrow \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{K}_n\mathrm{X} = 0 \Rightarrow \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}\mathrm{D}_n\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = 0 \Rightarrow \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}_n\mathrm{Y} = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![2\,;\, n]\!], y_i = 0$. Or par la formule de changement base $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}$ sont les coordonnées de X dans la base de vecteurs propres, donc $\mathrm{X} = y_1 \dfrac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{U}_{n,1} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{K}_n)$.

• Réciproquement, si $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{K}_n)$ alors $q_n(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{K}_n\mathrm{X} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}0_{n,1} = 0$.

17. Voir le cours.

18. Donner **sans justification** la forme générale des vecteurs f_i de la famille $\mathcal{F}_n = \left(\mathrm{F}_i\right)_{i=2}^{n}$ obtenue par orthonormalisation de $\mathcal{B}_n$. (On pourra, au brouillon, calculer quelques vecteurs, conjecturer la formule et la vérifier.) On obtient : • $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 \ \ -1 \ 0 \ \ldots \ 0)^{\mathrm{T}}$;

• $f_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 \ 1 \ \ -2 \ 0 \ \ldots \ 0)^{\mathrm{T}}$;

• et plus généralement $f_i = \dfrac{1}{\sqrt{(i-1)i}}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} e_k - (i-1)e_i\right)^{\mathrm{T}}$.

19. Avec $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{U}_{n,1} \in \mathrm{SEP}(\mathrm{K}_n, 0)$, la matrice Q_n donc les colonnes sont les $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ convient, car c'est une matrice de passage vers une base orthonormales (donc Q_n est orthogonale) formées de vecteurs propres de K_n (donc $\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{K}_n\mathrm{Q}_n = \mathrm{D}_n$).

EXERCICE 2, D'APRÈS CCINP 2019
Étude d'une marche aléatoire

20. A l'instant 0, le pion est en A donc $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.
A l'instant 1, la probabilité qu'il reste en A est $\dfrac{1}{2}$ donc $p_1 = \dfrac{1}{2}$. Sinon, il se déplace de manière équiprobable sur l'un des deux autres points donc $q_1 = r_1 = \dfrac{1}{4}$.

21. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, on a bien $\mathrm{V}_1 = \mathrm{M}\mathrm{V}_0$.
On suppose maintenant $n \in \mathbb{N}^*$.
$\{\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) + \mathrm{P}(\mathrm{C}_n)\mathrm{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$$

$\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$ est la probabilité de rester en A de l'instant n à l'instant $n+1$ donc $\dfrac{1}{2}$.
$\mathrm{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$ est la probabilité de passer de B à A donc $\dfrac{1}{4}$. De même, $\mathrm{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.
Par conséquent, $\mathrm{P}(\mathrm{A}_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) + \dfrac{1}{4}\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) + \dfrac{1}{4}\mathrm{P}(\mathrm{C}_n)$.
On raisonne de même pour exprimer b_{n+1} et c_{n+1} et on conclut que $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{M}\mathrm{V}_n$.

22. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: "$\mathrm{V}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{V}_0$".
$\mathrm{M}^0 = \mathrm{I}_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
D'après la question précédente, $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{MV}_n$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{V}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{V}_0$ donc $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{MM}^n\mathrm{V}_0 = \mathrm{M}^{n+1}\mathrm{V}_0$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par récurrence, on peut alors conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{V}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{V}_0$.
$\mathrm{V}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc, en utilisant le résultat admis sur M^n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{4^n+2}{3 \cdot 4^n},\ q_n = r_n = \frac{4^n-1}{3 \cdot 4^n}$$

23. Quand n tend vers l'infini, $4^n + 2 \sim 4^n$ et $4^n - 1 \sim 4^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \dfrac{1}{3}$.
Cela signifie que, si on observe la position du pion après un grand nombre d'étapes, il y a autant de chances qu'il soit en A, en B ou en C.

24. $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ est le nombre de passages par le point A lors des n premières étapes et $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n)$ est le nombre moyen de passages par A lors des n premières étapes.

25. X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = \dfrac{4^n+2}{3 \cdot 4^n}$ donc $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \dfrac{4^n+2}{3 \cdot 4^n}$.

26. $a_n = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n)$ donc, par linéarité de l'espérance, $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{E}(\mathrm{X}_i)$ et, d'après la question précédente,

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^i \right) = \frac{n}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}}$$

Par conséquent,

$$a_n = \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

27. Comme le pion est en A à l'instant 0, $(\mathrm{T_B} = 1) = \mathrm{B}_1$ d'où $\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = 1) = \dfrac{1}{4}$.

$$(\mathrm{T_B} = 2) = \overline{\mathrm{B}_1} \cap \mathrm{B}_2 = (\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_2) \cup (\mathrm{C}_1 \cap \mathrm{B}_2)$$

Ces deux événements sont incompatibles donc $\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{C}_1 \cap \mathrm{B}_2)$.
Par définition d'une probabilité conditionnelle, $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$.
De même $\mathrm{P}(\mathrm{C}_1 \cap \mathrm{B}_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$.
Finalement, $\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = 2) = \dfrac{3}{16}$.

28. A l'instant n, le pion est en A, en B ou en C donc $\overline{\mathrm{B}_n} = \mathrm{A}_n \cup \mathrm{C}_n$.

29. $\overline{\mathrm{B}_1} \cap \overline{\mathrm{B}_2} = (\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{C}_1) \cap (\mathrm{A}_2 \cup \mathrm{C}_2) = (\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2) \cup (\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{C}_2) \cup (\mathrm{C}_1 \cap \mathrm{A}_2) \cup (\mathrm{C}_1 \cap \mathrm{C}_2)$.
En prenant l'intersection avec B_3 on obtient 4 événements deux à deux incompatibles donc
$\mathrm{P}(\mathrm{B}_3 \cap \overline{\mathrm{B}_1} \cap \overline{\mathrm{B}_2}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_3 \cap \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_3 \cap \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{C}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_3 \cap \mathrm{C}_1 \cap \mathrm{A}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_3 \cap \mathrm{C}_1 \cap \mathrm{C}_2)$.
$\mathrm{P}(\mathrm{B}_3 \cap \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_3) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_3)$ car la position à l'instant 3 ne dépend

que la position à l'instant 2. Ainsi $\mathrm{P}(\mathrm{B}_3 \cap \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2) = \dfrac{1}{4}\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)$.
On procède de même avec les 3 autres termes puis on se retrouve avec la somme de 4 probabilités d'événements incompatibles. On utilise la relation du début de cette question pour conclure :

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_3 \cap \overline{\mathrm{B}_1} \cap \overline{\mathrm{B}_2}) = \frac{1}{4}\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}_1} \cap \overline{\mathrm{B}_2})$$

Avec la définition d'une probabilité conditionnelle, $\mathrm{P}(\mathrm{B}_3 | \overline{\mathrm{B}_1} \cap \overline{\mathrm{B}_2}) = \dfrac{1}{4}$

30. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$(\mathrm{T_B} = k) = \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{\mathrm{B}_i}\right) \cap \mathrm{B}_k$. Avec la définition d'une probabilité conditionnelle et le résultat admis, $\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = k) = \dfrac{1}{4}\mathrm{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{\mathrm{B}_i}\right)$.
$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{\mathrm{B}_i} = (\mathrm{T_B} \geq k) = (\mathrm{T_B} = k) \cup (\mathrm{T_B} \geq k+1)$ donc $\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = k) = \dfrac{1}{4}(\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = k) + \mathrm{P}(\mathrm{T_B} \geq k+1) = \dfrac{1}{4}(\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = k) + 4\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = k+1))$ d'où $\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = k+1) = \dfrac{3}{4}\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = k)$. De plus $\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = 1) = \dfrac{1}{4}$ donc, pour $k \geq 1$, $\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = k) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}$.

$\{\mathrm{T_B} = k;\ k \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements donc $\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = 0) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{T_B} = k) = 1 - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1 - \dfrac{3}{4}}$.
Par conséquent, $\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = 0) = 0$.

31. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\mathrm{T_B} = k) = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$ donc $\mathrm{T_B}$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{4}$. On en déduit que $\mathrm{T_B}$ admet une espérance et $\mathrm{E}(\mathrm{T_B}) = 4$.

Exercice 3, d'après CCINP 2020
Calcul de l'intégrale de Dirichlet

32. Soit $x > 0$.
$t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles.
Pour tout $t > 0$, $|\sin(t)| \leq |t|$, donc $|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leq e^{-xt}$.
Or $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $x > 0$), donc, par comparaison, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

33. • Posons $u'(t) = \sin(t)$, $u(t) = 1 - \cos(t)$, $v(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$u(t)v(t) = \frac{1-\cos(t)}{t} = \frac{1-(1-t^2/2+o(t^2)}{t} = \frac{t^2/2+o(t^2}{t} = \frac{t}{2} + o(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$.

$$u(t)v(t) = \frac{\overbrace{1-\cos(t)}^{\text{borné}}}{t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$$

D'où, par intégration par parties, $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ sont de même nature, donc I converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge.
• $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1-(1-t^2/2+o(t^2)}{t^2} = \frac{t^2/2+o(t^2}{t^2} = \frac{1}{2} + o(1) \underset{t\to 0}{\to} 1/2$, donc $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est prolongeable par

continuité en 0, donc intégrable sur $]0,1]$.
$\frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{\mathrm{O}(1)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
$t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, en particulier, $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge, donc, d'après le premire point de cette question, I converge.

34. Soit $x \geq 0$.
$t \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t>0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -\frac{x\cos(t)-\sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} - \frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}\times(-x)e^{-xt}\\ &= \frac{-x\cos(t)+\sin(t)+x^2\sin(t)+x\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt} = \frac{(1+x^2)\sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} = \sin(t)e^{-xt},\end{aligned}$$

donc $t\mapsto u(x,t)$ est bien une primitive de la fonction $t\mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

35. • Soit $x>0$.
Pour tout $t>0$, $|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leq e^{-xt}$.
D'où, par l'inégalité triangulaire généralisée et par positivité de l'intégrale convergente (avec "$0\leq+\infty$"), on a :

$$|\mathrm{F}(x)| = \left|\int_0^{+\infty} f(x,t)dt\right| \leq \int_0^{+\infty}|f(x,t)|dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}.$$

• Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)=0.$$

36. Soit $a>0$.

— Pour tout $x\in[a,+\infty[$, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question **32.** avec $x\geq a>0$).
— Pour tout $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ (constante fois une exponentielle) et, pour tout $x\geq a$, $t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-xt}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
— Pour tout $x\geq a$, pour tout $t>0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leq e^{-xt} \leq e^{-at} = \varphi(t)$, où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $a>0$).

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $\mathrm{F} : x\mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et, pour tout $x\geq a$,

$$\mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}dt.$$

37. F est dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc F est dérivable sur $\bigcup_{a>0}[a,+\infty[=]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}'(x) &= -\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}dt = -\left[u(x,t)\right]_0^{+\infty} = -\left(0+\frac{1}{1+x^2}\right)\\ &= -\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

F est une primitive de F′ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe $\mathrm{K}\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x>0$,

$$\mathrm{F}(x) = -\arctan(x)+\mathrm{K}.$$

Enfin, $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)=0$, donc $-\frac{\pi}{2}+\mathrm{K}=0$, donc $\mathrm{K}=\frac{\pi}{2}$, et, par suite, pour tout $x>0$,

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\pi}{2}-\arctan(x).$$

38. — Pour tout $t \in]0,1]$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.
— Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$.
— Pour tout $t \in]0,1]$, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leq e^{-xt} \leq 1 = \varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $]0,1]$ (constante sur un intervalle borné).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $\mathrm{F}_1 : x \mapsto \int_0^1 f(x,t)dt$ est continue sur $[0,1]$.

39. Soit $x \in [0,1]$.

• Pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{u(x,t)}{t^2} = \frac{1}{t^2} \times \left(-\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}\right) = \frac{1}{t^2} \times \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}(1) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $t \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, en particulier, $\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt$ converge.

• Posons $w'(t) = \sin(t)e^{-xt}$, $w(t) = u(x,t)$, $v(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$.
w et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$.
$w(t)v(t) = \frac{u(x,t)}{t} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$
$\int_1^{+\infty} w(t)v'(t)dt = -\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt$ converge d'après le premier point.
D'où, par intégration par parties, $\int_1^{+\infty} f(x,t)dt = \int_1^{+\infty} w'(t)v(t)dt$ converge (mais on le savait déjà) et

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_2(x) = \int_1^{+\infty} u'(t)v(t)dt &= \left[\frac{u(x,t)}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt \\ &= \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt.\end{aligned}$$

40. •
— Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[1,+\infty[$.
— Pour tout $t \geq 1$, $x \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}$ est continue sur $[0,1]$.
— Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \geq 1$,

$$\left|\frac{u(x,t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}\frac{x|\sin(t)|+|\cos(t)|}{1+x^2}e^{-xt} \leq \frac{1}{t^2}\frac{1+1}{1} \times 1 = \frac{2}{t^2} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt$ est continue sur $[0,1]$.

• De plus, $x \mapsto \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x}$ est continue sur $[0,1]$ (par opérations sur les fonctions usuelles), donc F_2 est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

41. • D'où, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ existe (on le savait déjà, cf **32.** et **33.**) et

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^1 f(x,t)dt + \int_1^{+\infty} f(x,t)dt = \mathrm{F}_1(x) + \mathrm{F}_2(x),$$

donc $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$, donc F est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

• On a donc, par continuité de F en 0,

$$\mathrm{I} = \mathrm{F}(0) = \lim_{x\to0^+} \mathrm{F}(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$