

DEVOIR SURVEILLÉ NO 6
Premier Germinal 234

**Concours Commun
Mines-Ponts**
Maths II PC (3 heures) – 2023

Éléments de réponses

1 ▷ L'égalité $AU = U$ a lieu si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, $(AU)[i] = U[i]$ ce qui est équivalent à dire $\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, $\sum_{j=1}^N A[i, j] \times U[j] = U[i]$ ou encore à $\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, $\sum_{j=1}^N A[i, j] = 1$.

Soit A et B deux noyaux de Markov. Par associativité de la multiplication matricielle, $(AB)U = A(BU) = AU = U$ car B et A vérifient (M_2) . Ainsi, AB vérifie (M_2) d'après ce qui précède. Reste à montrer que AB vérifie (M_1) , ce qui est facile puisque pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$, $(AB)[i, j] = \sum_{k=1}^N A[i, k]B[k, j] \geq 0$ en tant que somme de réels tous positifs ou nuls (car A et B vérifient (M_1)).

2 ▷ Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on note \mathcal{P}_n l'assertion « K^n est un noyau de Markov ». L'assertion \mathcal{P}_0 est vraie car I_N a tous ses coefficients positifs, donc I_N vérifie (M_1) , et $I_N U = U$, donc I_N vérifie (M_2) d'après la question 1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si \mathcal{P}_n est vraie, alors $K^{n+1} = K^n \times K$ est un noyau de Markov d'après la question 1. Ainsi, par le principe de récurrence, K^n est un noyau de Markov pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3 ▷ D'après la question 2, K^n est un noyau de Markov pour tout entier $n \in \mathbf{N}$. On en déduit que les coefficients de K^n sont tous dans $[0, 1]$. En effet, les coefficients de chacune de ses lignes sont positifs ou nuls et leur somme fait 1. Il en résulte que pour tout $t \in \mathbf{R}$, tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$,

$$\left| \frac{t^n K^n[i, j]}{n!} \right| \leq \frac{|t|^n}{n!}.$$

Or la série $\sum \frac{|t|^n}{n!}$ est convergente (sa somme vaut $e^{|t|}$), donc la série $\sum \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$ est absolument convergente par comparaison des séries à termes positifs : elle converge donc.

4 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$ et soit $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$. Le coefficient $H_t[i, j]$ est positif car $e^{-t} > 0$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$ est la somme d'une série à termes positifs. Ainsi, H_t vérifie (M_1) . Ensuite, en sommant N séries convergentes,

$$\sum_{k=1}^N H_t[i, k] = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=1}^N K^n[i, k] = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \times 1 = e^{-t} e^t = 1.$$

Ainsi, H_t vérifie aussi (M_2) et par suite H_t est un noyau de Markov.

5 ▷ Soit t et s dans \mathbf{R}_+ . Soit aussi $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$. Par définition,

$$(H_t H_s)[i, j] = \sum_{k=1}^N H_t[i, k] \times H_s[k, j] = e^{-(t+s)} \sum_{k=1}^N \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n K^n[i, k]}{n!} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m K^m[k, j]}{m!} \right].$$

Or on a établi en question 3 que les séries $\sum \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$ et $\sum \frac{s^n K^n[k, j]}{n!}$ étaient absolument convergentes, donc le théorème des produits de Cauchy s'applique et permet d'écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n K^n[i, k]}{n!} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m K^m[k, j]}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

où, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$c_n = \sum_{\ell=0}^n \frac{t^\ell K^\ell[i, k]}{\ell!} \times \frac{s^{n-\ell} K^{n-\ell}[k, j]}{(n-\ell)!} = \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} (tK)^\ell[i, k] \times (sK)^{n-\ell}[k, j].$$

Ainsi,

$$(H_t H_s)[i, j] = e^{-(t+s)} \sum_{k=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} (tK)^\ell[i, k] \times (sK)^{n-\ell}[k, j],$$

et en sommant N séries convergentes,

$$\begin{aligned} (H_t H_s)[i, j] &= e^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \sum_{k=1}^N (tK)^\ell[i, k] \times (sK)^{n-\ell}[k, j] \\ &= e^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \left((tK)^\ell \times (sK)^{n-\ell} \right) [i, j] \\ &= e^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tK + sK)^n [i, j], \end{aligned}$$

le dernière égalité provenant de la formule du binôme, licite car tK et sK commutent.

En conclusion, $(H_t H_s)[i, j] = e^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t+s)^n K^n [i, j] = H_{t+s}[i, j]$. Comme (i, j) est quelconque, $H_s H_t = H_{s+t}$.

6 ▷ Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$, $K[i, j] = p_{i,j} = P(Z_1 = j \mid Z_0 = i) \geq 0$ car une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, et $\sum_{k=1}^N K[i, k] = \sum_{k=1}^N P(Z_1 = k \mid Z_0 = i)$. Or la famille $(Z_1 = k)_{1 \leq k \leq N}$ est un système complet d'événements, et $P(\cdot \mid Z_0 = i)$ est une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) , donc $\sum_{k=1}^N P(Z_1 = k \mid Z_0 = i) = P\left(\bigcup_{k=1}^N (Z_1 = k) \mid Z_0 = i\right) = P(\Omega \mid Z_0 = i) = 1$. En somme, K vérifie (M_1) et (M_2) , c'est donc un noyau de Markov.

7 ▷ Soit $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons \mathcal{P}_n l'assertion « $P(Z_n = j) = K^n[1, j]$ ». Si $n = 0$, $P(Z_0 = j) = \delta_{1,j}$ (symbole de Kronecker) car Z_0 est la variable certaine de valeur 1. Or $K^0[1, j] = I_N[1, j] = \delta_{1,j}$, donc l'assertion \mathcal{P}_0 est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons \mathcal{P}_n . La formule des probabilités totales relative au système d'événements $(Z_n = k)_{1 \leq k \leq N}$ donne

$$P(Z_{n+1} = j) = \sum_{k=1}^N P(Z_{n+1} = j \mid Z_n = k) P(Z_n = k) = \sum_{k=1}^N p_{k,j} K^n[1, k]$$

la dernière égalité provenant de la définition de $p_{i,j}$ et de l'hypothèse de récurrence. On reconnaît alors un produit matriciel : $P(Z_{n+1} = j) = (K^n \times K)[1, j] = K^{n+1}[1, j]$ si bien que \mathcal{P}_{n+1} est vraie. Par le principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier n .

8 ▷ Par définition, $P(Y_t = n) = e^{-t} \frac{t^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

L'événement $A_{t,j}$ n'est autre que $(Z_{Y_t} = j) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (Z_n = j, Y_t = n)$ (réunion disjointe). Or la modélisation impose que la probabilité que le système soit dans un état j ne dépend que de l'état dans lequel il était précédemment, et non du nombre d'impulsions reçues. On peut ainsi dire que les événements $(Z_n = j)$ et $(Y_t = n)$ sont indépendants et écrire, grâce à la σ -additivité,

$$P(A_{t,j}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Z_n = j) \cdot P(Y_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n[1, j] \cdot e^{-t} \frac{t^n}{n!},$$

ceci d'après la question 7. Ainsi, $P(A_{t,j}) = H_t[1, j]$, par définition de H_t .

9 ▷ Le théorème spectral stipule, puisque u est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E , que u est orthodiagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Comme on suppose de plus que $\forall x \in E, (u(x) | x) \geq 0$, l'endomorphisme u est alors autoadjoint positif, et ses valeurs propres sont toutes positives ou nulles.

10 ▷ Notons $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ les valeurs propres de u et considérons (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale (= BON) de E constituée de vecteurs propres de u de sorte que $u(e_k) = \lambda_k e_k$ pour tout $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Si $x \in E$, on peut l'écrire $x = \sum_{k=1}^N (x | e_k) e_k$ et $p(x) = (x | e_1) e_1$ puisque p est la projection orthogonale sur $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(e_1)$. Ainsi, $u(x) = 0_E + \sum_{k=2}^N (x | e_k) \lambda_k e_k$ et

$$\begin{aligned} q_u(x - p(x)) &= (u(x - p(x)) | x - p(x)) = (u(x) | x - p(x)) \\ &= \left(\sum_{k=2}^N (x | e_k) \lambda_k e_k \mid \sum_{\ell=2}^N (x | e_\ell) e_\ell \right) \\ &= \sum_{k=2}^N \sum_{\ell=2}^N (x | e_k) \lambda_k (x | e_\ell) \underbrace{(e_k | e_\ell)}_{=\delta_{k,\ell} \text{ car BON}} = \sum_{k=2}^N (x | e_k)^2 \lambda_k \end{aligned}$$

Or $\lambda_2 \leq \lambda_k$ pour tout $k \in \llbracket 2; N \rrbracket$ et $(x | e_k)^2 \geq 0$, donc

$$\sum_{k=2}^N (x | e_k)^2 \lambda_k \geq \lambda_2 \sum_{k=2}^N (x | e_k)^2 = \lambda_2 \|x - p(x)\|^2.$$

Finalement, on a bien montré que $q_u(x - p(x)) \geq \lambda_2 \|x - p(x)\|^2$.

11 ▷ L'hypothèse (b) faite sur π permet d'écrire, pour tout $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$, $\sum_{i=1}^N \pi[i] \cdot K[i, j] = \sum_{i=1}^N K[j, i] \cdot \pi[j]$, c'est-à-dire $(\pi K)[j] = 1 \times \pi[j]$ puisque K vérifie (M_2) . On en déduit que $\pi K = \pi$.

12 ▷ Soit X, X', Y dans $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. Il vient

$$\langle X + \alpha X', Y \rangle = \sum_{i=1}^N (X + \alpha X')[i] \cdot Y[i] \cdot \pi[i] = \sum_{i=1}^N X[i] \cdot Y[i] \cdot \pi[i] + \alpha \sum_{i=1}^N X'[i] \cdot Y[i] \cdot \pi[i] = \langle X, Y \rangle + \alpha \langle X', Y \rangle$$

et, de façon évidente, $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$, si bien que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$. Ensuite,

$\langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^N X[i]^2 \cdot \pi[i] \geq 0$ en tant que somme de réels positifs (rappelons que π vérifie (P_1)). Enfin,

si $\langle X, X \rangle = 0$ c'est que $X[i]^2 \cdot \pi[i] = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, et puisque π vérifie l'hypothèse (a), on en tire que $X[i] = 0$ pour tout i , c'est-à-dire $X = 0$. Finalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire définie positive, autrement dit un produit scalaire.

13 ▷ L'application u est bien un endomorphisme : celui canoniquement associé à la matrice $I_N - K$. Soit ensuite X et Y dans $E = \mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$. Il vient

$$\langle u(X), Y \rangle = \langle (I_N - K)X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle KX, Y \rangle.$$

D'autre part, $\langle KX, Y \rangle = \sum_{i=1}^N (KX)[i] \cdot Y[i] \cdot \pi[i] = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N K[i, j] \cdot X[j] \right) Y[i] \cdot \pi[i]$ et en permutant les deux sommes finies :

$$\langle KX, Y \rangle = \sum_{j=1}^N X[j] \left(\sum_{i=1}^N \pi[i] \cdot K[i, j] \cdot Y[i] \right) = \sum_{j=1}^N X[j] \left(\sum_{i=1}^N K[j, i] \cdot \pi[j] \cdot Y[i] \right)$$

la dernière égalité provenant du fait que K est π -réversible. Ainsi,

$$\langle KX, Y \rangle = \sum_{j=1}^N X[j] \cdot \pi[j] \left(\sum_{i=1}^N K[j, i] \cdot Y[i] \right) = \sum_{j=1}^N X[j] \cdot \pi[j] \cdot (KY)[j] = \langle X, KY \rangle.$$

Finalement, $\langle u(X), Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle KX, Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle X, KY \rangle = \langle X, u(Y) \rangle$ et u est bien autoadjoint.

Puisque K est un noyau de Markov, $KU = U$ (question 1), donc $U \in \text{Ker}(I_N - K)$. Mais l'énoncé suppose que 1 est valeur propre simple de K , c'est-à-dire $\dim \text{Ker}(I_N - K) = 1$, si bien que $\text{Ker}(I_N - K) = \text{Vect}(U)$ car $U \neq 0$.

14 \triangleright Soit $X \in E$. Par définition, $q_u(X) = \langle u(X), X \rangle = \langle (I_N - K)X, X \rangle = \langle X, X \rangle - \langle KX, X \rangle$, donc

$$q_u(X) = \sum_{i=1}^N X[i]^2 \pi[i] - \sum_{i=1}^N (KX)[i] \cdot X[i] \cdot \pi[i] = \sum_{i=1}^N X[i]^2 \pi[i] - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K[i, j] \cdot X[j] \cdot X[i] \cdot \pi[i].$$

Or $\pi = \pi K$ (question 11), donc pour tout i , $\pi[i] = (\pi K)[i] = \sum_{j=1}^N \pi[j] \cdot K[j, i] = \sum_{j=1}^N K[i, j] \cdot \pi[j]$ parce que K est π -réversible. Ainsi, en remplaçant dans la 1^{re} somme,

$$q_u(X) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X[i]^2 \cdot K[i, j] \cdot \pi[i] - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X[i]X[j] \cdot K[i, j] \cdot \pi[i]$$

Mais on remarque que $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X[i]^2 \cdot K[i, j] \cdot \pi[i] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X[i]^2 \cdot K[j, i] \cdot \pi[j]$ car K est π -réversible, si

bien que cette quantité vaut encore $\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N X[j]^2 \cdot K[i, j] \cdot \pi[i]$ après renommage des indices i et j . Les deux sommes pouvant s'intervertir, nous avons finalement

$$\begin{aligned} q_u(X) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X[i]^2 \cdot K[i, j] \cdot \pi[i] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X[j]^2 \cdot K[i, j] \cdot \pi[i] - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X[i]X[j] \cdot K[i, j] \cdot \pi[i] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(X[i]^2 + X[j]^2 - 2X[i]X[j] \right) K[i, j] \cdot \pi[i] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(X[i] - X[j] \right)^2 K[i, j] \cdot \pi[i] \end{aligned}$$

Cette expression montre que $q_u(X) \geq 0$ pour tout $X \in E$, et donc que u est autoadjoint positif. On en déduit que les valeurs propres de u sont toutes positives ou nulles.

15 \triangleright Puisque ψ_X est une fonction de \mathbf{R} dans $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$, étudier sa dérivabilité c'est étudier la dérivabilité de ses fonctions composantes.

$$\text{Pout tout } (t, i) \in \mathbf{R} \times \llbracket 1; N \rrbracket, (\psi_X(t))[i] = (H_t X)[i] = \sum_{j=1}^N H_t[i, j] X[j] = e^{-t} \sum_{j=1}^N X[j] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}.$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto (\psi_X(t))[i]$ est le produit de $t \mapsto e^{-t}$, dérivable, et une combinaison linéaire $\sum_{j=1}^N X[j] S_j$ où $S_j = t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$. On est donc amené à considérer, pour tout $j \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et tout $n \in \mathbf{N}$, les fonctions

$$f_{n,j} : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^n}{n!} K^n[i, j] \end{array}$$

qui sont toutes dérivables sur \mathbf{R} puisque polynomiales. De plus, $f'_0 = 0$ et si $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}$, $f'_{n,j}(t) = \frac{nt^{n-1}}{n!} K^n[i, j] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} K^n[i, j]$. On avait expliqué à la question 3 que $\left| \frac{t^n K^n[i, j]}{n!} \right| \leq \frac{|t|^n}{n!}$ pour tout entier n , donc si $[a, b]$ est un segment quelconque de \mathbf{R} ,

$$\|f'_{n,j}\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{c^{n-1}}{(n-1)!}$$

avec $c = \max(|a|, |b|)$. Puisque la série numérique $\sum \frac{c^{n-1}}{(n-1)!}$ converge, on a établi la convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions $\sum (f'_{n,j})_{n \in \mathbf{N}}$ sur tout segment $[a, b]$ de \mathbf{R} . La convergence simple de $\sum (f_{n,j})_{n \in \mathbf{N}}$ a été établie à la question 3. Le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions s'applique et permet de dire que S_j est dérivable et que

$$\forall t \in \mathbf{R}, S'_j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} K^n[i, j] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} K^{n+1}[i, j]$$

En conclusion, $t \mapsto (\psi_X(t))[i]$ est dérivable sur \mathbf{R} et sa dérivée est donnée, pour tout $t \in \mathbf{R}$, par

$$\begin{aligned} \psi'_X(t)[i] &= -e^{-t} \sum_{j=1}^N X[j] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!} + e^{-t} \sum_{j=1}^N X[j] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n K^{n+1}[i, j]}{n!} \\ &= e^{-t} \sum_{j=1}^N X[j] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(K^n(K - I_N) \right) [i, j] \\ &= e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=1}^N \left(K^n(K - I_N) \right) [i, j] X[j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(K^n(K - I_N) X \right) [i] \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout i , on peut écrire (parce que K^n et $K - I_N$ commutent, et par continuité du produit matriciel),

$$\psi'_X(t) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(K^n(K - I_N) X \right) = (K - I_N) e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} K^n X = -(I_N - K) H_t X.$$

16 \triangleright Comme $\varphi_X(t) = \langle \psi_X(t), \psi_X(t) \rangle$ et comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire sur un espace de dimension finie, φ_X est dérivable et

$$\forall t \in \mathbf{R}, \varphi'_X(t) = \langle \psi'_X(t), \psi_X(t) \rangle + \langle \psi_X(t), \psi'_X(t) \rangle = 2 \langle \psi'_X(t), \psi_X(t) \rangle.$$

D'après la question précédente on peut donc dire, pour tout $t \in \mathbf{R}$, que

$$\varphi'_X(t) = 2 \langle -(I_N - K) H_t X, H_t X \rangle = -2q_u(H_t X).$$

17 \triangleright On nous demande de montrer que $H_t X - X \in \text{Ker}(p)$. Or $\text{Ker}(p) = \text{Im}(p)^\perp$ car p est une projection orthogonale, et $\text{Im}(p) = \text{Ker}(u)$ car p est la projection sur $\text{Ker}(u)$. Or la question 13 montre que $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(U)$, il s'agit donc de montrer que $H_t X - X$ est orthogonal à U c'est-à-dire de montrer que $A := \sum_{i=1}^N ((H_t X)[i] - X[i]) \cdot 1 \cdot \pi[i]$ est nul. Cette quantité vaut, après interversion de deux sommes,

$$A = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H_t[i, j] X[j] \cdot \pi[i] - \sum_{i=1}^N X[i] \cdot \pi[i] = \sum_{j=1}^N X[j] \sum_{i=1}^N \pi[i] H_t[i, j] - \sum_{i=1}^N X[i] \cdot \pi[i].$$

Or $\sum_{i=1}^N \pi[i] H_t[i, j] = (\pi H)[j] = \pi[j]$ car H_t est un noyau de Markov (question 11), donc $A = 0$. En conclusion, $H_t X - X \in \text{Ker}(p)$ c'est-à-dire $p(H_t X) = p(X)$.

18 \triangleright Soit $t \in \mathbf{R}_+$. D'après la question 16, $\varphi'_Y(t) = -2q_u(H_t Y)$ donc

$$\varphi'_Y(t) = -2q_u(H_t(X - p(X))) = -2q_u(H_t X - H_t p(X)).$$

Mais $p(X) \in \text{Im}(p)$ et $\text{Im}(p) = \text{Ker}(u) \stackrel{\text{Q.13}}{=} \text{Vect}(U)$, et $H_t U = U$ car H_t est un noyau de Markov (question 1). Il existe donc $m \in \mathbf{R}$ tel que $p(X) = mU$ si bien que $H_t p(X) = mH_t U = mU = p(X)$. Il vient donc

$$\varphi'_Y(t) = -2q_u(H_t X - p(X)) \stackrel{\text{Q.17}}{=} -2q_u(H_t X - p(H_t X)) \stackrel{\text{Q.10}}{\leq} -2\lambda \|H_t X - p(H_t X)\|^2 \stackrel{\text{Q.17}}{=} -2\lambda \|H_t X - p(X)\|^2$$

Or on vient d'expliquer que $H_t p(X) = p(X)$, donc $\|H_t X - p(X)\|^2 = \|H_t X - H_t p(X)\|^2 = \|H_t Y\|^2 = \varphi_Y(t)$. Finalement, on a bien prouvé que $\varphi'_Y(t) \leq -2\varphi_Y(t)$.

Pour résoudre cette inéquation différentielle, on procède comme pour l'équation différentielle correspondante : on pose $\Phi(t) = \varphi_Y(t)e^{2\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, ce qui définit une fonction dérivable Φ et on calcule

$$\Phi'(t) = \varphi'_Y(t)e^{2\lambda t} + 2\lambda\varphi_Y(t)e^{2\lambda t} = (\varphi'_Y(t) + 2\lambda\varphi_Y(t))e^{2\lambda t}.$$

Ce qu'on vient d'établir montre alors que $\Phi' \leq 0$ sur l'intervalle \mathbf{R}_+ , donc Φ y est décroissante. En particulier, $\Phi(t) \leq \Phi(0)$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, c'est-à-dire $\varphi_Y(t) \leq \varphi_Y(0)e^{-2\lambda t}$. Puisque $H_0 = I_N$, il vient $\varphi_Y(0) = \|H_0 Y\|^2 = \|Y\|^2 = \|X - p(X)\|^2$ et on a bien montré que $\varphi_Y(t) \leq e^{-2\lambda t}\|X - p(X)\|^2$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$.

19 \triangleright La question précédente appliquée à $X = E_i$ donne $\|H_t - p(E_i)\|^2 \leq e^{-2\lambda t}\|E_i - p(E_i)\|^2$ soit encore $\|H_t - p(E_i)\| \leq e^{-\lambda t}\|E_i - p(E_i)\|$ par croissance de $\sqrt{\cdot}$. Or l'expression de la projection orthogonale sur U est donnée par $p(X) = \langle X, \frac{U}{\|U\|} \rangle \frac{U}{\|U\|}$ avec $\|U\|^2 = \sum_{i=1}^N U[i]^2 \pi[i] = \sum_{i=1}^N \pi[i] = 1$, donc $p(E_i) = \langle E_i, U \rangle U = \sum_{j=1}^n \delta_{i,j} \times 1\pi[j]U = \pi[i]U$. De plus, le théorème de Pythagore appliqué aux vecteurs orthogonaux $E_i - p(E_i)$ et $p(E_i)$ donne $\|E_i\|^2 = \|E_i - p(E_i)\|^2 + \|p(E_i)\|^2 \geq \|E_i - p(E_i)\|^2$ ce qui fournit $\|E_i - p(E_i)\| \leq \|E_i\|$. Puisque enfin $\|E_i\|^2 = \langle E_i, E_i \rangle = \pi[i]$, on en conclut que $\|E_i\| = \sqrt{\pi[i]}$ et donc que $\|H_t E_i - \pi[i]U\| \leq e^{-t}\sqrt{\pi[i]}$.

20 \triangleright Soit $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ et $t \in \mathbf{R}_+$. La question 5 nous apprend que $H_t = H_{\frac{t}{2}} H_{\frac{t}{2}}$, donc

$$\begin{aligned} H_t[i, j] &= \sum_{k=1}^N H_{\frac{t}{2}}[i, k] H_{\frac{t}{2}}[k, j] = \sum_{k=1}^N \left((H_{\frac{t}{2}}[i, k] - \pi[k]) + \pi[k] \right) \left((H_{\frac{t}{2}}[k, j] - \pi[j]) + \pi[j] \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left(H_{\frac{t}{2}}[i, k] - \pi[k] \right) \left(H_{\frac{t}{2}}[k, j] - \pi[j] \right) + S_1 + S_2 + S_3, \end{aligned}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \sum_{k=1}^N \left(H_{\frac{t}{2}}[i, k] - \pi[k] \right) \pi[j] = \pi[j] \left(\sum_{k=1}^N H_{\frac{t}{2}}[i, k] - \sum_{k=1}^N \pi[k] \right) = \pi[j](1 - 1) = 0, \\ S_2 = \sum_{k=1}^N \pi[k] \left(H_{\frac{t}{2}}[k, j] - \pi[j] \right) = (\pi H_{\frac{t}{2}})[j] - \pi[j] \sum_{k=1}^N \pi[k] \stackrel{Q.11}{=} \pi[j] - \pi[j] \times 1 = 0, \\ S_3 = \sum_{k=1}^N \pi[k] \pi[j] = \pi[j] \times 1 = \pi[j]. \end{array} \right.$$

Finalement, $H_t[i, j] = \sum_{k=1}^N \left(H_{\frac{t}{2}}[i, k] - \pi[k] \right) \left(H_{\frac{t}{2}}[k, j] - \pi[j] \right) + \pi[j]$, ce qui était demandé.

21 \triangleright Soit $(i, j) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2$ et $t \in \mathbf{R}_+$. Notons premièrement que si $X \in E$ et si $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, alors $\|X\|^2 = \sum_{k=1}^N X[k]^2 \pi[k] \geq X[i]^2 \pi[i]$, si bien que $|X[i]| \leq \frac{\|X\|}{\sqrt{\pi[i]}}$. Si l'on applique cela à $X = H_t E_j - \pi[j]U$, alors $X[i] = H_t[i, j] - \pi[j]$ et par suite

$$|H_t[i, j] - \pi[j]| \leq \frac{\|H_t E_j - \pi[j]U\|}{\sqrt{\pi[i]}} \stackrel{Q.19}{\leq} \frac{e^{-\lambda t} \sqrt{\pi[j]}}{\sqrt{\pi[i]}} = e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}.$$

La valeur propre λ est la plus petite valeur propre non nulle de u , endomorphisme n'ayant que des valeurs propres positives ou nulles : ainsi, $\lambda > 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} = 0$. Le théorème des gendarmes assure que $H_t[i, j] - \pi[j]$ possède une limite quand $t \rightarrow +\infty$ et que cette limite est nulle, si bien que $\lim_{t \rightarrow +\infty} H_t[i, j] = \pi[j]$.