

**Exercice 1** Recherche d'extremums

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + (y^4/4)$ .

- Déterminer les extremums locaux de  $f$ .
- Montrer que les minimums locaux de  $f$  sont globaux.

**Solution (Ex.1 – Recherche d'extremums)**

- $f$  est polynomiale donc de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

$\nabla f(x, y) = (2x, y^3 - 2y)$  donc  $f$  admet trois points critiques :  $C_0 = (0, 0)$ ,  $C_1 = (0, \sqrt{2})$  et  $C_2 = (0, -\sqrt{2})$ .

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$H_f(C_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  donc  $H_f(C_0)$  possède une valeur propre strictement positive et une autre strictement négative :  $C_0$  est un point selle où  $f$  n'atteint aucun extremum.

$H_f(C_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  donc  $H_f(C_1) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$  et  $f$  atteint un minimum local strict en  $C_1$ , valant  $f(C_1) = -1$ .

$H_f(C_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  donc  $H_f(C_2) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$  et  $f$  atteint un minimum local strict en  $C_2$ , valant  $f(C_2) = -1$ .

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$f(x, y) - (-1) = x^2 - y^2 + y^4/4 + 1 = x^2 + \frac{1}{4}(y^2 - 2)^2 \geq 0$  donc le minimum global de  $f$  est  $-1$  et est atteint uniquement en  $C_1 = (0, \sqrt{2})$  et  $C_2 = -C_1$ .

**Exercice 2** Extremums dans  $\mathbb{R}^3$

Déterminer les extremums sur  $\mathbb{R}^3$  des fonctions définies par

- $f : (x, y, z) \mapsto y^4 + x^2 + 2z^2 - 2xz + 4x - 6z$  ;
- $g : (x, y, z) \mapsto 4x^2 - 4xyz + y^2z^2 - 8x - 4y$ .

**Solution (Ex.2 – Extremums dans  $\mathbb{R}^3$ )**

1.  $f$  est polynomiale donc de classe  $\mathcal{C}^2$ .

$$\nabla f(x, y, z) = (2x - 2z + 4, 4y^3, -6 + 4z - 2x).$$

Unique point critique :  $c = (-1, 0, 1)$ .

$$H_f(c) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} : 0 \text{ est valeur propre, } \chi_{H_f(c)} = X \chi \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ (X)}$$

En notant  $\lambda$  et  $\mu$  les deux autres valeurs propres,  $\lambda\mu = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12$  donc

ces deux valeurs propres sont de même signe : on ne peut pas conclure.

$f(x, y, z) - f(c) = f(x, y, z) + 5 = (x - z + 2)^2 + (z - 1)^2 + y^4 \geq 0$  donc  $f$  atteint un minimum global valant  $-5$  en  $c$ .

2.  $g$  est polynomiale donc de classe  $\mathcal{C}^2$ .

$$\nabla g(x, y, z) = (8x - 4yz - 8, -4xz + 2z^2y + 4, -4yx + 2y^2z).$$

$g$  a un unique point critique  $c = (1, 0, -1)$  (on pourra partir de  $\partial_3 g(x, y, z)$  et distinguer selon que  $y = 0$  ou  $y \neq 0$ ).

$$H_g(c) = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \det(H_g(c)) = -128 < 0 \text{ donc } 0 \text{ n'est pas valeur}$$

propre et comme  $\text{Tr}(H_g(c)) = 10 > 0$ ,  $H_g(c)$  a nécessairement deux valeurs propres strictement positive et une strictement négative, donc  $c$  est un point col de  $g$ . Ainsi  $g$  n'a aucun extremum local sur  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 3** Recherche d'extremums sur un fermé borné

Soit  $f$  définie par  $f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$

sur le domaine  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$ .

Justifier que  $f$  est bornée et déterminer ses extremums sur  $\mathcal{D}$ .

**Solution (Ex.3 – Recherche d'extremums sur un fermé borné)**

•  $\mathcal{D}$  est fermé car défini par les inégalités larges  $x^2 - y \leq 1$  et  $y + x^2 \leq 1$  où les membres de gauche sont continues.

$\mathcal{D}$  est borné car clairement  $-1 \leq y \leq 1$ , et par conséquent  $x^2 \leq 1 - y \leq 2$  donc  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ . Ainsi  $(x, y) \in \mathcal{D} \Rightarrow \|(x, y)\|_\infty \leq \sqrt{2}$ .

$f$  est polynomiale donc continue sur le fermé borné  $\mathcal{D}$  donc est bornée et atteint ses bornes.

$f$  est polynomiale donc de classe  $\mathcal{C}^2$ .

• Cherchons les points critiques à l'intérieur de  $\mathcal{D}$ .

$\nabla f(x, y) = (-2xy + 2x, 2y - x^2)$ , qui s'annule en  $(0, 0)$  et  $(\pm\sqrt{2}, 1)$  mais ces deux derniers points ne sont pas dans  $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$  qui est défini à l'aide d'inégalités strictes.

• Cherchons sur la frontière  $\partial\mathcal{D}$  de  $\mathcal{D}$ .

La frontière est formée des deux portions de parabole  $\mathcal{P}_+ = \{(x, 1 - x^2) \mid -1 \leq x \leq 1\}$  et  $\mathcal{P}_- = \{(x, x^2 - 1) \mid -1 \leq x \leq 1\}$

Pour  $(x, y) \in \mathcal{P}_+$ ,  $f(x, y) = (1 - x^2)^2 - x^2(1 - x^2) + x^2 = 2x^4 - 2x^2 + 1$ . L'étude de  $g : x \mapsto 2x^4 - 2x^2 + 1$  sur  $[0; 1]$  ( $g$  étant paire) avec  $g' : x \mapsto 4x(2x^2 - 1)$  montre que le maximum de  $f$  sur  $\mathcal{P}_+$  vaut 1 et le minimum  $1/2$ .

Pour  $(x, y) \in \mathcal{P}_-$ ,  $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 - x^2(x^2 - 1) + x^2 = 1$  donc  $f$  est constante égale à 1.

• Bilan : comme  $f(0, 0) = 0 < 1/2$ , le minimum de  $f$  sur  $\mathcal{D}$  est 0 et son maximum vaut 1.

**Exercice 4** *Minimum suivant les droites et maximum suivant une parabole*

Soit  $f$  définie par  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$ .

1. Déterminer l'unique point critique de  $f$ .
2. a) Montrer que, pour  $(x, y)$  parcourant la droite d'équation  $y = ax$ ,  $f(x, y)$  atteint un minimum en  $(0, 0)$ .  
 b) Qu'en est-il lorsque  $(x, y)$  parcourt la parabole d'équation  $y = 2x^2$ ?
3. a) Que peut-on en conclure ?  
 b) Représenter les régions du plan où  $f$  prend des valeurs positives (resp. négatives).

**Solution** (Ex.4 – *Minimum suivant les droites et maximum suivant une parabole*)

1.  $f$  polynomiale donc  $\mathcal{C}^1$ .

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff (12x^3 - 8xy, -4x^2 + 2y) = (0, 0)$$

$$\iff (x(3x^2 - 2y), y - 4x^2) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0)$$

Donc l'unique point critique de  $f$  est  $(0, 0)$ .

2. a)  $f(x, ax) = x^2(3x^2 - 4ax + a^2)$  est positif au voisinage de 0. En effet :
- si  $a = 0$ ,  $f(x, ax) = 3x^4$  ;
  - si  $a \neq 0$ , le trinôme  $3x^2 - 4ax + a^2$  vaut  $a^2 > 0$  en  $x = 0$ , donc est strictement positive au voisinage de 0. Ainsi lorsque  $(x, y)$  parcourt la droite  $\Delta_a$ ,  $f(x, y)$  atteint un minimum local valant 0 en  $(0, 0)$ .
- b)  $f(x, 2x^2) = -x^4$  atteint un maximum valant 0 en  $(0, 0)$ .
3. a)  $f$  n'atteint pas d'extremum local en  $(0, 0)$ .
- b) On vérifie que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2) \dots$   
 On trace les paraboles d'équation  $\mathcal{P}_3 : y = 3x^2$  et  $\mathcal{P}_1 : y = x^2$ , lieux des points où  $f$  est nulle, puis on partitionne le plan suivant le signe de  $f$  dans chacune des zones délimitées.

**Exercice 5** *Variance minimale, variance maximale*

Soit  $X$  une variable aléatoire telle que  $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ .

On pose  $p_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{P}(X = k)$  et on cherche pour quelles valeurs de  $p_1, p_2$  et  $p_3$   $\mathbb{V}(X)$  est maximale, ou est minimale.

1. Montrer que ce problème se ramène à la recherche des extremums de  $f : (p_1, p_2) \mapsto 4p_1 + p_2 - 4p_1^2 - p_2^2 - 4p_1p_2$  sur le domaine fermé et borné  $D = \{(p_1, p_2) \in [0; 1]^2, p_1 + p_2 \leq 1\}$ .
2. Résoudre le problème, et commenter les résultats.

**Solution** (Ex.5 - *Variance minimale, variance maximale*)

1. En substituant  $p_3 = 1 - p_1 - p_2$  dans  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = p_1 + 4p_2 + 9p_3 - (p_1 + 2p_2 + 3p_3)^2$ , on obtient  $\mathbb{V}(X) = 4p_1 + p_2 - 4p_1^2 - p_2^2 - 4p_1p_2 = f(p_1, p_2)$ .  
 La condition  $0 \leq p_i \leq 1$  et  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$  conduit au domaine  $D$ .
2.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  car polynomiale sur l'intérieur de  $D$ .  
 $\nabla f(p_1, p_2) = (0, 0)$  conduit à un système linéaire sans solution.  $f$  n'a pas de point critique donc pas d'extremum à l'intérieur de  $D$ .  
 $g : x \mapsto x(1 - x)$  atteint son maximum sur  $[0; 1]$  qui vaut  $1/4$  en  $x = 1/2$ , or  $f(p_1, 0) = 4g(p_1)$ ,  $f(0, p_2) = g(p_2)$  et  $f(1 - p_2, p_2) = g(p_2)$  donc le maximum de  $f$  sur le bord de  $D$  est  $4 \times \frac{1}{4} = 1$  obtenu pour  $p_1 = 1/2$  et  $p_2 = 0$ .

$\mathbb{V}(X)$  est maximum pour  $p_1 = p_3 = 1/2$  et  $p_2 = 0$ , c'est-à-dire  $X \sim \mathcal{U}\{1; 3\}$  :  $X$  prend équiprobablement les valeurs extrêmes, maximisant la variance.

$\mathbb{V}(X)$  est minimum pour  $(p_1, p_2, p_3) = (1, 0, 0)$ ,  $(p_1, p_2, p_3) = (0, 1, 0)$  ou  $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 1)$  c'est-à-dire lorsque  $X$  est constante, ce qui annule la variance.