

**Exercice 1** Une fonction lipschitzienne

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Soit  $a \in E$ . Soit  $f : E \rightarrow E$  définie par :

$$f(x) = \|x\| a.$$

Montrer que  $f$  est lipschitzienne.  $f$  est-elle continue ?

**Solution (Ex.1 – Une fonction lipschitzienne)**

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \| \|x\| a - \|y\| a \| = \| (\|x\| - \|y\|) a \| = | \|x\| - \|y\| | \times \|a\|$$

Or pour toute norme  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ , donc

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| \leq \|a\| \|x - y\| \text{ et } f \text{ est } \|a\| \text{ -lipschitzienne.}$$

Question de cours : toute fonction lipschitzienne est continue...

**Exercice 2** Exemple d'application lipschitzienne

Soit  $(a, b) \in [0; +\infty[$  et

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (ax, by).$$

1. Montrer que  $f$  est lipschitzienne lorsque  $\mathbb{R}^2$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_1$ .
2. En est-il de même pour  $\|\cdot\|_2$  ? Et pour  $\|\cdot\|_\infty$  ?

**Solution (Ex.2 – Exemple d'application lipschitzienne)**

1. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ .

$$\|f(x, y) - f(x', y')\|_1 = \|(a(x - x'), b(y - y'))\|_1 = a|x - x'| + b|y - y'|$$

Soit  $k = \max(a, b)$ .

$$\|f(x, y) - f(x', y')\|_1 \leq k(|x - x'| + |y - y'|) \leq k \|(x, y) - (x', y')\|_1$$

$f$  est  $k$ -lipschitzienne lorsque  $\mathbb{R}^2$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_1$ .

2. Oui, grâce à l'équivalence des normes de l'exercice *Comparaison des normes usuelles* :

$$\|f(x, y) - f(x', y')\|_2 \leq \|f(x, y) - f(x', y')\|_1 \leq k \|(x, y) - (x', y')\|_1 \leq k\sqrt{n} \|(x, y) - (x', y')\|_2,$$

$$\|f(x, y) - f(x', y')\|_\infty \leq \|f(x, y) - f(x', y')\|_1 \leq k \|(x, y) - (x', y')\|_1 \leq kn \|(x, y) - (x', y')\|_\infty.$$

**Exercice 3** Ouverts ou fermés

Étudier si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < |y + 1| < 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x^2 + 2y^2 \leq 1\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x^2 + y^4 < 0\}, \quad D = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\}.$$

**Solution (Ex.3 – Ouverts ou fermés)**

•  $f : (x, y) \mapsto |y + 1|$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  et  $A$  est l'intersection des ouverts  $A_0 \stackrel{\text{déf.}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) > 0\}$  et  $A_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) < 10\}$  donc  $A$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

•  $\forall n \geq 2, M_n \stackrel{\text{déf.}}{=} (1/n, 1/n) \in B$  mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = (0, 0) \notin B$  donc  $B$  n'est pas fermé.

$M = (1, 0) \in B$  mais  $\forall r > 0, \mathcal{B}(M, r) \not\subset B$  car  $(1 + r/2, 0) \notin B$  donc  $B$  n'est pas ouvert.

•  $C$  est vide donc  $C$  est ouvert ET fermé.

•  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue (polynôme des coefficients de la matrice) donc  $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det(M) = 0\}$  est fermé et son complémentaire  $D$  est ouvert.

**Exercice 4** *Un ouvert et un fermé dans un espace de fonctions*

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

On se propose de démontrer que

$U = \{f \in E / \forall x \in [0; 1], f(x) > 0\}$  et  $F = \{f \in E / \forall x \in [0; 1], f(x) \geq 0\}$  sont respectivement un ouvert et un fermé de  $E$ .

1. *Première méthode pour  $U$*  –

a) Soit  $f \in E$ . Justifier :  $\exists a \in [0; 1], \forall x \in [0; 1], f(x) \geq f(a)$ .

b) Soit  $f \in U$  et  $a$  défini comme précédemment. On pose  $m = f(a)$ . Montrer que  $\mathcal{B}(f, m)$  n'est pas vide et que  $\mathcal{B}(f, m) \subset U$ .

c) Qu'a-t-on démontré ?

2. *Seconde méthode pour  $U$*  –

On définit la fonction  $\varphi$  par :  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \min_{x \in [0; 1]} \{f(x)\}$ .

a) Justifier que  $\varphi$  est correctement définie.

b) Montrer que  $\varphi$  est continue sur  $E$ .

c) Justifier que  $U$  est un ouvert de  $E$ .

3. *Première méthode pour  $F$*  –

a) Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $F$  convergente, de limite  $f$ . Montrer que  $f \in F$ .

b) Conclure.

4. *Seconde méthode pour  $F$*  –

Utiliser la seconde méthode de l'étude de  $U$ .

**Solution** (Ex.4 – *Un ouvert et un fermé dans un espace de fonctions*)

1. a)  $f$  est continue sur le segment  $[0; 1]$  donc elle est bornée et atteint ses bornes, notamment sa borne inférieure :  $\exists a \in [0; 1], \forall x \in [0; 1], f(x) \geq f(a)$ .

b) Comme  $f > 0$ ,  $m > 0$ . Donc  $B(f, m)$  n'est pas vide.

Soit  $g \in B(f, m)$ .  $\|g - f\|_\infty < m$  donc :

$\forall x \in [0; 1], |g(x) - f(x)| < m$ , donc  $g(x) > f(x) - m$ , donc  $g(x) > 0$  par définition de  $m$ .

Ainsi,  $g \in U$ . Donc  $B(f, m) \subset U$ .

c) On a démontré :  $\forall f \in U, \exists m > 0, B(f, m) \subset U$ . C'est-à-dire :  $U$  est un ouvert.

2. a) Pour tout  $f \in E$ ,  $f$  est continue sur le segment  $[0; 1]$  donc elle est bornée et atteint ses bornes, notamment sa borne inférieure, donc  $\min_{x \in [0; 1]} \{f(x)\}$

existe :  $\varphi$  est correctement définie.

b) Soit  $f \in E$ . Montrons que  $\varphi$  est continue en  $f$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $g \in E$  tel que  $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ .

Alors :  $\forall x \in [0; 1], |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ .

Donc :  $\forall x \in [0; 1], f(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon$ .

On en tire :

$\forall x \in [0; 1], g(x) \geq \min f - \varepsilon$ , donc  $\min g \geq \min f - \varepsilon$ , i.e.  $\varphi(f) - \varphi(g) \leq \varepsilon$ ,

et aussi :

$\forall x \in [0; 1], f(x) + \varepsilon \geq \min g$ , donc  $\min f + \varepsilon \geq \min g$ , i.e.  $\varphi(g) - \varphi(f) \leq \varepsilon$ .

Ainsi :  $|\varphi(f) - \varphi(g)| \leq \varepsilon$ .

Donc  $\varphi$  est continue en  $f$ . Et comme  $f$  est quelconque dans  $E$ ,  $\varphi$  est continue sur  $E$ .

c)  $U = \{f \in E / \forall x \in [0; 1], f(x) > 0\} = \{f \in E / \varphi(f) > 0\}$  avec  $\varphi$  continue sur  $E$ , donc  $U$  est un ouvert de  $E$ .

3. a) Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $F$  convergente, de limite  $f$ . Montrer que  $f \in F$ . On a :  $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc la suite  $f_n$  converge uniformément donc simplement vers  $f$ .

Soit  $x \in [0; 1]$ .  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ . Or :  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \geq 0$  car  $f_n \in F$ .

Par prolongement des inégalités larges à la limite :  $f(x) \geq 0$ .

Ainsi :  $\forall x \in [0; 1], f(x) \geq 0$ , donc  $f \in F$ .

b) Toute suite convergente de  $F$  a sa limite dans  $F$  :  $F$  est fermé d'après la caractérisation séquentielle des fermés.

4.  $F = \{f \in E / \forall x \in [0; 1], f(x) \geq 0\} = \{f \in E / \varphi(f) \geq 0\}$  avec  $\varphi$  continue sur  $E$ , donc  $F$  est un fermé de  $E$ .