Exercice 1 *Rotations et dérivations*
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On choisit l'orientation de $\mathbb{R}^2$ donnée par $\mathcal{B}$. Soit $r : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), t \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(rot(t))$ où $rot(t)$ désigne la rotation vectorielle d'angle t.

1. Montrer que r est dérivable et expliciter r'.

2. En déduire que r est $\mathcal{C}^\infty$ et expliciter $r^{(n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Solution (**Ex.1** – *Rotations et dérivations*)

1. $r : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$: les 4 fonctions coordonnées (dans la base canonique que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) sont dérivables donc r est dérivable, et par dérivation par coordonnées :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad r'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} = r\big(t + \frac{\pi}{2}\big).$$

2. Par récurrence immédiate, r est $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad r^{(n)}(t) = r\big(t + n\frac{\pi}{2}\big) = \begin{cases} r(t) & \text{si } n \equiv 0 \mod (4), \\ r'(t) & \text{si } n \equiv 1 \mod (4), \\ r^{(2)}(t) = -r(t) & \text{si } n \equiv 2 \mod (4), \\ r^{(3)}(t) = -r'(t) & \text{si } n \equiv 3 \mod (4). \end{cases}$$

Exercice 2 *Mouvement circulaire et orthogonalité du vecteur vitesse*
Soit I un intervalle $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto f(t)$ une fonction vectorielle dérivable $\mathbb{R}^2$.
On suppose $\mathrm{N} : t \mapsto ||f(t)||$ constante.
Montrer que pour tout t, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux. *On pourra dériver* N^2...

Solution (**Ex.2** – *Mouvement circulaire et orthogonalité du vecteur vitesse*)
On a $\forall t \in \mathrm{I}$;

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} ||f(t)||^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle f(t), f(t) \rangle = \langle f'(t), f(t) \rangle + \langle f(t), f'(t) \rangle = 2 \langle f'(t), f(t) \rangle$$

donc $f'(t) \perp f(t)$.

Exercice 3 *Exemple d'une application à valeur matricielle*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable.

1. Montrer que, pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t)^{\mathrm{T}} f'(t)$ est une matrice antisymétrique.

2. Montrer que, si n est impair, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t)$ n'est pas inversible.

Solution (**Ex.3** – *Exemple d'une application à valeur matricielle*)

1. Soit $g : t \mapsto f(t)^{\mathrm{T}} f(t)$.
- Par bilinéarité du produit matriciel,
$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = f'(t)^{\mathrm{T}} f(t) + f(t)^{\mathrm{T}} f'(t) = \left(f(t)^{\mathrm{T}} f'(t)\right)^{\mathrm{T}} + f(t)^{\mathrm{T}} f'(t)$
- Mais comme $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $g(t) = \mathrm{I}_n$ donc $g'(t) = 0_n$.
Donc pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t)^{\mathrm{T}} f'(t)$ est une matrice antisymétrique.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Notons $\varepsilon = \det(()\, f(t)) = \pm 1$.
D'une part :
$\det(()\, f(t)^{\mathrm{T}} f'(t)) = \det(()\, f(t)^{\mathrm{T}})\det(()\, f'(t)) = \varepsilon\det(()\, f'(t))$,
d'autre part :
$$\begin{aligned}\det(()\, f(t)^{\mathrm{T}} f'(t)) &= \det(() - f'(t)^{\mathrm{T}} f(t)) = (-1)^n\det(()\, f'(t)\det(()\, f(t))\\ &= (-1)^n\varepsilon\det(()\, f'(t)) = -\varepsilon\det(()\, f'(t)) \text{ (avec } n \text{ impair !)},\end{aligned}$$
donc $\det(()\, f'(t)) = 0$ et $f'(t) \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 *Mouvement sur une sphère et accélération*

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{R} \in\,]\,0\,;\ +\infty[$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(0, \mathrm{R})$ la sphère de centre 0 et de rayon R.
I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ deux fois dérivable.
On suppose que : $\forall t \in \mathrm{I}, f(t) \in \mathcal{S}$ (autrement dit, pour tout t, le point $f(t)$ est sur la sphère $\mathcal{S}$.

1. Montrer que :
(i) $\forall t \in \mathrm{I}, f'(t) \perp f(t)$ et
(ii) $\forall t \in \mathrm{I}, \langle f''(t), f(t)\rangle \leq 0$.

2. Interpréter cinématiquement ces résultats.

Solution (**Ex.4** – *Mouvement sur une sphère et accélération*)

1. Soit $\mathrm{N} : t \mapsto \|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t)\rangle$. Alors :
$\forall t \in \mathrm{I}, \mathrm{N}'(t) = 2\langle f'(t), f(t)\rangle$, mais comme N est constante égale à R^2, $\mathrm{N}' = 0$.
Donc : $\forall t \in \mathrm{I}, \langle f'(t), f(t)\rangle = 0$ et $f'(t) \perp f(t)$.
Dérivons alors $\mathrm{P} : t \mapsto \langle f'(t), f(t)\rangle$, elle aussi constante.
$\forall t \in \mathrm{I}, \mathrm{P}'(t) = \langle f''(t), f(t)\rangle + \langle f'(t), f'(t)\rangle = 0$, donc $\langle f''(t), f(t)\rangle = -\|f'(t)\|^2 \leq 0$.

2. (i) dit qu'en tout point $f(t)$, le vecteur vitesse instantané est orthogonal au rayon $f(t)$... si ça n'était pas le cas, cela compromettrait que le point reste sur $\mathcal{S}$!
(ii) dit qu'à tout moment, l'accélération est dirigée vers l'intérieur de la sphère : $\cos(f''(t), f(t)) \leq 0$, i.e. sens opposé au rayon $f(t)$.

Exercice 5 *Dérivation, déterminant et trace*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \det(\mathrm{I}_n + t\mathrm{A})$.
Montrer que φ est dérivable et calculer $\varphi'(0)$. *On pourra utiliser le polynôme caractéristique de* $-\mathrm{A}$ *ou la multilinéarité du déterminant...*

Solution (**Ex.5** – *Dérivation, déterminant et trace*)
En utilisant le polynôme caractéristique de $-\mathrm{A}$ *:*
• $\varphi(t)$ est un polynôme en t donc φ est dérivable (et même $\mathcal{C}^\infty$).
• Notons que, pour $t \neq 0$,
$\varphi(t) = \det(()\, t((1/t)\mathrm{I}_n - (-\mathrm{A}))) = t^n \chi_{-\mathrm{A}}(1/t) = 1 - \mathrm{Tr}(() - \mathrm{A})t + \mathrm{P}(t)$ avec $\deg \mathrm{P} \geq 2$.
$\dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \dfrac{1}{t}\big(1 + \mathrm{Tr}(()\,\mathrm{A})t + \mathrm{P}(t) - \det(()\,\mathrm{I}_n)\big) = \mathrm{Tr}(()\,\mathrm{A}) + \dfrac{\mathrm{P}(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{}$
$\mathrm{Tr}(()\,\mathrm{A})$ car $\deg(\mathrm{P}) \geq 2 \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{P}(t)}{t} \Longrightarrow \deg\big(\dfrac{\mathrm{P}(t)}{t}\big) \geq 1 \Longrightarrow \xrightarrow[t\to 0]{} 0$
En utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes
Je note $(\mathrm{C}_i)_{1\leq i\leq n}$ les colonnes de A et $(\mathrm{E}_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de sorte que :
$\varphi(t) = \det(()\,\mathrm{E}_1 + t\mathrm{C}_1, \mathrm{E}_2 + t\mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{E}_n + t\mathrm{C}_n)$.
On a évidemment, $\forall i$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{E}_i + t\mathrm{C}_i) = \mathrm{C}_i$.
En dérivant, par $n-$linéarité,
$\varphi'(t) = \det(()\,\mathrm{C}_1, \mathrm{E}_2 + t\mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{E}_n + t\mathrm{C}_n) + \det(()\,\mathrm{E}_1 + t\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{E}_n + t\mathrm{C}_n) + \cdots + \det(()\,\mathrm{E}_1 + t\mathrm{C}_1, \mathrm{E}_2 + t\mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n)$, donc
$\varphi'(0) = \det(()\,\mathrm{C}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n) + \det(()\,\mathrm{E}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{E}_n) + \cdots + \det(()\,\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{C}_n)$.
Or un développement rapide montre que, $\forall i$,
$\det(()\,\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_{i-1}, \mathrm{C}_i, \mathrm{E}_{i+1}, \ldots, \mathrm{E}_n) = a_i$.
D'où $\varphi'(0) = \mathrm{Tr}(()\,\mathrm{A})$.

Exercice 6 *Prolongement de classe, version vectorielle*
Soit $f \in \mathcal{C}^1([\,a\,;\, b[\,, \mathbb{R}^n)$. Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,a\,;\, b]$ si, et seulement si, f et f' admettent des limites finies en b.

Solution (**Ex.6** – *Prolongement de classe, version vectorielle*)
Cette propriété est vraie pour une fonction $f : [\,a\,;\, b[\, \to \mathbb{R}$. Comme la classe d'une fonction $f : [\,a\,;\, b[\, \to \mathbb{R}^n$ est la plus petite des classe de ses n fonctions coordonnées $f_i : [\,a\,;\, b[\, \to \mathbb{R}$, cette propriété s'étend aux fonctions $f : [\,a\,;\, b[\, \to \mathbb{R}^n$.