**Exercice 1** *EDL : applications directes du cours*

Résoudre les équations différentielles suivantes, où $y$ désigne une fonction de $x$ suffisamment dérivable sur le domaine indiqué :

1. $y' = (1+y)\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$
2. $3xy' - 4y = x, \quad x \in ]0\,;+\infty[$
3. $y'' + y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$
4. $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$
6. $y'' + 2y' + y = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}$ (solution part$^{\text{ière}}$ de la forme $f : x \mapsto (ax+b)e^x$)

**Solution** (**Ex.1 –** *EDL : applications directes du cours*)

Je note (E) l'équation différentielle à résoudre, (H) l'équation homogène associée.

1. (H) $\iff y' - (\sin x)y = 0$.
   Les solutions de (H) sont : $x \mapsto \mathrm{C}e^{-\cos x}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ quelconque.
   $x \mapsto -1$ est solution particulière évidente de (E).
   Les solutions de (E) sont :
   $$x \mapsto \mathrm{C}e^{-\cos x} - 1 \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$
2. (H) $\iff y' - \dfrac{4}{3x}y = 0$.
   Les solutions de (H) sont : $x \mapsto \mathrm{C}x^{4/3}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ quelconque.
   Recherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante.
   Soit $f : x \mapsto \mathrm{C}(x)x^{4/3}$ où $\mathrm{C} : x \mapsto \mathrm{C}(x)$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
   $(\forall x \in ]0\,;+\infty[,\quad 3xf'(x) - 4f(x) = x) \iff$
   $\left(\forall x \in ]0\,;+\infty[,\quad 3x\left(\mathrm{C}'(x)x^{4/3} + \mathrm{C}(x)\frac{4}{3}x^{1/3}\right) - 4\mathrm{C}(x)x^{4/3} = x\right) \iff$
   $\left(\forall x \in ]0\,;+\infty[,\quad 3x^{7/3}\mathrm{C}'(x) = x\right) \iff$
   $\left(\forall x \in ]0\,;+\infty[,\quad \mathrm{C}'(x) = \frac{1}{3}x^{-4/3}\right) \iff$
   $\exists k \in \mathbb{R}, \left(\forall x \in ]0\,;+\infty[,\quad \mathrm{C}(x) = -x^{-1/3} + k\right)$
   Donc $x \mapsto -x$ est solution particulière (évidente??????... si on avait retiré nos lunettes en contre-plaqué) de (E).
   Les solutions de (E) sont :
   $$x \mapsto \mathrm{C}x^{4/3} - x \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$
3. Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficient constant d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, de solutions $r = \pm i$.
   Les solutions de (E) sont :
   $$x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
4. Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficient constant d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, de solutions 1 et 2.
   Les solutions de (E) sont :
   $$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
   ques Il s'agit d'une équation différentielle (E) du second ordre à coefficient constant, dont l'équation homogène (H) associée a pour équation caractéristique $r^2+2r+1=0$, de solution double $-1$.
   Les solutions de (H) sont :
   $$x \mapsto \left(\lambda x + \mu\right)e^{-x} \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
   On cherche une solution particulière de la forme $f : x \mapsto (ax+b)e^x$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = e^x\Big((a + ax + a + b) + 2(ax + a + b) + ax + b\Big)$
   $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = e^x\Big(4ax + 4a + 4b\Big)$
   Alors $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = -a$ fournit une solution particulière $x \mapsto \dfrac{x-1}{4}e^x$.
   Les solutions de (E) sont :
   $$x \mapsto \left(\lambda x + \mu\right)e^{-x} + \frac{x-1}{4}e^x \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

**Exercice 2** *Exemples d'EDL2 avec second membre trigonométrique*

En cherchant une solution particulière du type $\lambda\cos(kx) + \mu\sin(kx)$ résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$,
2. $y'' + y = 2\cos^2(x)$.

**Solution** (**Ex.2 –** *Exemples d'EDL2 avec second membre trigonométrique*)

1. L'équation différentielle homogène associée du second ordre à coefficient constant (H) a pour équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$, de solutions $-1 \pm i$.
   Les solutions de (H) sont :
   $$x \mapsto \left(\lambda\cos x + \mu\sin x\right)e^{-x} \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
   On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $x \mapsto a\sin x + b\cos x$. Après substitution $a = \dfrac{1}{5}$ et $b = \dfrac{-2}{5}$.
   Les solutions de cette équation différentielle sont finalement :
   $$x \mapsto \left(\lambda\cos x + \mu\sin x\right)e^{-x} + \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}\cos(x) \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
2. On procède de façon analogue.
   Les solutions de l'équation homogène associée sont :
   $$x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
   Pour trouver une solution particulière de $y''+y = 2\cos^2(x)$, on observe que $2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$ et on s'intéresse alors aux équations d'inconnues $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ :
   $$(\mathrm{E}_1) \quad z'' + z = \cos(2x) \text{ et } (\mathrm{E}_2) \quad w'' + w = 1.$$

Si $z$ est solution de $E_1$ et $w$ de $(E_2)$, par superposition $y+w$ sera solution de l'équation initiale.

Tout calcul fait, $y : x \mapsto -\frac{1}{3}\cos(2x)$ convient et $w : x \mapsto 1$ est solution évidente.

Les solutions de l'équation avec second membre sont :

$$x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x + 1 - \frac{1}{3}\cos(2x) \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

**Exercice 3** *Étude d'un système différentiel*

On souhaite déterminer toutes les fonctions $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

On pose $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $(\mathcal{S}) \iff X' = MX$.
2. Déterminer P telle que $P^T M P$ soit une matrice diagonale, notée D.
3. On pose $Y = PX$. Montrer que $(\mathcal{S}) \iff Y' = DY$.
4. Résoudre $(\mathcal{S})$

**Solution** (**Ex.3 –** *Étude d'un système différentiel*)

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha \exp(3t) \\ \beta \exp(-t) \end{pmatrix}$,

$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\exp(3t) + b\exp(-t) \\ a\exp(3t) - b\exp(-t) \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

**Exercice 4** *Largement inspiré de E3A maths 2 PSI 2016*

Soit $n$ un entier naturel non nul.

On note $P_n$ le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)$$

1. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer, s'ils existent, module et argument du nombre complexe $u = 1 + e^{i\theta}$.
2. <u>Etude des cas $n = 1$ et $n = 2$</u>
   a) Déterminer les polynômes $P_1$ et $P_2$.
   b) Vérifier que $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et que $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$. Sont-il irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ ?
3. <u>Cas général</u>
   a) Montrer que $P_n \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Donner son degré et son coefficient dominant.
   b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression des racines N-ièmes de l'unité.
   c) Calculer $P_n(i)$.
   d) Prouver par un argument géométrique que les racines de $P_n$ sont réelles.
   e) Soit $a \in \mathbb{C}$. prouver l'équivalence
   $$a \text{ est racine de } P_n \iff \exists k \in [|1, 2n|],\ a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$$
   f) Déterminer les racines du polynôme $P_n$. Vérifier alors le résultat de 2.b.iv.
   g) En développant $P_n$, déterminer un polynôme $Q_n$ de degré $n$ et à coefficients réels tel que
   $$P_n(X) = Q_n(X^2)$$
   h) Justifier l'unicité du polynôme $Q_n$ ainsi obtenu.
   i) Expliciter $Q_1$ et $Q_2$ et déterminer leurs racines respectives.
   j) Déterminer les racines de $Q_n$ en fonction de celles de $P_n$.

**Solution** (**Ex.4 –** *Largement inspiré de E3A maths 2 PSI 2016*)

1. $u = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = e^{i\theta/2} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
   Attention, un module et positif ou nul.
   - Si $\theta = \pi$ : $u = 0$, $|u| = 0$ et $u$ n'a pas d'argument.
   - Si $\theta \in [0\,;\,\pi[$ : $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ donc $|u| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(u) = \frac{\theta}{2}$.
   - Si $\theta \in ]\pi\,;\,2\pi[$ : $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$ donc $|u| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(u) = \frac{\theta}{2} + \pi$.
2. a) $P_1 = 3X^2 - 1$ et $P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1$.
   b) $P_1(1/\sqrt{3}) = 0$ donc $P_1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
   $\deg(P_2) = 4 > 2$ donc $P_2$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
3. a) $P_n = \frac{1}{2i}\left(X^{2n+1} + \binom{2n+1}{1} iX^{2n} + Q(X) - \left(X^{2n+1} - \binom{2n+1}{1} iX^{2n} + R(X)\right)\right)$ où $(Q, R) \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]^2$,
   $P_n = (2n+1)X^{2n} + \frac{1}{2i}(Q(X) - R(X))$ avec $Q - R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, donc
   $\deg(P_n) = 2n$ et $\mathrm{dom}(P_n) = 2n+1$, ce qui généralise la première question.
   b) $\forall k \in [\![ 0\,;\,N-1 ]\!]$, $\quad \omega_k = e^{2ik\pi/N}$ sont les N racines N-èmes de l'unité.
   c) $P_n(i) = (2i)^{2n} = (-4)^n$.

**d)** Soit $z$ racine de $\mathrm{P}_n$.
$\mathrm{P}_n(z)=0 \Longrightarrow (z+i)^{2n+1}=(z-i)^{2n+1} \Longrightarrow |z+i|=|z-i|$.
En notant M le point d'affixe $z$, A et B d'affixes $-i$ et $i$ respectivement,
$|z+i|=|z-i| \Longrightarrow \mathrm{AM}=\mathrm{BM} \Longrightarrow \mathrm{M}\in\Delta$ où $\Delta$ est la médiatrice du segment [AB], c'est-à-dire l'axe réel. Donc $z\in\mathbb{R}$.

**e)** Notons que $\mathrm{P}_n(a)=0 \Longrightarrow a\neq i$ d'après c).
$\mathrm{P}_n(a)=0 \Leftrightarrow (a+i)^{2n+1}=(a-i)^{2n+1} \Leftrightarrow \dfrac{(a+i)^{2n+1}}{(a-i)^{2n+1}}=1 \Leftrightarrow \exists k\in[\![0\,;\,2n+1]\!], \dfrac{a+i}{a-i}=e^{2ik\pi/(2n+1)}$
où cette dernière égalité n'est pas possible pour $k=0$.
$\mathrm{P}_n(a)=0 \Leftrightarrow \exists k\in[|1,2n|], a(e^{2ik\pi/(2n+1)}-1)=i(e^{2ik\pi/(2n+1)}+1)$.

**f)** Les racines de $\mathrm{P}_n$ sont donc, pour $k\in[\![1\,;\,2n]\!]$,
$a_k=i\dfrac{e^{2ik\pi/(2n+1)}+1}{e^{2ik\pi/(2n+1)}-1}=\mathrm{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{\tan(k\pi/(2n+1))}$
En particulier, ces $2n$ racines sont réelles et distinctes car cotan est une fonction strictement décroissante $(\mathrm{cotan}'=-1-\mathrm{cotan})^2<0)$ sur $]0\,;\,\pi[$ et les $\dfrac{k\pi}{2n+1}$ sont $2n$ nombres distincts de cet intervalle.
Ceci confirme et précise 3.d).

**g)** Par la formule du binôme, $\mathrm{P}_n=\dfrac{1}{2i}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left[i^{2n+1-k}-(-i)^{2n+1-k}\right]\mathrm{X}^k$.

Or : $i^{2n+1-k}-(-i)^{2n+1-k}=\begin{cases}0 & \text{si } k \text{ est impair}\\ 2i(-1)^{n-p} & \text{si } k=2p\end{cases}$.

Donc : $\mathrm{P}_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{2n+1}{2p}\mathrm{X}^{2p}=\mathrm{Q}_n(\mathrm{X}^2)$ en posant $\mathrm{Q}_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{2n+1}{2p}\mathrm{X}^p$.
$\mathrm{Q}_n\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et $\deg(\mathrm{Q}_n)=n$. On retrouve au passage que $\mathrm{P}_n$ est de degré $2n$, de coefficient dominant $\dbinom{2n+1}{2n}=2n+1$, pair et à coefficients réels, ce que laissait présager le calcul de $\mathrm{P}_1$ et de $\mathrm{P}_2$.

**h)** Supposons que $\mathrm{R}_n$ vérifie aussi $\mathrm{P}_n(\mathrm{X})=\mathrm{R}_n(\mathrm{X}^2)$.
Alors : $\forall x\in\mathbb{R}^+, (\mathrm{R}_n-\mathrm{Q}_n)(\sqrt{x})=\mathrm{P}_n(x)-\mathrm{P}_n(x)=0$, donc $\mathrm{R}_n-\mathrm{Q}_n$ a une infinité de racines. Donc $\mathrm{R}_n-\mathrm{Q}_n=0_{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}$, donc $\mathrm{R}_n=\mathrm{Q}_n$.

**i)** $\mathrm{Q}_1=3\mathrm{X}-1$ dont l'unique racine est $1/3$, et $\mathrm{Q}_2=5\mathrm{X}^2-10\mathrm{X}+1$, dont les deux racines sont $\dfrac{5\pm2\sqrt{5}}{5}$.

**j)** Pour $k\in[\![1\,;\,n]\!]$, les $n$ racines $a_k$ de $\mathrm{P}_n$ sont positives car cotan est positive sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, et deux à deux distinctes. On a alors :
$\forall k\in[\![1\,;\,n]\!],\quad \mathrm{Q}_n(a_k^2)=\mathrm{P}_n(a_k)=0$, donc $(a_k^2)_{k=1}^n$ sont $n$ racines distinctes de $\mathrm{Q}_n$.
Comme $\mathrm{Q}_n$ est de degré $n$, ce sont toutes les racines de $\mathrm{Q}_n$.

**Exercice 5** *Exemples d'intégrations terme à terme*

Pour $t>1$ on note
$$\zeta(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^t}\quad\text{et}\quad\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

Les fines mouches et les fins limiers auront reconnu la fonction zêta de Riemann et la fonction gamma d'Euler.

1. Justifier l'existence de $\zeta(t)$ et $\Gamma(t)$ pour tout $t>1$.
2. Montrer que, pour $t>1$,
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\zeta(t)\Gamma(t).$$
*On pourra utiliser les fonctions $f_n : x\mapsto x^{t-1}e^{-(n+1)x}$...*
3. Montrer que, pour $t>1$,
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\left(1-\frac{1}{2^{t-1}}\right)\zeta(t)\Gamma(t).$$
*Et si on adaptait la stratégie précédente ?*
4. On donne $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ et $\Gamma(2)=1$. Que valent $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$ ?

**Solution** (**Ex.5 –** *Exemples d'intégrations terme à terme*)

1. On pose $f_n : x\mapsto x^{t-1}\mathrm{e}^{-(n+1)x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

① Les $f_n$ sont continues et intégrables. En effet
$\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x \overset{u=(n+1)x}{=} \int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{n+1}\right)^{t-1}\mathrm{e}^{-u}\frac{1}{n+1}\mathrm{d}u=\frac{1}{(n+1)^t}\Gamma(t)$

② La série de terme général $f_n$ converge simplement vers la fonction $\mathrm{S} : x\longmapsto x^{t-1}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\dfrac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x-1}$.

③ S est continue.

④ La série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+1)^t}\Gamma(t)$ converge car c'est une série de Riemann avec $t>1$.

Par le théorème de permutation, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^t}\Gamma(t)$, i.e. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \zeta(t)\Gamma(t)$.

2. *Adaptons la stratégie précédente...*

On pose $g_n : x \mapsto -x^{t-1}\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)^{n+1} = (-1)^n f_n(x)$ sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

① Les $g_n$ sont continues et intégrables :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{1}{(n+1)^t}\Gamma(t)$

② La série de terme général $g_n$ converge simplement vers la fonction $\mathrm{S} : x \longmapsto x^{t-1}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x+1}$.

③ S est continue.

④ La série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^t}\Gamma(t)$ converge car c'est une série de Riemann avec $t > 1$.

Par le théorème de permutation, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^t}\Gamma(t)$.

Il reste à exprimer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^t}$ à l'aide de $\zeta(t)$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^t} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{(n+1)^t} - \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{(n+1)^t}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^t} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^t} = \left(\zeta(t) - \frac{1}{2^t}\zeta(t)\right) - \frac{1}{2^t}\zeta(t) = \left(1 - \frac{1}{2^{t-1}}\right)\zeta(t)$$

, i.e. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \zeta(t)\Gamma(t)$.

Finalement on a bien $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \left(1 - \frac{1}{2^{t-1}}\right)\zeta(t)\Gamma(t)$.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \zeta(2)\Gamma(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\zeta(2)\Gamma(2) = \frac{\pi^2}{12}$.