

Vous ne pourrez aborder sereinement l'étude des phénomènes physiques intéressants du programme de 2<sup>ème</sup> année, qu'une fois parfaitement acquis un certain nombre d'automatismes sur des méthodes élémentaires – notamment des techniques de calcul. Vous trouverez ci-dessous une succession d'exercices répétitifs, sans intérêt physique, volontairement restreints à des calculs très simples mais rencontrés très fréquemment (développements limités au premier ordre, équations différentielles extrêmement simples...). L'objectif pour vous est d'acquérir *de l'assurance et de la rapidité*.

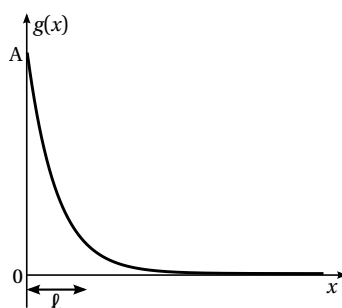
- Organisez-vous pour en faire un peu chaque jour, durant l'été, plutôt que l'intégralité la dernière semaine.
- Il faut effectuer la totalité des exercices, même si vous estimez que « vous savez faire ». L'enjeu est de finir par ressentir une véritable aisance.

## I Analyse qualitative d'expressions

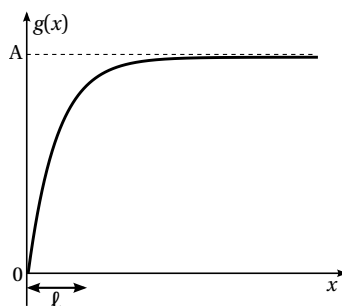
Dans toute cette partie,  $t$  désigne le temps,  $x$  une coordonnée d'espace;  $A, \alpha, \beta, \ell, \tau, \sigma, k, \omega$  sont des réels **positifs**.

Vous devez reconnaître immédiatement les expressions suivantes :

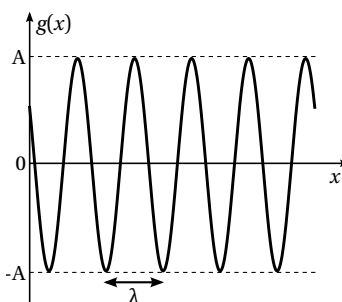
- $g(x) = A \exp(-\sigma x) = A \exp\left(-\frac{x}{\ell}\right)$  : décroissance exponentielle sur une longueur caractéristique  $\ell = 1/\sigma$ ;



- $g(x) = A \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{\ell}\right)\right]$  : relaxation exponentielle vers A sur une longueur caractéristique  $\ell$ ;



- $g(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx) = A \cos(kx + \varphi)$  : oscillation sinusoïdale, d'amplitude A, de période spatiale (longueur d'onde)  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ .



Les expressions précédentes sont données pour des fonctions de l'espace. Dans le cas de fonctions du temps, il faut évidemment faire appel à un temps caractéristique  $\tau$  (plutôt qu'une longueur  $\ell$ ), à une période temporelle  $T$  (plutôt que spatiale  $\lambda$ ), à une pulsation temporelle  $\omega$  (plutôt que spatiale  $k$ ).

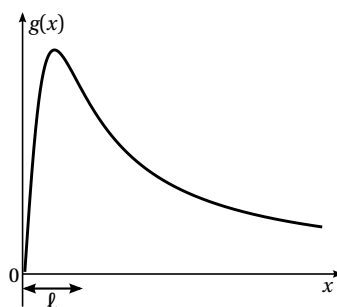
## Méthode : représenter rapidement l'allure d'une courbe

- Regarder les comportements asymptotiques (limites de l'intervalle de tracé).
- Examiner l'expression pour rechercher une ou des valeurs caractéristiques pour la variable : points où il y a annulation ou divergence notamment.
- Très souvent, pour des expressions très régulières, ces quelques informations suffisent déjà à faire un premier tracé qualitatif.

Exemple :  $g(x) = \frac{x\ell}{x^2 + \ell^2}$  pour  $x \in [0, +\infty[$ .

On note que  $g(0) = 0$  (plus précisément :  $g(x) \sim \frac{x}{\ell}$  pour  $x \ll \ell$ ),  $g(x \rightarrow +\infty) = 0$  (plus précisément :  $g(x) \sim \frac{\ell}{x}$  pour  $x \gg \ell$ ).

Puisque  $g(x) > 0$ , la courbe va donc passer par un maximum. On repère une longueur caractéristique  $\ell$ , qui fournit l'échelle typique des variations spatiales. Ceci suffit déjà à se faire une idée grossière du tracé.



Évidemment, pour affiner, il resterait à trouver précisément la position du maximum (qui se trouve être exactement en  $x = \ell$ , avec  $g(\ell) = 1/2$ ).

### [1] Tracés qualitatifs (1)

Tracer rapidement l'allure des courbes suivantes pour  $t \in [0, +\infty[$  ou  $x \in [0, +\infty[$ ; identifier à chaque fois une longueur ou un temps caractéristique et l'indiquer qualitativement sur le graphe. N'utilisez Python ou la calculatrice que pour vérifier votre tracé.

1.  $f(t) = 5[1 - \exp(-\alpha t)]$
2.  $g(x) = 2 + 3 \cos(kx)$
3.  $g(x) = \ln(x + \alpha)$
4.  $f(t) = 3A - 2A \sin(2\omega t)$
5.  $g(x) = 2A + A \exp(-\alpha(x - \beta))$
6.  $(\star) f(t) = A \exp(-\beta \cdot (t - \alpha)^2)$

### [2] Tracés qualitatifs (2)

Même exercice.

1.  $f(t) = -\alpha \exp\left(-\frac{t}{\beta}\right)$
2.  $f(t) = \alpha + \beta \sin(2\pi\sigma t)$
3.  $g(x) = \frac{x^2}{4x^2 - \ell^2}$
4.  $g(x) = \frac{x}{x + \alpha x^2}$
5.  $f(t) = \alpha \exp(-\sigma t) \sin(\omega t)$  (deux échelles de temps à identifier)
6.  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \ell^2}}$

### [3] Tracés qualitatifs (3) : exemples physiques

Représenter (sans calculatrice) l'allure des courbes suivantes, puis la décrire en quelques phrases (en utilisant un vocabulaire "physique"). Si possible, proposer quelques éléments d'interprétation physique.

1. Énergie potentielle de pesanteur du pendule simple (masse  $m$ , longueur  $\ell$ ) :

$$E_P(\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta),$$

$\theta$  désignant l'angle par rapport à la position d'équilibre verticale.

2. Un projectile est lancé à partir du sol, dans le champ de pesanteur terrestre. Sa vitesse initiale  $\vec{v}_0$  fait un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. La hauteur maximale atteinte  $h$  et la portée  $d$  (distance à laquelle il retombe au sol) sont données par :

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad \text{et} \quad d = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

Étudier  $h$  et  $d$  en fonction de  $\alpha$ .

3. L'efficacité de Carnot d'un réfrigérateur fonctionnant entre une source chaude de température  $T_C$  et une source froide de température  $T_F$  est :

$$e_C = \frac{T_F}{T_C - T_F}.$$

Étudier  $e_C$  en fonction de  $T_F$ .

4. Pseudo-pulsation d'un oscillateur harmonique de facteur de qualité  $Q$  :

$$\omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}.$$

Étudier  $\omega$  en fonction de  $Q$  (on pourra simplifier un peu l'expression avant de tracer...).

5. (★) Un oscillateur en régime apériodique :

$$u(t) = u_0(e^{-r_1 t} - e^{-r_2 t})$$

avec  $0 < r_1 < r_2$  (tracer chaque terme avant de représenter la somme).

## II Équation différentielles élémentaires

Vous devez reconnaître et savoir donner immédiatement la solution des équations différentielles suivantes :

- Système du premier ordre :

$$\frac{dg}{dx} + \frac{1}{\ell} g = 0 \quad \longrightarrow \quad g(x) = A \exp\left(-\frac{x}{\ell}\right)$$

- Oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + k_0^2 g = 0 \quad \longrightarrow \quad g(x) = A_1 \cos(k_0 x) + A_2 \sin(k_0 x) = B \cos(k_0 x + \varphi)$$

- Second ordre instable :

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - \sigma^2 g = 0 \quad \longrightarrow \quad g(x) = A_1 e^{\sigma x} + A_2 e^{-\sigma x} = B_1 \operatorname{ch}(\sigma x) + B_2 \operatorname{sh}(\sigma x)$$

*Rappel : s'il y a un second membre non nul, il faut ajouter à la solution générale précédente (sans second membre), une solution particulière de l'équation complète. Dans le cas d'un second membre constant, on cherche une solution particulière constante. Par exemple :*

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + k_0^2 g = a_0 \quad \longrightarrow \quad g(x) = A_1 \cos(k_0 x) + A_2 \sin(k_0 x) + \frac{a_0}{k_0^2}.$$

Les constantes  $A_1$  et  $A_2$  se déterminent à partir des conditions initiales, sur la solution complète.

### Méthode : résolution d'équations différentielles de base

On se limite aux équations du type précédent, avec un second membre constant. Respecter absolument l'ordre suivant.

- Observer l'équation : où se trouve la fonction inconnue ? quelle est la variable ? l'équation est-elle d'ordre 1 ou 2, linéaire ou pas ?
- Mettre sous forme canonique : la fonction inconnue et ses dérivées dans le membre de gauche, termes constants dans le membre de droite.
- Trouver une solution particulière : chercher la fonction constante qui satisfait l'équation différentielle (puisque le second membre est constant).
- Donner la solution générale en ajoutant à la solution particulière trouvée précédemment la solution générale de l'équation sans second membre (avec 1 ou 2 constantes inconnues).
- Écrire les conditions initiales ou conditions aux limites pour déterminer les constantes.

#### [4] Équations différentielles (1)

On considère les équations différentielles suivantes, sur  $t \in [0, +\infty[$ . Les constantes  $\alpha, \beta, \tau$  sont supposées *positives*. La fonction  $f$  est sans dimension. Pour chaque équation :

- préciser les dimensions des constantes apparaissant dans l'équation,
- résoudre l'équation différentielle,
- tracer l'allure de la solution en faisant apparaître un temps caractéristique.

1.  $\frac{d^2 f}{dt^2} = \alpha + \beta f$  avec  $f(0) = 0$  et  $\frac{df}{dt}(0) = 0$

4.  $\frac{df}{dt} = \alpha t + \beta$  avec  $f(0) = 2$

2.  $\tau^2 \frac{d^2 f}{dt^2} = \beta - 3f$  avec  $f(0) = \alpha$  et  $\frac{df}{dt}(0) = 0$

5.  $\alpha \frac{d^2 f}{dt^2} + f + \frac{5}{\beta^2} = 0$  avec  $f(0) = -\frac{5}{\alpha\beta^2}$  et  $\frac{df}{dt}(0) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$

3.  $3\beta \frac{df}{dt} = -\alpha f + 2$  avec  $f(0) = 0$

6.  $\frac{df}{dt} + 3\alpha + \beta f = \frac{1}{\tau}$  avec  $f(0) = \alpha$

#### [5] Équations différentielles (2)

On considère les équations différentielles suivantes, sur  $t \in [0, +\infty[$ . Les constantes  $\alpha, \beta, \tau$  sont supposées *positives*. La fonction  $f$  est sans dimension. Pour chaque équation :

- préciser les dimensions des constantes apparaissant dans l'équation,
- résoudre l'équation différentielle.

1.  $3 \frac{d^2 f}{dt^2} - \beta^2 f + \frac{5}{\tau^2} = 0$  avec  $f(0) = 0$  et  $\frac{df}{dt}(0) = 0$

4.  $\alpha \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{2-3f}{\alpha}$  avec  $f(0) = 0$  et  $\frac{df}{dt}(0) = 0$

2.  $\alpha^2 \frac{d^2 f}{dt^2} = 2f$  avec  $f(0) = 0$  et  $\frac{df}{dt}(0) = \beta$

5.  $\frac{df}{dt} + \frac{3}{\alpha} = -2\beta f + \beta$  avec  $f(0) = 0$

3.  $\tau \frac{df}{dt} = 3 + \alpha t$  avec  $f(0) = 4$

6.  $\alpha \frac{d^2 f}{dt^2} - \beta = 0$  avec  $f(0) = -2\beta$  et  $\frac{df}{dt}(0) = 0$

#### [6] Équations différentielles (3)

On considère les équations différentielles suivantes, sur l'intervalle  $x \in [-\ell, \ell]$ . Les constantes  $\alpha, \beta, \ell$  sont supposées *positives*. La fonction  $g$  est sans dimension. Pour chaque équation :

- préciser les dimensions des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  si elles apparaissent dans l'équation,
- résoudre l'équation différentielle (remarque : la parité des conditions aux limites peut parfois aider à trouver les constantes...),
- tracer l'allure de la solution en faisant apparaître un temps caractéristique.

1.  $\ell^2 \frac{d^2 g}{dx^2} = -3g$  avec  $g(-\ell) = \alpha$  et  $g(\ell) = \alpha$

4.  $\alpha^2 \frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{4}{3} + 4g$  avec  $g(-\ell) = 0$  et  $g(\ell) = 0$

2.  $\ell^2 \frac{d^2 g}{dx^2} = -3g$  avec  $g(-\ell) = \alpha$  et  $g(\ell) = -\alpha$

5.  $\frac{d^2 g}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{4\ell^2} g$  avec  $g(0) = \alpha$  et  $\frac{dg}{dx}(0) = 0$

3.  $\frac{dg}{dx} = -\frac{2x}{\ell^2}$  avec  $g(0) = \frac{1}{\ell^2}$

#### [7] Équations différentielles (4)

On considère les équations différentielles suivantes, sur l'intervalle  $x \in [-\ell, \ell]$ . Les constantes  $\alpha, \beta, \ell$  sont supposées *positives*. La fonction  $g$  est sans dimension. Résoudre chacune de ces équations différentielles.

1.  $\frac{dg}{dx} = \frac{g-2}{\ell}$  avec  $g(0) = 0$

3.  $4 \frac{d^2 g}{dx^2} = \alpha$  avec  $g(-\ell) = \beta$  et  $g(\ell) = \beta$

2.  $2 \frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{1+\alpha^2 g}{\ell^2}$  avec  $g(-\ell) = 0$  et  $g(\ell) = 0$

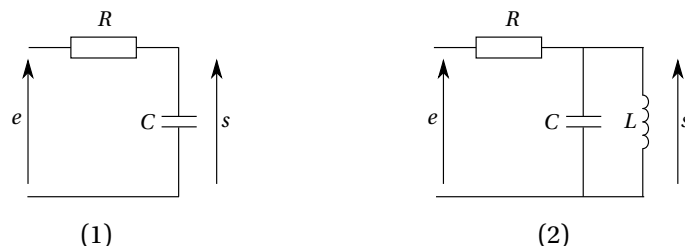
4.  $4 \frac{d^2 g}{dx^2} = \alpha$  avec  $g(-\ell) = \beta$  et  $g(\ell) = -\beta$

### III Systèmes linéaires

#### 1. Électronique

##### [8] Systèmes électroniques

Établir, pour les deux circuits suivants, l'équation différentielle reliant  $e(t)$  et  $s(t)$ .



##### [9] Réponse indicielle

On reprend le circuit (1) de l'exercice [8] (filtre RC), et on le soumet à un échelon de tension :  $e(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $e(t) = E_0$  pour  $t > 0$ .

Déterminer  $s(t)$ . Pour écrire la condition initiale, on exploitera la continuité de la tension aux bornes du condensateur.

**Révisions** Revoir, dans votre cours de 1<sup>re</sup> année :

- la notation complexe;
- les lois d'association de résistances/bobines/condensateurs en série et en parallèle;
- les impédances des dipôles fondamentaux (résistance, bobine, condensateur);
- les lois d'association d'impédances en série et en parallèle.

##### [10] Fonction de transfert

On alimente le circuit (2) de l'exercice [8] par une tension sinusoïdale  $\underline{e}(t) = \underline{e}_0 e^{j\omega t}$ , en notation complexe.

Établir la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$  par trois méthodes différentes :

1. à partir de l'équation différentielle obtenue exercice [8];
2. en utilisant la loi des nœuds et en travaillant avec les impédances complexes;
3. en regroupant les dipôles L et C sous la forme d'une unique impédance équivalente et en appliquant un diviseur de tension.

De quel type de filtre s'agit-il?

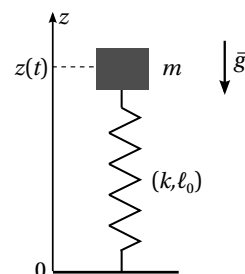
#### 2. Mécanique

##### Méthode : écriture de la force de rappel d'un ressort

Considérons le système masse-ressort représenté ci-contre. On tient compte du poids de la masse. Appliquer le P.F.D. à la masse.

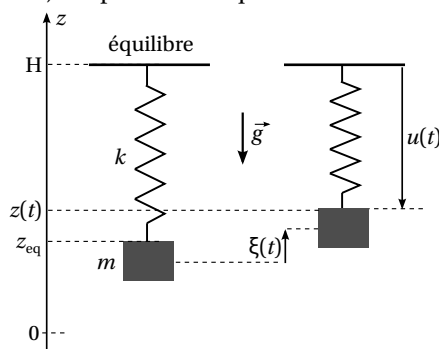
- On exprime la longueur du ressort :  $\ell = z$ . On en déduit que la force exercée par le ressort sur la masse est de la forme  $\vec{F} = \pm k(z - \ell_0)\vec{e}_z$ . Reste à déterminer le signe.
- Imaginons que la masse soit décalée vers le haut, de sorte que  $z - \ell_0 > 0$ . Le ressort est détendu, et lappelle la masse vers le bas. On a donc  $\vec{F} = -k(z - \ell_0)\vec{e}_z$ .
- On applique le P.F.D., ici en tenant compte du poids :  $m\ddot{z} = -k(z - \ell_0) - mg$ .
- On remarque qu'à l'équilibre ( $\ddot{z} = 0$ ), la position de la masse est  $z_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k} < \ell_0$  comme attendu. En posant  $\xi = z - z_{eq}$ , on obtient

$$m\ddot{\xi} = -k\xi.$$

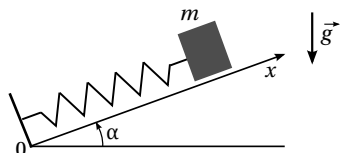


### [11] Oscillateurs mécaniques (1)

1. On étudie l'oscillateur ci-dessous. Le ressort, de raideur  $k$ , a une longueur à vide  $\ell_0$ . A été représentée à gauche la situation d'équilibre, et à droite une situation quelconque. La position de la masse peut être repérée par son altitude  $z$ , ou par la longueur du ressort  $u$ , ou par l'écart  $\xi$  à la position d'équilibre. On tient compte de la pesanteur.



- Établir l'équation différentielle vérifiée par  $z(t)$ . De même pour  $u(t)$ .
  - Déterminer l'altitude d'équilibre  $z_{eq}$ , ainsi que la longueur du ressort à l'équilibre  $u_{eq}$ . Vérifier le signe dans le résultat final (a-t-on  $u_{eq} > \ell_0$  ou  $u_{eq} < \ell_0$  ?)
  - Obtenir l'équation différentielle vérifiée par  $\xi(t)$ .
2. On étudie à présent le système ci-dessous :

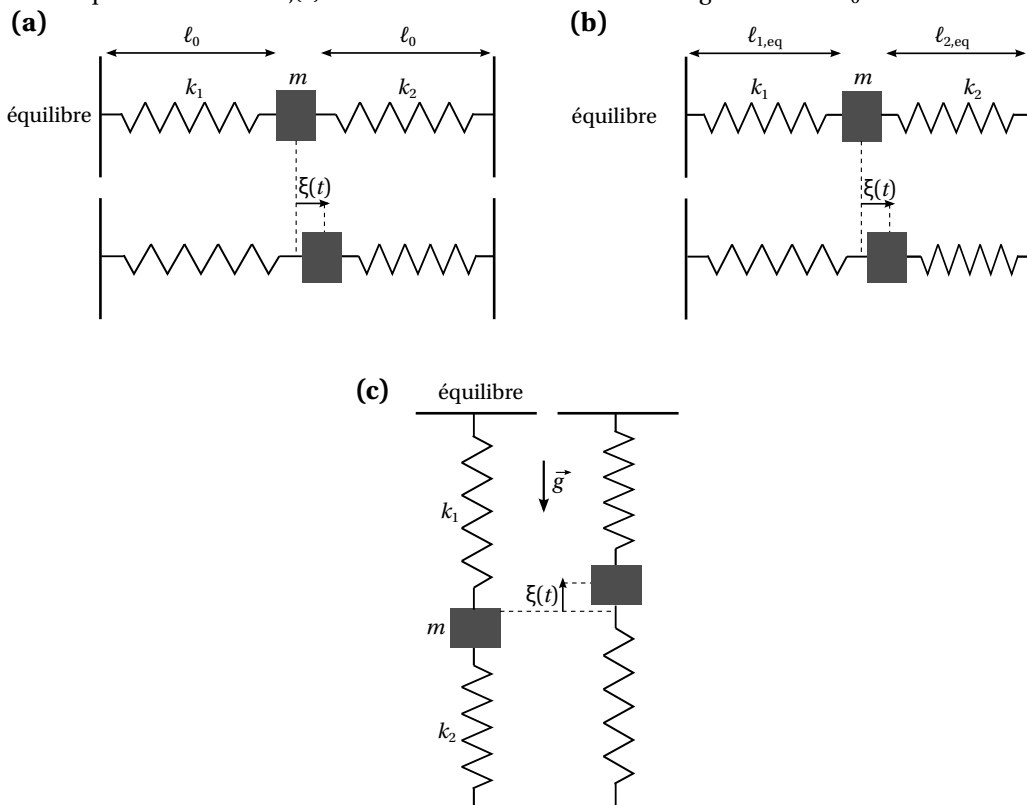


Le ressort a une raideur  $k$  et une longueur à vide  $\ell_0$ . La position de la masse est repérée par  $x(t)$ .

- Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse. Trouver  $x(t)$  sachant que  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$ .
- Exprimer (à une constante additive près) l'énergie mécanique du système {masse + ressort}. Retrouver l'équation différentielle de la question précédente à partir de cette approche énergétique.

### [12] Oscillateurs mécaniques (2)

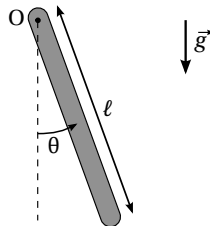
Dans les trois cas suivants, on a représenté la configuration d'équilibre du système ainsi qu'un état déformé. L'écart de la masse à sa position d'équilibre est notée  $\xi(t)$ . Tous les ressorts ont la même longueur à vide  $\ell_0$ .



Pour chacun des trois cas, établir l'équation différentielle satisfaite par  $\xi(t)$ .

### [13] Pendule pesant

Une barre cylindrique, de masse  $m$  et de longueur  $\ell$ , est accrochée à l'une de ses extrémités. Elle peut pivoter sans frottement autour d'un axe (Oz). On repère par  $\theta$  son déplacement angulaire par rapport à la verticale.



Le moment d'inertie de la barre par rapport à O est noté J. Son centre d'inertie se trouve en son milieu.

1. Montrer que l'angle  $\theta$  satisfait l'équation :

$$J\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mg\ell \sin \theta = 0.$$

2. Montrer que ce système admet deux positions d'équilibre, i.e. deux positions pour lesquelles le pendule peut rester immobile en l'absence de toute perturbation extérieure. Les représenter sur un schéma.
3. Supposons que l'on ait légèrement écarté le pendule de la position  $\theta = 0$ , et qu'on le lâche sans vitesse initiale à  $t = 0$ . On impose donc  $\theta(0) = \theta_0 \ll \pi$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

Linéariser l'équation différentielle dans la limite des petits angles,  $\theta \ll \pi$ . Déterminer  $\theta(t)$  et tracer son allure.

4. Supposons à présent que l'on ait légèrement écarté le pendule de la position  $\theta = \pi$ , et qu'on le lâche sans vitesse initiale à  $t = 0$ . On impose donc  $\theta(0) = \pi - \xi_0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ .  
On pose  $\xi(t) = \pi - \theta(t)$ , l'écart à la position d'équilibre  $\theta = \pi$ . Montrer que, dans la limite  $\xi \ll \pi$ , l'équation du mouvement se linéarise en :

$$J\ddot{\xi} - \frac{1}{2}mg\ell \xi = 0.$$

Déterminer  $\xi(t)$  et tracer son allure (noter que la solution obtenue ne reste valable que tant que  $\xi \ll \pi$ ).

5. Ces positions d'équilibre sont-elles stables? Instables?

Interpréter la stabilité en examinant l'effet de la pesanteur lorsque le pendule est légèrement décalé de sa position d'équilibre : le couple du poids tend-il à ramener le pendule vers l'équilibre ou à l'en éloigner? Comment cette différence se traduit-elle dans l'équation différentielle linéarisée?

## IV Différentielles et développements limités

Vous devez connaître parfaitement les développements limités suivants :

- |                                                               |                                                                 |
|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| • $\exp(\epsilon) = 1 + \epsilon + o(\epsilon)$               | • $\ln(1 + \epsilon) = \epsilon + o(\epsilon)$                  |
| • $\sin(\epsilon) = \epsilon + o(\epsilon)$                   | • $\frac{1}{1 + \epsilon} = 1 - \epsilon + o(\epsilon)$         |
| • $\cos(\epsilon) = 1 - \frac{\epsilon^2}{2} + o(\epsilon^2)$ | • $\sqrt{1 + \epsilon} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon + o(\epsilon)$ |
| • $\tan(\epsilon) = \epsilon + o(\epsilon)$                   | • $(1 + \epsilon)^\alpha = 1 + \alpha\epsilon + o(\epsilon)$    |

### Méthode : développements limités

On étudie par exemple  $f(x) = \frac{\exp(-\frac{x}{\ell})}{(x + \ell)^2}$  pour  $x \ll \ell$ .

- Chercher la quantité (sans dimension) qui est petite **devant 1** en valeur absolue : ici, c'est  $\epsilon = \frac{x}{\ell}$ .
- La faire apparaître dans l'expression :  $f(x) = \frac{1}{\ell^2} \frac{\exp(-\frac{x}{\ell})}{(1 + \frac{x}{\ell})^2}$ .
- On peut alors effectuer le développement limité à l'ordre voulu en  $\epsilon = \frac{x}{\ell}$ .

On connaît  $\frac{1}{(1+\epsilon)^2} = 1 - 2\epsilon + o(\epsilon)$  et  $e^{-\epsilon} = 1 - \epsilon + o(\epsilon)$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ , donc on obtient

$$f(x) = \frac{1}{\ell^2} (1 - 2\epsilon)(1 - \epsilon) + o(\epsilon) = \frac{1 - 3\epsilon}{\ell^2} + o(\epsilon) = \frac{1}{\ell^2} - \frac{3x}{\ell^3} + o\left(\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right).$$

#### [14] Développements limités (1)

Donner une approximation des expressions suivantes à l'aide d'un développement limité au premier ordre (ou au deuxième ordre si l'ordre 1 est nul).

1.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \ell^2}}$  pour  $|x| \ll \ell$

3.  $f(x) = \ln\left(\frac{\ell - x}{\ell + x}\right)$  pour  $x \ll \ell$

2.  $f(x) = \left(1 - e^{-\alpha(x-\ell)}\right)^2$  pour  $|x - \ell| \ll \frac{1}{\alpha}$

4.  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\ell}\right)$  pour  $|\ell - x| \ll \ell$

#### [15] Développements limités (2)

Même exercice.

1.  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+\ell}} - \frac{3}{\sqrt{\ell-x}}$  pour  $x \ll \ell$

4.  $f(x) = \frac{\cos(\alpha x)}{1 + \tan(\alpha x)}$  pour  $\alpha x \ll 1$

2.  $f(x) = \left(\frac{\ell}{x}\right)^3$  pour  $|x - \ell| \ll \ell$

5.  $f(x) = \frac{\ell^2}{x^2} \tan\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$  pour  $|x - \ell| \ll \ell$

3.  $f(x) = \frac{\ln(1 + \alpha x)}{\sqrt{\frac{1}{\alpha} + x}}$  pour  $\alpha x \ll 1$

#### Méthode : différentielle (fonction d'une variable)

Considérons une fonction  $f$  d'une variable  $x$  (réelle).

- *Rappel : formule de Taylor*

$$f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} \cdot \delta x + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x_0} \cdot (\delta x)^2 + \dots$$

On rappelle que  $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$  désigne (en physique) la dérivée de la fonction  $f$  prise en  $x = x_0$ .

- *Petite variation* Lorsque  $x$  varie d'une petite quantité  $\delta x$  autour de  $x_0$ , alors  $f$  varie de

$$\delta f = f(x_0 + \delta x) - f(x_0) \sim \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot \delta x.$$

Il s'agit simplement là du développement limité au premier ordre en  $\delta x$ .

- *Variation infinitésimale* Il arrive fréquemment, en physique, que l'on imagine une variation pouvant être rendue aussi petite que l'on veut. Mathématiquement, ceci correspond à  $\delta x \rightarrow 0$ . On parle alors de **variation élémentaire**, ou **infinitésimale**, que l'on note  $dx$ . Dans cette limite, le résultat précédent devient exact :

$$df = f(x_0 + dx) - f(x) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot dx.$$

Il s'agit simplement là de la définition de la dérivée.

- *Calcul différentiel* Les règles de calcul sur les différentielles sont donc les mêmes que sur les dérivées :  $d(f + g) = df + dg$ ,  $d(f \cdot g) = f dg + g df$ ,  $d[f(x^2)] = \frac{df}{dx} \cdot 2x dx$  etc.

Exemple : quelle est l'aire de la couronne comprise entre les cercles de rayons  $r$  et  $r + dr$  ?

$\rightarrow d\mathcal{A} = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = d[\pi r^2] = 2\pi r \cdot dr$ . Il s'agit d'un résultat exact dans la limite où  $dr \rightarrow 0$ .

## [16] Différentielles (1)

Exprimer la différentielle des fonctions suivantes.

1.  $f(x) = x^2 + 2$
2.  $f(x) = x \ln x$
3.  $f(x) = x^3 \exp(-\alpha x)$
4.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + \ell^2}$

## [17] Différentielles (2) : exemples physiques

1. Déterminer le volume compris entre deux cylindres concentriques, de même hauteur  $H$ , de rayons  $r$  et  $r + dr$ .
2. Déterminer le volume de la “coquille” sphérique comprise entre les sphères de rayons  $r$  et  $r + dr$ .
3. La dispersion optique dans le verre est bien décrite par la loi de Cauchy, qui permet d'exprimer l'indice optique sous la forme

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

avec  $\lambda$  la longueur d'onde dans le vide. Exprimer la variation d'indice  $dn$  sous une variation infinitésimale  $d\lambda$  de la longueur d'onde.

4. À basse altitude, on approxime la pression atmosphérique à une loi exponentielle  $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ , avec  $z$  l'altitude et  $H$  une constante. Evaluer la variation relative de pression,  $\frac{\delta P}{P}$ , lorsqu'on s'élève de 10 m. On prendra  $H = 8$  km.

## V Outils numériques

En physique-chimie, nous aurons recours à Python dans une optique un peu différente de celle du cours d'informatique commune : il s'agira d'utiliser l'outil informatique pour effectuer des calculs numériques. La bibliothèque dédiée est *numpy*, couplée à *matplotlib* pour le tracé de courbes. Ces deux bibliothèques peuvent par exemple être importées en tête du programme comme ceci :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

**Rappels sur les listes** En cours d'informatique, vous avez principalement recours aux *listes*.

- Création d'une liste :  $L = [1, 2, 3]$ .
- Concaténation de deux listes :  $L = [1, 2, 3] + [4, 5, 6]$  produit une liste unique  $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ .
- De même,  $L = [1, 2, 3]*2$  produit la liste  $[1, 2, 3, 1, 2, 3]$ .  
Par conséquent, les opérateurs  $+$  et  $*$  ne sont pas l'addition ni la multiplication terme à terme.
- Pour représenter une matrice, on aura recours à une liste de listes :  $L = [$

Pour représenter une matrice, on aura recours à une liste de listes :  $L = [[1, 2, 3], [4, 5, 6]]$ .

- Le nombre de lignes est  $\text{len}(L)$ , le nombre de colonnes est  $\text{len}(L[0])$ .
- Accéder à la première ligne se fait simplement par l'appel  $L[0]$ .
- Accéder au 3<sup>e</sup> élément de la deuxième ligne se fait par  $L[1][2]$ .
- Accéder à la première colonne n'est pas direct mais nécessite d'écrire une boucle. En compréhension :  $[L[i][0] \text{ for } i \text{ in range}(\text{len}(L))]$ .
- Pour multiplier par 2 tous les éléments, il faut obligatoirement avoir recours à des boucles. De même pour l'addition terme à terme de deux matrices, ou tout autre opération de ce type.
- La création d'une matrice de zéros nécessite obligatoirement le recours à une boucle :  $L = [[0]*5 \text{ for } i \text{ in range}(3)]$  va créer une matrice nulle de 3 lignes et 5 colonnes.

À cause des subtilités liées à la copie de listes sous Python, prendre garde au fait que  $[[0]*5]*3$  ne crée pas une véritable matrice de lignes indépendantes les une des autres.

**Type array de numpy** Pour effectuer des calculs numériques sur des jeux de données importants, le type *array* de *numpy* est plus performant et plus simple d'utilisation que les listes. Il faut bien être conscient des points communs et des différences avec les listes.

- Pour convertir une liste  $L$  en tableau :  $T = \text{np.array}(L)$ .
- Pour créer un tableau 2D (matrice) de 3 lignes et 5 colonnes rempli de zéros :  $T = \text{np.zeros}((3, 5))$ .
- Pour créer un tableau 1D de 100 flottants régulièrement espacés entre 0 et 15 (inclus) :  $\text{np.linspace}(0, 15, 100)$
- On accède au 3<sup>e</sup> élément de la deuxième colonne par  $T[1][2]$  ou  $T[1, 2]$ .
- On accède à la première ligne par  $T[0]$  (ou  $T[0, :]$ ). On accède directement à la première colonne par  $T[:, 0]$ .
- L'instruction  $T*2$  va multiplier par 2 tous les éléments du tableau  $T$ . De même, si  $T1$  et  $T2$  sont deux tableaux de même taille, l'opération  $T = T1 + T2$  effectue l'addition élément à élément ( $T[i, j]$  sera la somme  $T1[i, j] + T2[i, j]$ ). Les opérateurs  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$  prennent donc un sens très différent du cas des listes. On peut également appliquer une fonction mathématique sur chaque élément du tableau :  $\text{np.tan}(T)$  renverra un tableau dont chaque élément est la tangente de l'élément correspondant de  $T$ .

**Tracés de courbes** Supposons que l'on veuille tracer la courbe représentant  $f(x) = 2\exp(-3x)$  pour  $x \in [0, 10]$  :

```
X = np.linspace(0, 10, 1000)
Y = 2*np.exp(-3*X)
plt.figure()
plt.plot(X, Y)
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('f(x)')
plt.show()
```

**À revoir** Revoir dans votre cours de première année :

- la résolution d'une équation par méthode dichotomique,
- le calcul approché de la dérivée d'une fonction en un point,
- le calcul approché d'une intégrale sur un segment par la méthode des rectangles.

## [18] Manipulations élémentaires de tableaux

On souhaite générer les signaux temporels suivants :

$$a(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{10}\right) + 5,$$

$$b(t) = -\frac{3\pi}{5} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{10}\right),$$

1. Générer une liste de temps, notée `liste_t`, constituée de  $N = 5000$  flottants régulièrement espacés entre 0 et 100, sous la forme d'un tableau de *numpy*.
2. (a) Créer un tableau (objet de type `np.array`) de deux colonnes et 5000 lignes, dont la première colonne contient les valeurs de  $a(t)$  (pour  $t$  dans `liste_t`), et la deuxième colonne les valeurs de  $b(t)$ . Il est conseillé de commencer par créer un tableau de la bonne taille rempli de zéros, puis de remplacer les zéros par les éléments voulus (sans écrire de boucles).  
 (b) Comment obtenir la liste des 20 premières valeurs de  $b(t)$  ?  
 (c) Tracer le graphe de  $a(t)$  en fonction de  $t$ . Légender les axes.  
 (d) Ajouter sur le graphe la courbe de  $b(t)$  (dans une autre couleur). Légender les deux courbes.
3. (a) Évaluer *numériquement* la dérivée du signal  $a(t)$ , dans un tableau `DA`.  
 (b) En superposant les courbes, vérifiez que la dérivée ainsi calculée correspond bien au signal  $b(t)$  (attention, `DA` ne comporte normalement que  $N - 1$  valeurs!).

### [19] Freinage

U

ne voiture de masse  $M = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg}$ , lancée à  $\vec{v}_0 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \vec{u}_x$ , freine sur une route plate (selon la direction  $\vec{u}_x$ ). Elle est soumise à une force de frottement fluide  $-\lambda v^2 \vec{u}_x$  de la part de l'air, et à la force de freinage  $-f_0 \vec{u}_x$ . On cherche la distance au bout de laquelle elle s'immobilise.

1. On introduit  $\tau = \frac{m}{\sqrt{\lambda f_0}}$  et  $v_1 = \frac{\tau f_0}{m}$ . Vérifier que la vitesse obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{\tau v_1} - \frac{v_1}{\tau}.$$

On admet que la solution est :

$$v(t) = \frac{v_0 - v_1 \tan\left(\frac{t}{\tau}\right)}{1 + \frac{v_0}{v_1} \tan\left(\frac{t}{\tau}\right)}.$$

2. Compléter le programme Python ci-dessous pour tracer l'allure de  $v$  en fonction du temps.

```
from numpy import tan

# Paramètres en unités SI
v0 = 90e3/3600
tau = 9
v1 = 37

def v(t):
    # Renvoie la vitesse à l'instant t
    return ..... # A COMPLETER

# Tracé
T = np.linspace(0,8,1000)
V = ..... # A COMPLETER
plt.figure()
plt.plot(.....) # A COMPLETER
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('v(t) (m/s)')
plt.show()
```

3. Compléter le programme Python ci-dessous pour calculer l'instant  $t_{\text{arr}}$  au bout duquel la voiture s'immobilise.

```
def Temps_arret(t1,t2):
    # Recherche l'instant d'annulation de la vitesse entre les instants t1 et t2
    # Le résultat est donné avec une précision err
    err = 0.001
    g, d = ..... # A COMPLETER
    while d-g > err :
        m = ..... # A COMPLETER
        if v(m) == 0:
            return m
        elif v(g) * v(m) < 0:
            d = ..... # A COMPLETER
        else:
            g = ..... # A COMPLETER
    return (g+d)/2

tarr = ..... # A COMPLETER
```

4. On introduit  $X(t) = \int_0^t v(t') dt'$ . Écrire une fonction  $X(t)$  renvoyant une valeur approchée de cette intégrale, calculée par la méthode des rectangles. En déduire la distance d'arrêt, pour les paramètres fournis dans le script (vérifiez sous Python que vous trouvez une distance de 63 m).