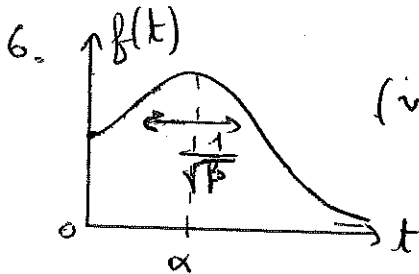
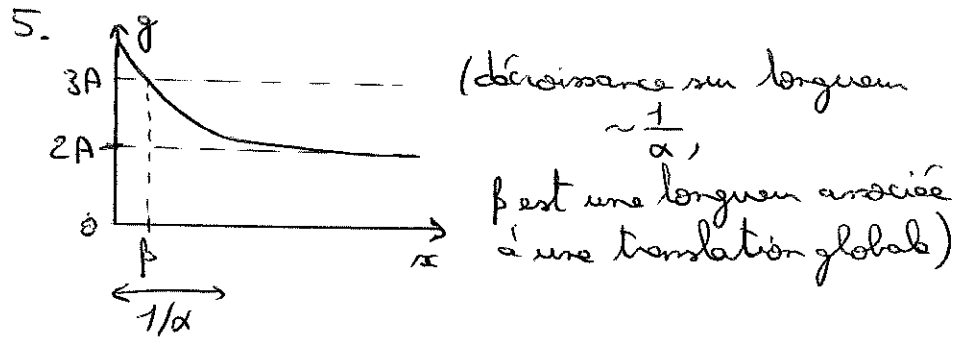
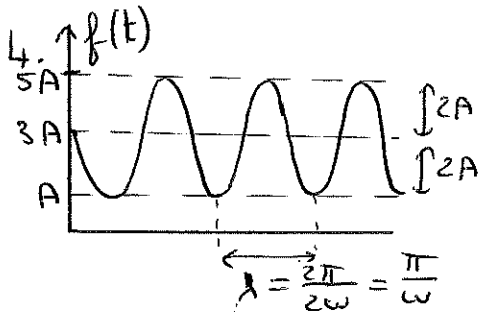
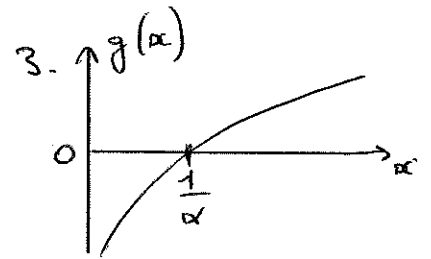
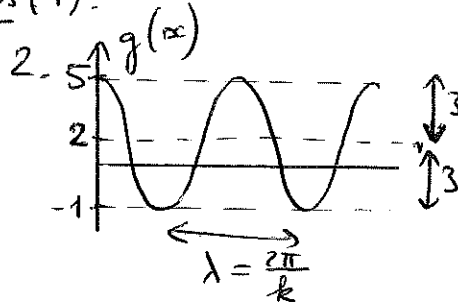
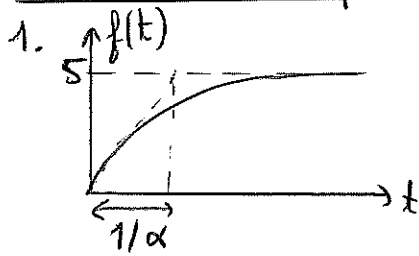


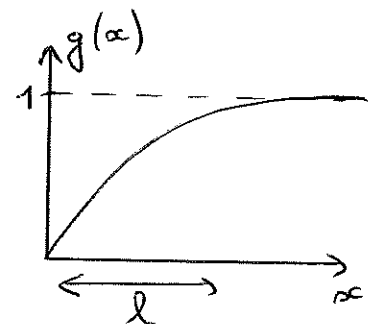
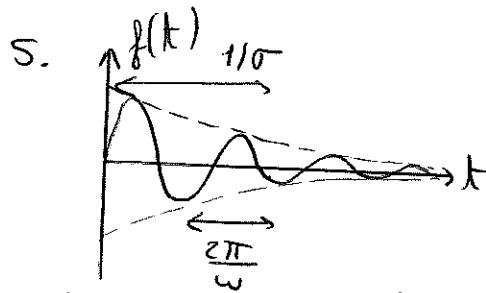
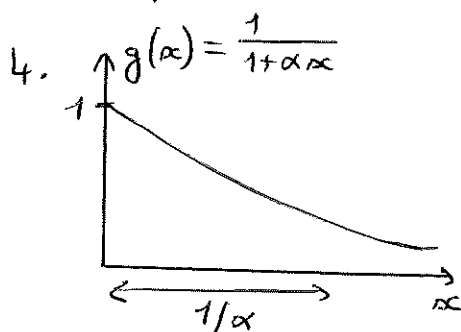
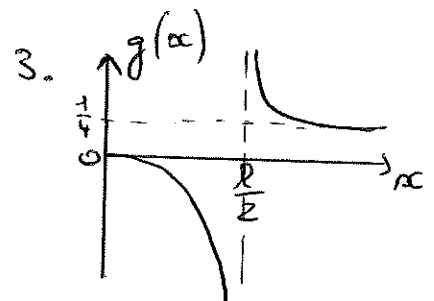
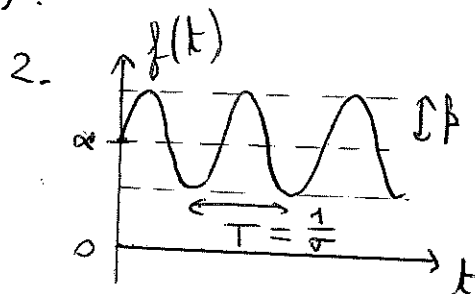
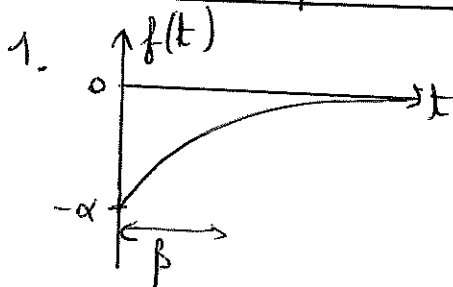
Réparation de la rentrée : réponses

(1)

Ex. 1: tracés qualitatifs (1).

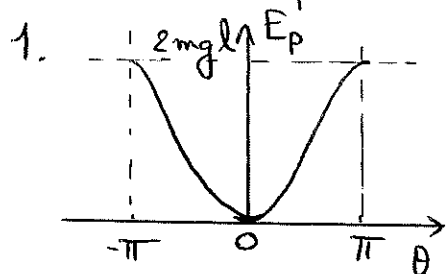


Ex. 2: tracés qualitatifs (2).

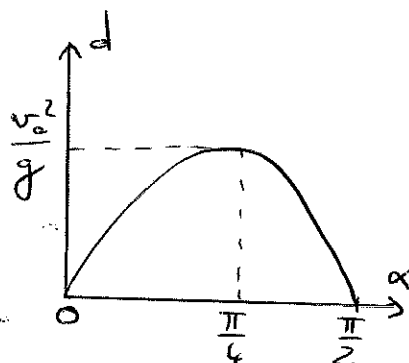
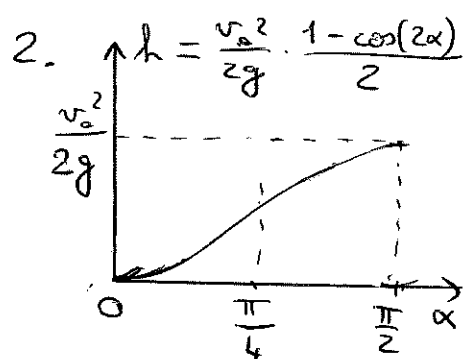


Ex. 3: tracés qualitatifs (3).

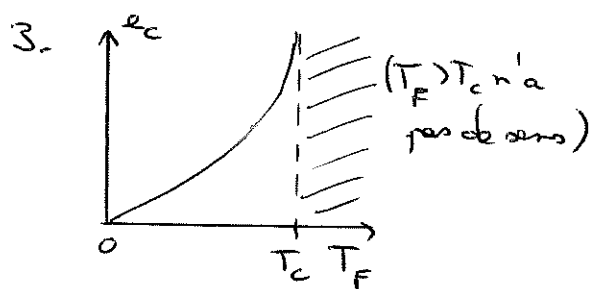
(2)



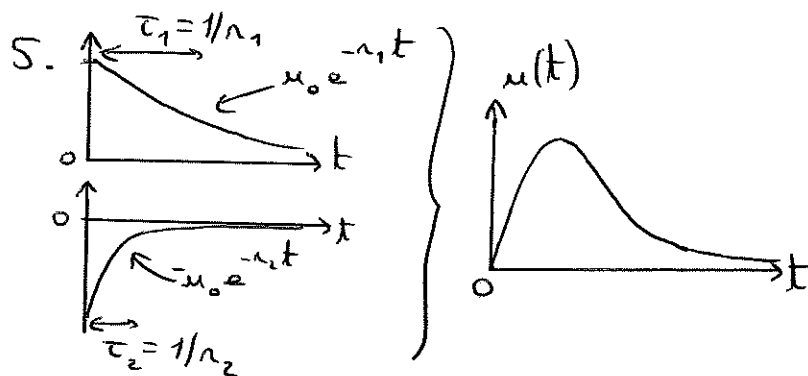
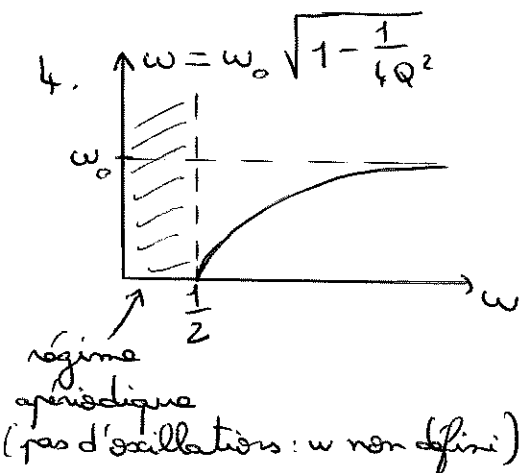
Position d'équilibre stable en $\theta = 0$.
Position d'équilibre instable en $\theta = \pi$.



Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (tir vertical):
portée nulle, hauteur max.
La portée est maximale
pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$.



$e_c \rightarrow +\infty$ pour $T_F \rightarrow T_c$.
(Pour un réfrigérateur, aucun problème
d'avoir $e_c > 1$).
Évidemment, $T_F = T_c$ n'est pas un réfrigérateur
très intéressant... Compromis à trouver.



Ex. 4: équation différentielles (1).

1. $[\alpha] \equiv T^{-2} \equiv [\beta]$. $\frac{d^2 f}{dt^2} - \beta f = \alpha \rightarrow f(t) = -\frac{\alpha}{\beta} + A e^{\sqrt{\beta} t} + B e^{-\sqrt{\beta} t}$.

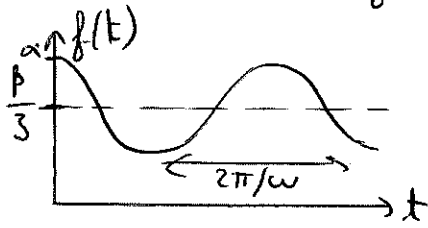
C.I.: $\begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow A + B = \frac{\alpha}{\beta} \\ f'(0) = 0 \Rightarrow \sqrt{\beta} (A - B) = 0 \end{cases}$

d'où $A = B = \frac{\alpha}{2\beta}$.

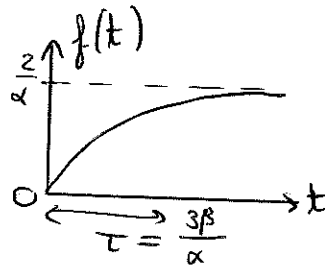
Donc $f(t) = \frac{\alpha}{\beta} [-1 + \cosh(\sqrt{\beta} t)]$.



2. $[T] \equiv T$, β sans dimension.
On doit trouver $f(t) = \frac{\beta}{3} + (\alpha - \frac{\beta}{3}) \cos(\omega t)$ avec $\omega = \frac{\sqrt{3}}{T}$.



3. $[\beta] \equiv T$, α sans dimension.
 $f(t) = \frac{2}{\alpha} [1 - \exp(-\frac{\alpha t}{3\beta})]$.

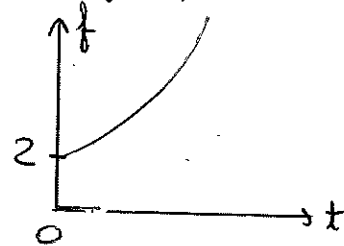


4. Attention, piège ... celle-ci n'est pas du même type! $[\alpha] \equiv T^{-2}$, $[\beta] \equiv T^{-1}$.

$$\frac{df}{dt} = \alpha t + \beta \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \beta t + A.$$

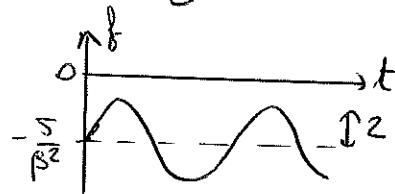
$$\text{C.I.: } f(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\text{Donc } f(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \beta t + 2.$$



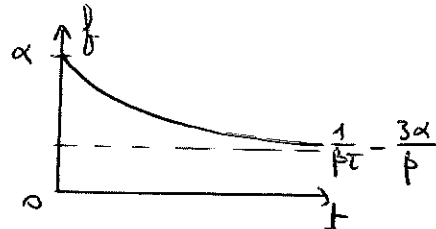
5. $[\alpha] \equiv T^2$, β sans dimension.

$$f(t) = 2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha}}\right) - \frac{5}{\beta^2}.$$



6. $[\alpha] \equiv [\beta] \equiv T^{-1}$, $[T] \equiv T$.

$$f(t) = \left(\frac{1}{\beta T} - \frac{3\alpha}{\beta}\right) (1 - e^{-\beta t}) + \alpha e^{-\beta t}.$$



Ex. 5: équations différentielles (2).

1. $[\beta] \equiv T^{-1}$, $[T] \equiv T$. $f(t) = \frac{5}{(\beta T)^2} [1 - \text{ch}\left(\frac{\beta t}{\sqrt{3}}\right)]$.

2. $[\alpha] \equiv T$, $[\beta] \equiv T^{-1}$. $f(t) = \frac{\alpha \beta}{\sqrt{2}} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{\alpha} t\right)$.

3. $[T] \equiv T$, $[\alpha] \equiv T^{-1}$. $f(t) = \frac{\alpha t^2}{2T} + \frac{3t}{T} + 4$.

4. $[\alpha] \equiv T$. $f(t) = \frac{2}{3} [1 - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{\alpha} t\right)]$.

5. $[\alpha] \equiv T$, $[\beta] \equiv T^{-1}$. $f(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2\alpha\beta}\right) (1 - e^{-2\beta t})$.

6. $\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\beta}{\alpha} t + A \Rightarrow f(t) = \frac{\beta}{2\alpha} t^2 + A t + B$.

C.I.: $\begin{cases} B = -2\beta \\ A = 0 \end{cases} \rightarrow f(t) = \frac{\beta}{2\alpha} t^2 - 2\beta$.

Ex. 6 : équations différentielles (3).

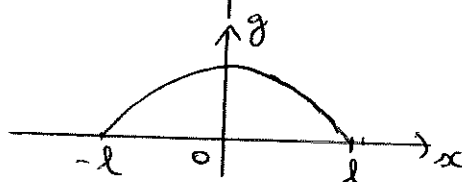
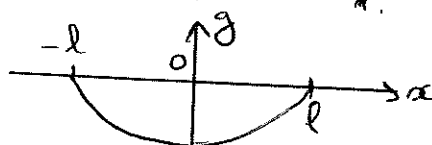
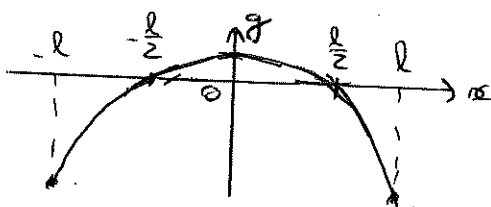
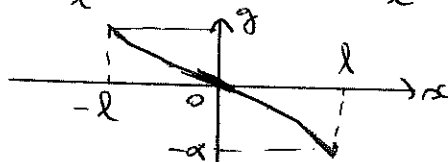
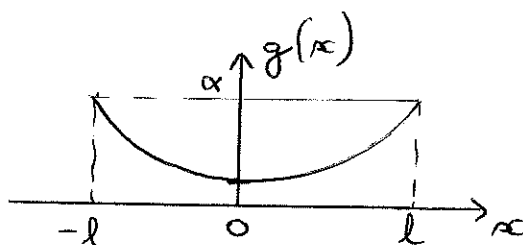
$$1. g(x) = \alpha \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{3}}{l}x\right)}{\operatorname{ch}(\sqrt{3})}$$

$$2. g(x) = -\alpha \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{3}}{l}x\right)}{\operatorname{sh}(\sqrt{3})}$$

$$3. g(x) = -\frac{4}{l^2}x^2 + \frac{1}{l^2}$$

$$4. g(x) = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{2x}{\alpha}\right)}{3 \operatorname{ch}\left(\frac{2l}{\alpha}\right)} - \frac{1}{3}$$

$$5. g(x) = \alpha \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right).$$

Ex. 7 : équations différentielles (4).

$$1. g(x) = 2 \left[1 - e^{+\frac{x}{l}} \right].$$

$$2. g(x) = \frac{1}{\alpha^2} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{2}l}\right) - 1 \right].$$

$$3. g(x) = -\frac{\alpha}{8} (l^2 - x^2) + \beta.$$

$$4. g(x) = -\frac{\alpha}{8} (l^2 - x^2) - \frac{\beta x}{l}.$$

Ex. 8 : systèmes électroniques.

$$(1) RC \frac{do}{dt} + o(t) = e(t)$$

$$(2) LC \frac{d^2 o}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{do}{dt} + o(t) = \frac{L}{R} \frac{de}{dt}.$$

Ex. 9 : réponse individuelle (1)

On a $\frac{do}{dt} + \frac{o}{RC} = \frac{E_0}{RC}$ pour $t > 0$, d'où $o(t) = E_0 + A e^{-t/(RC)}$
(avec A une constante).

C.I.: on exploite la continuité de la tension aux bornes du condensateur: (5)
 $s(0^-) = s(0^+)$
 $0 = E_0 + A.$

Donc $s(t) = E_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right].$

Ex. 10: fonction de transfert.

Les 3 méthodes doivent mener à $\underline{H}(j\omega) = \frac{j \frac{L}{R} \omega}{1 + j \frac{L}{R} \omega - LC\omega^2}.$

$|\underline{H}(\omega)| \rightarrow 0$ pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$: il s'agit d'un filtre passe-bande.

Ex. 11: oscillateurs mécaniques (1)

1. (a) P.F.D. de la masse: $m \ddot{z} = k(H - z - l_0) - mg$
 $\ddot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{k}{m}(H - l_0) - g.$

De même, $\ddot{u} + \frac{k}{m} u = \frac{k}{m} l_0 + g.$

(b) $z_{eq} = H - l_0 - \frac{mg}{k}$, $u_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k} > l_0$ comme attendu.

(c) $\xi = z - z_{eq} \rightarrow \ddot{\xi} + \frac{k}{m}(\xi + z_{eq}) = \frac{k}{m}(H - l_0) - g$
 $\ddot{\xi} + \frac{k}{m} \xi = 0.$ L'intérêt de repérer l'écart à la position d'équilibre est qu'il n'y a plus de 2nd membre!

2. (a) $m \ddot{x} = -k(x - l_0) - mg \sin \alpha$
 $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} l_0 - g \sin \alpha.$

On déduit $x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k}.$

Avec les C.I., $\begin{cases} A + l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k} = x_0 \\ B = 0 \end{cases}$

$\rightarrow x(t) = \left(-l_0 + \frac{mg \sin \alpha}{k} + x_0\right) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k}.$

(b) $E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mg x \sin \alpha + \frac{1}{2} k (x - l_0)^2.$

Il n'y a pas de forces non-conservatives, donc $E_m = \text{cte.}$:

$\frac{dE_m}{dt} = 0 \rightarrow m \ddot{x} \dot{x} + mg \sin \alpha \dot{x} + k (x - l_0) \dot{x} = 0.$

Ex. 12: oscillateurs mécaniques (2).

(a) La longueur du ressort 1 est $l_0 + \xi$; celle du ressort 2 est $l_0 - \xi$.

P.F.D. à la masse: $m \ddot{\xi} = -k_1(l_0 + \xi - l_0) + k_2(l_0 - \xi - l_0)$

(vérifier les signes physiquement! : si $\xi > 0$, le ressort 1 est étiré et rappelle la masse vers la gauche etc.)

d'où $m \ddot{\xi} = -(k_1 + k_2) \xi$

$$\ddot{\xi} + \frac{k_1 + k_2}{m} \xi = 0.$$

(b) $m \ddot{\xi} = -k_1(l_{1,eq} + \xi - l_0) + k_2(l_{2,eq} - \xi - l_0)$

$$= -(k_1 + k_2) \xi - k_1(l_{1,eq} - l_0) + k_2(l_{2,eq} - l_0).$$

À l'équilibre, $\xi = 0$ et $\ddot{\xi} = 0 \Rightarrow k_1(l_{1,eq} - l_0) = k_2(l_{2,eq} - l_0).$

(c) $m \ddot{\xi} = +k_1(l_{1,eq} - \xi - l_0) - k_2(l_{2,eq} + \xi - l_0) - mg$

en notant $l_{1,eq}$ et $l_{2,eq}$ les longueurs des 2 ressorts dans la situation d'équilibre.

À l'équilibre, $k_1(l_{1,eq} - l_0) - k_2(l_{2,eq} - l_0) - mg = 0,$

donc $\ddot{\xi} + \frac{k_1 + k_2}{m} \xi = 0.$

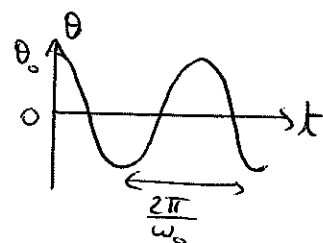
Ex. 13: pendule pesant.

1. Appliquer le T.P.C. par rapport à l'axe de rotation ---

2. Positions d'équilibre: $\begin{cases} \ddot{\theta} = 0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0 \\ \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi. \end{cases}$

3. Pour $\theta \ll \pi$, $\sin \theta \sim \theta$ et $\ddot{\theta} + \frac{mgl}{2J} \theta = 0.$

On aboutit à $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{2J}}.$

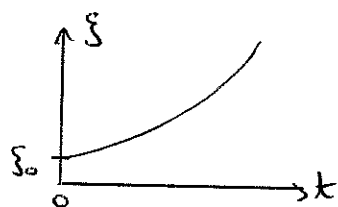


4. $\sin \theta = \sin(\pi - \xi) = \sin \pi \cos \xi - \cos \pi \sin \xi \sim -\xi.$

Donc $J \ddot{\xi} - \frac{mgl}{2} \xi = 0.$

$\xi(t) = A \cosh(\sigma_0 t) + B \sinh(\sigma_0 t)$ avec $\sigma_0 = \sqrt{\frac{mgl}{2J}}.$

Or $\begin{cases} \xi(0) = \xi_0 \\ \dot{\xi}(0) = 0 \end{cases}$, donc $\begin{cases} A = \xi_0 \\ B = 0 \end{cases}$. $\xi(t) = \xi_0 \cosh(\sigma_0 t).$



5. La position d'équilibre $\theta = 0$ est donc stable (le pendule oscille autour s'il en est un peu écarté), tandis que $\theta = \pi$ est instable. (7)

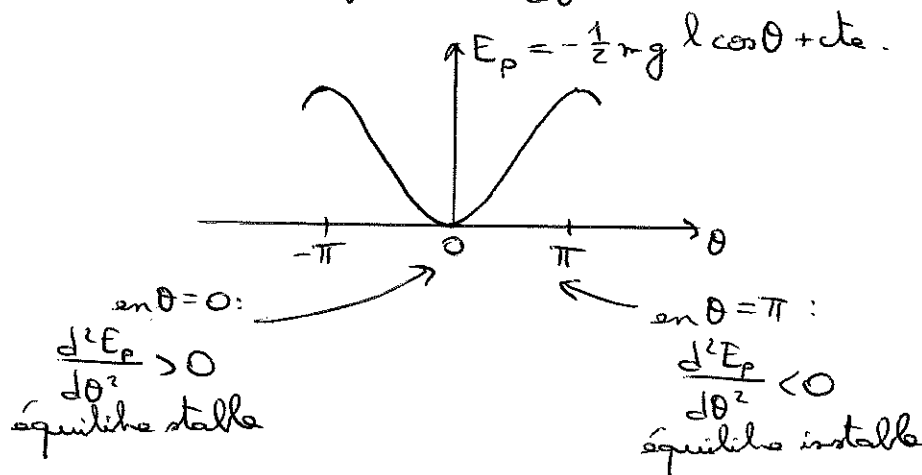
Interprétation: • autour de $\theta = 0$, déplacer un peu le pendule conduit à un moment $-\frac{1}{2} mgl \sin \theta$ pour le poids, qui ramène le pendule vers $\theta = 0$;
• autour de $\theta = \pi$, à l'inverse, le moment du poids écarte le pendule de $\theta = \pi$.

Dans l'équation différentielle linéarisée, c'est le signe relatif entre les termes en $\ddot{\theta}$ et en θ qui reflète la stabilité.

N.B.: raisonnement sur l'énergie: $E_m = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mgl \cos \theta + \text{cte.}$ $\xrightarrow{E_p}$

Positions d'équilibre: $\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \rightarrow \theta = 0 \text{ ou } \pi$.

Stabilité: voir le signe de $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}$.



Ex. 14: développements limités (1).

$$1. f(x) = \frac{\frac{x}{l}}{\sqrt{1 + (\frac{x}{l})^2}} \approx \frac{x}{l} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right) + o\left(\frac{x}{l}\right) \sim \frac{x}{l}.$$

$$2. f(x) = (1 - e^{-\varepsilon})^2 \text{ avec } \varepsilon = x/(x-l) \quad (|\varepsilon| \ll 1)$$

$$\sim (1 - (1-\varepsilon))^2 \sim \varepsilon^2$$

$$\sim x^2 (x-l)^2 \quad (\text{l'ordre 1 \u00e9tait nul, il a fallu passer \u00e0 l'ordre 2 pour trouver l'\u00e9quivalent}).$$

$$3. f(x) = \ln \left(\frac{1 - \frac{x}{l}}{1 + \frac{x}{l}} \right) \sim \ln \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right] \sim \ln \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \sim -\frac{2x}{l}.$$

$$4. \text{ On pose } \varepsilon = \frac{l-x}{l}, \text{ i.e. } x = l(1-\varepsilon).$$

$$f(x) = \ln(1-\varepsilon) \sim -\varepsilon, \text{ i.e. } f(x) \sim \frac{x-l}{l}.$$

Ex. 15: développements limités (2).

(8)

$$1. f(x) = \frac{3}{\sqrt{l} \sqrt{1+\frac{x}{l}}} - \frac{3}{\sqrt{l} \sqrt{1-\frac{x}{l}}} = \frac{3}{\sqrt{l}} \left(1 - \frac{x}{2l}\right) - \frac{3}{\sqrt{l}} \left(1 + \frac{x}{2l}\right) + o\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$f(x) \sim -\frac{3x}{l^{3/2}}.$$

$$2. f(x) = \left(\frac{l}{x-l+l}\right)^3 = \left(\frac{1}{1+\frac{x-l}{l}}\right)^3 \sim 1 - 3 \frac{x-l}{l}$$

$$f(x) \sim 4 - 3 \frac{x}{l}.$$

$$3. f(x) = \frac{\sqrt{x} \ln(1+\alpha x)}{\sqrt{1+(\alpha x)}} = \sqrt{x} (\alpha x) \left(1 - \frac{\alpha x}{2}\right) + o(\alpha x) \sim \alpha^{3/2} x.$$

$$4. f(x) \sim \frac{1}{1+\alpha x} \sim 1 - \alpha x.$$

$$5. f(x) = \frac{l^2}{(x-l+l)^2} \tan\left(\frac{l-x}{l}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{x-l}{l}\right)^2} \tan\left(\frac{l-x}{l}\right) \sim \frac{l-x}{l}.$$

Ex. 16: différentielles (1).

$$1. df = 2x dx.$$

$$2. df = \ln x \cdot dx + dx = (1 + \ln x) dx.$$

$$3. df = 3x^2 dx \cdot e^{-\alpha x} - \alpha x^3 e^{-\alpha x} dx = x^2 (3 - \alpha x) e^{-\alpha x} dx.$$

$$4. df = \frac{2x dx}{x^2 + l^2} - \frac{x^2 \cdot 2x dx}{(x^2 + l^2)^2} = \frac{2x l^2}{(x^2 + l^2)^2} dx.$$

Ex. 17: différentielles (2)

$$1. dV = \pi(n+dn)^2 H - \pi n^2 H = d(\pi n^2 H) = 2\pi n H dn.$$

$$2. dV = \frac{4}{3} \pi (n+dn)^3 - \frac{4}{3} \pi n^3 = d\left(\frac{4}{3} \pi n^3\right) = 4\pi n^2 dn.$$

$$3. dn = -\frac{B}{\lambda^3} d\lambda.$$

$$4. \text{Méthode longue: } dP = -\frac{P_0}{H} e^{-\frac{z}{H}} dz = -P(z) \frac{dz}{H} \text{ d'où } \frac{\delta P}{P} \sim -\frac{\delta z}{H}.$$

$$\text{Méthode rapide: } \ln P = \ln P_0 - \frac{z}{H} \rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{dz}{H}$$

$$\frac{\delta P}{P} \sim -\frac{\delta z}{H} = -1,25 \cdot 10^{-3}.$$