

1 Nombres réels et complexes

1.1 Majorant et minorant d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit $P \subset \mathbb{R}$.

$M \in \mathbb{R}$ est un majorant de P si $\forall x \in P, x \leq M$.

$m \in \mathbb{R}$ est un minorant de P si $\forall x \in P, m \leq x$.

1.2 Maximum et minimum d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit $P \subset \mathbb{R}$.

(i) $M \in \mathbb{R}$ est le maximum de P si $M \in P$ et $\forall x \in P, x \leq M$. On note alors $M = \max(P)$.

(ii) $m \in \mathbb{R}$ est le minimum de P si $m \in P$ et $\forall x \in P, m \leq x$. On note alors $m = \min(P)$.

☞ Toute partie même non vide de P n'admet pas nécessairement un maximum et/ou un minimum.

1.3 Borne supérieure et borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$

(i) Toute partie P *non vide et majorée* de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure notée $\sup(P)$: c'est le plus petit de ses majorants.

Caractérisation : $M = \sup(P) \iff \forall x < M, \exists y \in P, x < y \leq M$.

(ii) Toute partie P *non vide et majorée* de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure notée $\sup(P)$: c'est le plus petit de ses majorants.

Caractérisation : $M = \sup(P) \iff \forall x < M, \exists y \in P, x < y \leq M$.

1.4 Partie entière d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière de x , notée $[x]$, est définie par :

$$[x] \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \text{quad}[x] \leq x < [x] + 1.$$

1.5 Segments et intervalles de $\mathbb{R}$

(i) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. Le *segment* $[a; b]$ est défini par

$$[a; b] \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} = \{(1-t)a + tb, t \in [0; 1]\}.$$

(ii) Une partie P de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si,

$$\forall (a, b) \in P \text{ avec } a \leq b, \quad [a; b] \subset P.$$

1.6 Inégalité triangulaire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

1.7 Formulaire dans $\mathbb{C}$

$$\textcircled{1} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

$$\textcircled{2} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$$

$$\textcircled{3} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z|^2 = z \bar{z} \text{ et } |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Euler : } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ et } \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$\textcircled{5} \quad \text{De Moivre : } \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\cos(t) + i \sin(t))^n = \cos(nt) + i \sin(nt)$$

$$\textcircled{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z^n = 1 \iff \exists ! k \in [0; n-1], \quad z = \omega_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$$

$$\textcircled{7} \quad \mathbb{U}_n = \{\omega_k | k \in [0; n-1]\} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$$

1.8 Formulaire trigonométrique

$$\textcircled{1} \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\textcircled{2} \quad \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1, \\ \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\textcircled{3} \quad \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\textcircled{4} \quad \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}, \quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

$$\textcircled{5} \quad a \cos(t) + b \sin(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \varphi) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

1.9 Équation du second degré à coefficients réels

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et (E) : $ax^2 + bx + c = 0$.

Soit $\Delta \stackrel{\text{déf.}}{=} b^2 - 4ac$.

$$\textcircled{1} \quad \text{Si } \Delta > 0, \text{ alors } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ racines réelles distinctes.}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Si } \Delta = 0, \text{ alors } x = \frac{-b}{2a}, \text{ racine réelle double.}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Si } \Delta < 0, \text{ alors } x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \text{ racines complexes conjuguées.}$$

1.10 Équation du second degré à coefficients complexes

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et (E) : $az^2 + bz + c = 0$.

Soit $\Delta \stackrel{\text{déf.}}{=} b^2 - 4ac$ et δ tel que $\delta^2 = \Delta$

$$\textcircled{1} \quad \text{Si } \Delta \neq 0 \text{ alors } z = \frac{-b \pm \delta}{2a}, \text{ racines distinctes.}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Si } \Delta = 0, \text{ alors } z = \frac{-b}{2a}, \text{ racine double.}$$

1.11 Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit

$$\begin{cases} a + b = S \\ ab = P \end{cases} \iff \begin{cases} a \text{ et } b \text{ sont les solutions de} \\ z^2 - Sz + P = 0. \end{cases}$$

1.12 Coefficients binomiaux, formule du binôme

① $\binom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir p éléments distincts parmi n sans tenir compte de l'ordre. C'est aussi le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

$$\textcircled{2} \quad \binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n, \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \text{ relation de Pascal : } \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Formule du binôme de Newton : } \forall (a, b) \in \mathbb{K}^2, \quad (a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

2 Suites et sommes de référence

2.1 Suites arithmétiques

① La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est *arithmétique de raison* $r \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} - u_n = r.$$

On notera que la raison r est indépendante de l'indice n .

② Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.

$$\bullet \forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r;$$

$$\bullet \forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^n u_k = \frac{(n - n_0 + 1)(u_{n_0} + u_n)}{2},$$

$$\text{alias : } \frac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

2.2 Suites géométriques

① La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est *géométrique de raison* $q \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

On notera que la raison q est indépendante de l'indice n .

② Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

$$\bullet \forall n \geq n_0, \quad u_n = q^{n-n_0} u_{n_0};$$

$$\bullet \forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^n u_k = \begin{cases} u_{n_0} \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n - n_0 + 1)u_{n_0} & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

$$\text{alias : } (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

$$\bullet \text{ Si } u_{n_0} \neq 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} \text{sign}(u_{n_0}) \times (\infty) & \text{si } q > 1 \\ u_{n_0} & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{sinon} \end{cases}$$

2.3 Suites arithmético-géométriques

① La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est *arithmético-géométrique* si, et seulement si,

$$\exists a \neq 1, \exists b \neq 0, \forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} = au_n + b \quad (\mathcal{R})$$

On notera que les paramètres a et b sont indépendants de l'indice n .

② Comme $a \neq 1$, il existe un unique réel ℓ tel que $(\mathcal{E}) : \quad \ell = a\ell + b.$

$$(\mathcal{R}) - (\mathcal{E}) \text{ donne : } \forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell).$$

La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a , de premier terme $u_{n_0} - \ell$, et on a :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n = a^{n-n_0}(u_{n_0} - \ell) + \ell.$$

③ Deux interprétations pour ℓ . D'une part, la suite $(\ell)_{n \geq n_0}$ est l'unique suite constante vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$. D'autre part (lorsque $u_{n_0} \neq \ell$), la suite u converge si, et seulement si, $a \in]-1; 1[$. Et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

① La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ vérifie une *relation de récurrence linéaire d'ordre 2* si, et seulement si,

$$\exists a \in \mathbb{K}, \exists b \in \mathbb{K}^*, \forall n \geq n_0, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (\mathcal{R}).$$

On notera que les paramètres a et b sont indépendants de l'indice n .

② **Théorème dans $\mathbb{R}$, i.e.** quand $(a, b, u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in \mathbb{R}^4$.

Soit $(\mathcal{E})$ l'équation caractéristique associée à la relation $(\mathcal{R})$:

$$(\mathcal{E}) \quad x^2 - ax - b = 0.$$

• *Premier cas* : $(\mathcal{E})$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 .

$$\text{Alors : } \exists !(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$

• *Deuxième cas* : $(\mathcal{E})$ possède une unique racine réelle r .

$$\text{Alors : } \exists !(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n = (\alpha + \beta n)r^n.$$

• *Troisième cas* : $(\mathcal{E})$ ne possède pas de racine réelle mais deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$.

$$\text{Alors : } \exists !(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n = (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))r^n.$$

③ **Théorème dans $\mathbb{C}$, i.e.** quand $(a, b, u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in \mathbb{C}^4$.

Soit $(\mathcal{E})$ l'équation caractéristique associée à la relation $(\mathcal{R})$:

$$(\mathcal{E}) \quad x^2 - ax - b = 0.$$

- *Premier cas* : $(\mathcal{E})$ possède deux racines complexes distinctes r_1 et r_2 .

Alors : $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.

- *Deuxième cas* : $(\mathcal{E})$ possède une unique racine complexe r .

Alors : $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n = (\alpha + \beta n)r^n$.

2.5 Sommes finies de référence

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \textcircled{2} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \textcircled{3} \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2;$$

$$\textcircled{4} \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} a_i a_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

2.6 Gestion des sommes doubles

Cas d'indices indépendants

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n u_{i,j} \right) = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m u_{i,j} \right)$$

Cas d'indices dépendants

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^i u_{i,j} \right) = \sum_{1 \leq j \leq i \leq m} u_{i,j} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=j}^m u_{i,j} \right)$$

3 Théorèmes de première année sur les suites

3.1 Suite bornée, minorée, majorée

Notez que dans les définitions suivantes, les réels B , m et M sont indépendants de l'indice (muet) n et ne dépendent que de la suite u considérée.

- ① La suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *bornée* si, et seulement si,

$$\exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq B.$$

- ② La suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *minorée* si, et seulement si,

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n.$$

- ③ La suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *majorée* si, et seulement si,

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

- ④ La suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, elle est à la fois minorée et majorée.

3.2 Définition de la convergence d'une suite

La suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers le scalaire ℓ si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

3.3 Corollaire immédiat pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

À savoir justifier.

$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ si, et seulement si,

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } a < \ell < b, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad a < u_n < b.$$

3.4 Unicité de la limite

Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell'$ alors $\ell = \ell'$.

3.5 Limites infinies

La suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si, et seulement si,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n \geq M.$$

On écrit alors : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

La suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si, et seulement si,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n \leq M.$$

On écrit alors : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

3.6 Théorème de convergence monotone

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite **croissante**.

u est convergente si, et seulement si, u est majorée.

u diverge vers $+\infty$ si, et seulement si, u n'est pas majorée.

On notera que, pour une suite u croissante, « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ » a toujours un sens.

3.7 Suites extraites

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.

- ① Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application **strictement croissante**.

La suite $(u_{\varphi(n)})$ est appelée *suite extraite* de la suite u . La fonction φ est appelée *fonction extractrice*.

- ② Les exemples les plus fréquents de suites extraites de u sont les suites (u_{n+1}) , (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

- ③ La suite u converge vers le scalaire ℓ si, et seulement si, toute suite extraite de u converge vers ℓ .

- ④ La suite u converge vers le scalaire ℓ si, et seulement si, les deux suites extraites de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ .

On utilise fréquemment ④ ou ③ pour justifier qu'une suite diverge.

3.8 Théorème des suites adjacentes

- Deux suites u et v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont dites *adjacentes* si

- ① l'une croît,
- ② l'autre décroît,
- ③ la suite $v - u$ converge vers 0.

- Si les suites u et v sont adjacentes, alors elles sont convergentes, vers une même limite.

De plus, si u croît, v décroît et $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, alors

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad u_m \leq \ell \leq v_n.$$

3.9 Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$, i.e. a est un point de I ou une borne de I , éventuellement égale à $-\infty$ ou $+\infty$.

Alors f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ de limite a , la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ .

4 Théorèmes d'analyse de première année

4.1 Théorème de Rolle

Soit $a < b$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors : $\exists c \in]a; b[, \quad f'(c) = 0$.

4.2 Théorème des accroissements finis

Soit $a < b$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

Alors : $\exists c \in]a; b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

4.3 Inégalité des accroissements finis dans $\mathbb{R}$

Soit $a < b$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

① On suppose qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall x \in]a; b[, m \leq f'(x) \leq M$.

Alors : $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

② On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in]a; b[, |f'(x)| \leq M$.

Alors : $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

4.4 Inégalité des accroissements finis dans $\mathbb{C}$

Soit $a < b$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$, continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in]a; b[, |f'(x)| \leq M$.

Alors : $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

4.5 Théorème de la limite de la dérivée

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Si $f'(x)$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) en a , alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers ℓ quand x tend vers a .

En particulier, si ℓ est finie, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

4.6 Théorème fondamental de l'analyse

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors $F : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en a .

4.7 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

4.8 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On suppose qu'il existe une constante M telle que $\forall x \in I, |f^{(n+1)}| \leq M$. Alors

$$\forall x \in I, \left| f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \right| \leq \frac{M |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

4.9 Formule de Taylor-Young

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + o((x-a)^n)$$

$$\forall h \text{ tq } a+h \in I, f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + o(h^n)$$

4.10 Sommes de Riemann

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{Soit : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \text{ et } S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Si f est continue sur $[a; b]$, alors :

$$s_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

4.11 Convexité

① f est convexe sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

② Si f est convexe, alors $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes.

③ Si f est deux fois dérivable, alors f est convexe si, et seulement si, $f'' \geq 0$.

5 Équations différentielles

1. Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1

Soit $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues.

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}) \quad y' + a(t)y &= b(t), \\ (\mathcal{E}_0) \quad y' + a(t)y &= 0.\end{aligned}$$

Résolution de l'équation homogène

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est

$$E_0 = \{t \mapsto ke^{-A(t)}, k \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}(t \mapsto e^{-A(t)})$$

où A désigne une primitive de a sur I .

☞ Si on ne sait pas expliciter A (i.e primitiver a), on peut écrire en vertu du théorème fondamental de l'analyse

$$E_0 = \left\{ t \mapsto k \exp \left(- \int_{t_0}^t a(u) du \right), k \in \mathbb{K} \right\}$$

2. Solutions de l'équation avec second membre - Principe de superposition

Soit $z : I \rightarrow \mathbb{K}$ une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$. Alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$E = \{y + z, y \text{ solution de } (\mathcal{E}_0)\}.$$

3. Recherche d'une solution particulière par la méthode de la « variation de la constante »

On cherche une solution $z : I \rightarrow \mathbb{K}$ de la forme

$$z(t) = k(t)e^{-A(t)}.$$

☞ Si on ne se trompe, les « $k(t)$ » se simplifient et on doit obtenir

$$k'(t) = b(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a(u) du \right)$$

Il reste à primitiver pour obtenir une solution.

4. Théorème de Cauchy linéaire

Soit $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I .

5. Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $c : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue.

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}) \quad y'' + ay' + by &= c(t), \\ (\mathcal{E}_0) \quad y'' + ay' + by &= 0.\end{aligned}$$

L'équation caractéristique associée à $(\mathcal{E}_0)$ est

$$(\mathcal{EC}) \quad z^2 + az + b = 0.$$

Soit $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant.

Résolution dans $\mathbb{C}$

- Si $\Delta \neq 0$, soit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les solutions de $(\mathcal{EC})$.

$$\begin{aligned}E_0 &= \{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda_1 t}, t \mapsto e^{\lambda_2 t}).\end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$, soit λ la solution de $(\mathcal{EC})$.

$$\begin{aligned}E_0 &= \{t \mapsto (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda t}, t \mapsto t e^{\lambda t}).\end{aligned}$$

Résolution dans $\mathbb{R}$

- Si $\Delta > 0$, soit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les solutions de $(\mathcal{EC})$.

$$\begin{aligned}E_0 &= \{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda_1 t}, t \mapsto e^{\lambda_2 t}).\end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$, soit λ la solution de $(\mathcal{EC})$.

$$\begin{aligned}E_0 &= \{t \mapsto (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda t}, t \mapsto t e^{\lambda t}).\end{aligned}$$

- Si $\Delta < 0$, soit $\lambda = a \pm ib$ une solution de $(\mathcal{EC})$.

$$\begin{aligned}E_0 &= \{t \mapsto (c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt)) e^{at}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(t \mapsto \cos(bt) e^{at}, t \mapsto \sin(bt) e^{at}).\end{aligned}$$

6. Solutions de l'équation avec second membre - Principe de superposition

Soit $z : I \rightarrow \mathbb{K}$ une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$. Alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$E = \{y + z, y \text{ solution de } (\mathcal{E}_0)\}.$$

7. Seconds membres particuliers

☞ **Second membre** $c : t \mapsto Ae^{\lambda t}$ avec $A \in \mathbb{K}$.

- Si λ non racine de $(\mathcal{EC})$, on cherche une solution du type $t \mapsto Be^{\lambda t}$.
- Si λ racine simple de $(\mathcal{EC})$, on cherche une solution du type $t \mapsto Bte^{\lambda t}$.
- Si λ racine double de $(\mathcal{EC})$, on cherche une solution du type $t \mapsto t^2 e^{\lambda t}$.

☞ **Second membre** $c : t \mapsto A \cos(\omega t)$ ou $c : t \mapsto A \sin(\omega t)$

On suppose ni $i\omega$ ni $-i\omega$ solutions de $(\mathcal{EC})$.

Alors il existe (λ, μ) tel que $t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ soit solution de $(\mathcal{E})$.

8. Théorème de Cauchy linéaire

Soit $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in I$, $(y_0, y'_0) \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I .