

Exercice 1 Limites classiques

Déterminer les limites des expressions suivantes au point indiqué quand elles existent :

- a) $\frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$ en 4 b) $x + \sqrt{x^2 - 1}$ en $-\infty$ c) $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0
d) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$ e) $x \sin \frac{1}{x}$ en $+\infty$ f) $x \sin x$ en $+\infty$
g) $\sin x \sin \frac{1}{x}$ en 0 h) $\frac{\sin x}{x^x}$ en $-\infty$ i) $x \left[\frac{1}{x}\right]$ en $+\infty$
j) $x \left[\frac{1}{x}\right]$ en 0 k) $\frac{x^x}{[x]^{[x]}}$ en $+\infty$ l) $\cos x \cos \frac{1}{x}$ en 0
m) $x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ en $+\infty$ n) $\frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1}$ en 1 o) $\frac{\sqrt[a]{x} - \sqrt[a]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ en $a > 0$

Solution (Ex.1 – Limites classiques)

a) $\forall x \neq 4, \frac{x^2 - x - 12}{x - 4} = \frac{(x - 4)(x + 3)}{x - 4} = x + 3 \xrightarrow{x \rightarrow 4} 7.$

b) $\forall x < -1, f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x + \sqrt{x^2 - 1} = x + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$

donc $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x \frac{1}{2x^2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0.$

c) • Version quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

• Version développement limité :

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{(1 + x/2 + o(x)) - (1 - x/2 + o(x))}{x} = 1 + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

d) $x \ln \left(1 - \frac{a}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \times \frac{-a}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -a$ donc $x \ln \left(1 - \frac{a}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -a.$

Par composition par exp : $\left(1 - \frac{a}{x}\right)^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-a}.$

e) $x \sin \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$

f) Soit $f : x \mapsto x \sin x.$

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n\pi) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc f diverge (sans limite) en $+\infty.$

g) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|\sin x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |\sin x|$ et $\lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0$, donc $\sin x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par encadre-

ment.

h) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left|\frac{1}{x}\right| = 0$, donc $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ par encadrement.

i) $\forall x > 1, \left[\frac{1}{x}\right] = 0$, donc $x \left[\frac{1}{x}\right] = 0$. Donc $x \left[\frac{1}{x}\right] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$

j) $\forall x \in]0; +\infty[, x\left(\frac{1}{x} - 1\right) \leq x \left[\frac{1}{x}\right] \leq x \frac{1}{x}$ donc $1 - \frac{1}{x} \leq x \left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$. Par encadrement, $x \left[\frac{1}{x}\right] \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$

k) Comme $x \mapsto x^x$ croît très vite vers $+\infty$, le petit écart entre $[x]$ et x peut ne pas être insignifiant...

Soit $f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{x^x}{[x]^{[x]}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{n^n}{n^n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n + 1/2) = \frac{(n + 1/2)^{n+1/2}}{n^n} \geq \frac{n^{n+1/2}}{n^n} \geq \sqrt{n}$$

donc par comparaison $f(n + 1/2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$

f n'admet pas de limite en $+\infty.$

l) $\cos \frac{1}{2\pi n} \cos(2\pi n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $\cos \frac{1}{\pi n + \pi/2} \cos(\pi n + \pi/2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$

$\cos x \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en $+\infty.$

m) $e^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc $x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1$

n) $\forall x \neq 1, \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1} = \frac{\sqrt{x(x-1)^2}}{x - 1} = \frac{|x-1|\sqrt{x}}{x-1} = \text{sign}(x-1)\sqrt{x}.$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1} = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1} = 1.$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1}$ n'existe pas.

o) $\sqrt[m]{\frac{x}{a}} - 1 = \sqrt[m]{1 + \left(\frac{x}{a} - 1\right)} - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{m} \left(\frac{x}{a} - 1\right) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{x - a}{ma}$ donc

$$\frac{\sqrt[a]{x} - \sqrt[a]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt[a]{a} \left(\sqrt[m]{\frac{x}{a}} - 1\right)}{\sqrt[a]{a} \left(\sqrt[n]{\frac{x}{a}} - 1\right)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{\sqrt[a]{a} \frac{x - a}{ma}}{\sqrt[a]{a} \frac{x - a}{na}} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{n \sqrt[a]{a}}{m \sqrt[a]{a}}$$

Exercice 2 Convergence

1. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de

a) $\ln(n+1) - \ln(n)$; b) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

2. Soit u une suite réelle. *Frai ou faux ?*

a) $\left(u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\right) \Rightarrow (u \text{ converge}) ?$

b) $(u \text{ converge}) \Rightarrow \left(u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\right) ?$

Solution (Ex.2 – Convergence)

1. a) $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

b) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1 \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. a) Faux : les suites $(\ln(n))_{n \geq 1}$ ou $(\sqrt{n})_{n \geq 0}$ sont deux contre-exemples.

b) Vrai : car (u_{n+1}) est une suite extraite de la suite u , donc converge vers la même limite que u .

Exercice 3 Équivalences et signes

1. On considère deux suites réelles u et v telles que v soit non nulle à partir d'un certain rang.

On suppose que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Montrer qu'à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solution (Ex.3 – Équivalences et signes)

1. Soit n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, \quad v_n \neq 0$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, en prenant la définition de la limite avec $\varepsilon = 1/2$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que :

$$\forall n \geq n_1, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}.$$

Alors : $\forall n \geq n_1, \quad 0 < \frac{u_n}{v_n}$.

Donc pour tout $n \geq n_1$, u_n et v_n sont de même signe.

2. $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{6n^3}$.

À partir d'un certain rang, u_n est strictement négatif.

Exercice 4 Fonctions bornées

Soit f une fonction réelle continue sur $[0; +\infty[$.

1. a) On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe et est finie. Montrer que f est bornée.

b) f atteint-elle nécessairement un maximum global ?

2. On suppose que f est nulle en 0 et tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que f atteint un maximum global et un minimum global.

Solution (Ex.4 – Fonctions bornées)

1. a) Soit $\ell \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Par la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq A, |f(x) - \ell| \leq 1$, donc $\forall x \geq A, \ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1$: f est bornée sur $[A; +\infty[$.

Comme f est continue sur $[0; A]$ qui est fermé borné, f est aussi bornée sur $[0; A]$.

Ainsi, f est bornée sur $[0; +\infty[$.

b) $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{x+1}$ est continue strictement croissante avec

$$f([0; +\infty[) = \left[f(0); \lim_{+\infty} f \right] = [-1; 0[\text{ n'atteint pas de maximum global.}$$

2. • 1-er cas : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq 0$. Alors le maximum global de f est 0, atteint en 0.

• 2-ème cas : $\exists a \in]0; +\infty[, f(a) > 0$. Alors par la définition de la limite :

$$\exists b \in]a; +\infty[, \forall x \geq b, f(x) \leq f(a).$$

Comme f est continue sur $[0; b]$, f y atteint un maximum M au moins égal à $f(a)$ (car $a \in [0; b]$). De plus, sur $[b; +\infty[$, f est majorée par $f(a)$ donc par M .

Donc f atteint un maximum global M sur $[0; +\infty[$.

• On raisonne de façon analogue pour justifier l'existence d'un minimum global.

Variante :

On considère la fonction $g : [0; \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(\tan(x)) & \text{si } x \in [0; \pi/2[\\ 0 & \text{si } x = \pi/2 \end{cases}$. Elle

est continue sur $[0; \pi/2]$ donc bornée et atteint ses bornes. Et on passe à f sans problème : les extremums de f sur $[0; +\infty[$ sont ceux de g sur $[0; \pi/2]$...

Exercice 5 Accroissements écrasés

Soit $\alpha \in]1; +\infty[$ un réel fixé.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(u) - f(v)| \leq |u - v|^\alpha \quad (\#).$$

On pourra commencer par montrer qu'une telle fonction est dérivable...

Solution (Ex.5 – Accroissements écrasés)

Soit $v \in \mathbb{R}$. Alors : $\forall u \neq v, \left| \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \right| \leq |u - v|^{\alpha-1}$.

Par encadrement, comme $\alpha - 1 > 0$, $\frac{f(u) - f(v)}{u - v} \xrightarrow{u \rightarrow v} 0$: f est dérivable en v avec $f'(v) = 0$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle, donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, si f est constante, alors f vérifie (#).

Ainsi, les fonctions vérifiant (#) sont exactement les fonctions constantes.

Exercice 6 Rolle sur des intervalles non bornés

1. Soit $f : [0; +\infty[$ une fonction dérivable.

On suppose que $f(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- Montrer que $g : [0; \pi/2[, x \mapsto f(\tan(x))$ est dérivable et peut être prolongée en une fonction continue sur $[0; \pi/2]$.
 - En déduire qu'il existe $c \in]0; +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. a) Énoncer et démontrer une propriété analogue pour une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant la même limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b) En est-il de même si cette limite commune est infinie ?

Solution (Ex.6 – Rolle sur des intervalles non bornés)

1. a) Comme $\tan([0; \pi/2[) = [0; +\infty[$, g est dérivable par composition de fonctions dérivables.

Donc g est continue sur $[0; \pi/2[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow \pi/2} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe et est finie : c'est $f(0)$. Donc g peut être prolongée en une fonction continue sur $[0; \pi/2]$ en posant $g(\pi/2) = f(0)$.

- b) g étant continue sur $[0; \pi/2]$ et dérivable sur $[0; \pi/2[$, avec $g(0) = g(\pi/2) = f(0)$, il existe, d'après le théorème de Rolle, $a \in]0; \pi/2[$ tel que $g'(a) = 0$.

Or : $\forall x \in]0; \pi/2[, g'(x) = f'(\tan(x)) \times (1 + \tan^2 x)$.

Donc : $f'(\text{Arctan}(a))(1 + \tan^2 a) = 0$, et $f'(\tan(a)) = 0$.

Or : $c \stackrel{\text{déf}}{=} \tan(a) \in]0; +\infty[$. Donc il existe bien $c \in]0; +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. a) • Énoncé :

soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant la même limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

• Preuve :

On reprend la même méthode que précédemment avec :

$$g : [-\pi/2; \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(\tan(x)) & \text{si } x \in]-\pi/2; \pi/2[, \\ \lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

g est continue sur $[-\pi/2; \pi/2]$ et dérivable sur $] -\pi/2; \pi/2[$ avec $g(-\pi/2) = g(\pi/2)$, donc par le théorème de Rolle il existe $a \in]-\pi/2; \pi/2[$ tel que $g'(a) = 0$. Et du coup $f'(\tan(a)) = 0$.

- b) Il en est de même si cette limite commune est infinie. Supposons pour fixer les idées que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]-\infty; 0[$ tel que $f(a) = f(0) + 1$ et il existe $b \in]0; +\infty[$ tel que $f(b) = f(0) + 1$. Le théorème de Rolle sur $[a; b]$ montre qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Remarque : un raisonnement analogue via le théorème des valeurs intermédiaires aurait pu permettre de démontrer les propriétés précédente sans utiliser $\tan \dots$ dont le mérite est d'envoyer bijectivement et de façon $\mathcal{C}^\infty$ des intervalles bornés sur des intervalles non bornés.

Exercice 7 Dérivable... lipschitzienne

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

1. Dans cette question, on suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [0; 1], \quad |f(x)| \leq k|x|.$$

2. Dans cette question, on suppose f dérivable.

- Soit $g :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. Montrer que g est prolongeable en une fonction continue sur $[0; 1]$.
- En déduire : $\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [0; 1], \quad |f(x)| \leq k|x|$.

Solution (Ex.7 – Dérivable... lipschitzienne)

1. Comme f' est continue sur le segment fermé borné $[0; 1]$, $|f'|$ est bornée : $\exists k \in \mathbb{R}, \forall t \in [0; 1], |f'(t)| \leq k$.

Soit $x \in [0; 1]$ quelconque. L'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur le segment $[0; x]$ donne :

$$|f(x) - f(0)| \leq k|x - 0|. \text{ Ainsi :}$$

$$|f(x)| \leq k|x|.$$

2. a) $g :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est continue sur $]0; 1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Comme : $\forall x \in]0; 1], g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et f est dérivable en 0, g admet une limite finie en 0, égale à $f'(0)$.

Ainsi g est prolongeable par continuité en 0.

- b) J'appelle encore g ce prolongement par continuité. g est continue sur le segment fermé borné $[0; 1]$, donc g est bornée :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in [0; 1], |g(x)| \leq k.$$

Vu la définition de g : $\forall x \in]0; 1], |f(x)| \leq k|x|$.

Et comme l'inégalité est claire pour $x = 0$,

$$\forall x \in [0; 1], |f(x)| \leq k|x|.$$

Exercice 8 Classe d'une composée

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos \sqrt{x}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ (au moins).

Solution (Ex.8 – Classe d'une composée)

On utilise le théorème de la limite de la dérivée.

• $\sqrt{\cdot}$ et $\cos$ étant continue sur $[0; +\infty[$ et $\mathbb{R}$ respectivement, f est continue sur $[0; +\infty[$.

• $\sqrt{\cdot}$ et $\cos$ étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$ et $\mathbb{R}$ respectivement, f est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$.

• $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$ car $\sin \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$. De plus, f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.

$$\bullet \forall x > 0, f''(x) = \frac{\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x} \cos(\sqrt{x})}{4x^{3/2}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}^3/6 - \sqrt{x} + \sqrt{x}^3/2 + o(\sqrt{x}^3)}{4x^{3/2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{12} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{12}, \text{ donc } f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0; +\infty[\text{ avec } f''(0) = 1/12.$$

• Si on n'utilise pas le théorème de la limite de la dérivée :

$$\forall x > 0, \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{-\sin \sqrt{x} + \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}/6 + o(x\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{12}, \text{ donc } f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0; +\infty[\text{ avec } f''(0) = 1/12.$$

Exercice 9 Dérivées successives nulles en 0

$$\text{Soit } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{t^2}\right) & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et il existe un polynôme P_n dans $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(t) = P_n\left(\frac{1}{t}\right) \exp\left(\frac{-1}{t^2}\right)$.

b) En déduire la classe de f .

3. Déterminer le développement limité de f à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$.

Solution (Ex.9 – Dérivées successives nulles en 0)

$$\text{Soit } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{t^2}\right) & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. $t \mapsto -1/t^2$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\exp$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. a) Démontrons la propriété voulue par récurrence sur $\mathbb{N}^*$.

• Pour $n = 0$:

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0 = f(0)$, f est continue (ou $\mathcal{C}^0$) sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, f^{(0)}(t) = f(t) = P_0(1/t) \exp\left(\frac{-1}{t^2}\right) \text{ avec } P_0 = 1.$$

La propriété est vraie au rang n .

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n .

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, f^{(n+1)}(t) = f^{(n)'}(t) = \left(\frac{-1}{t^2} P_n'(1/t) + P_n(1/t) \frac{2}{t^3}\right) \exp\left(\frac{-1}{t^2}\right) = P_{n+1}(1/t) \exp\left(\frac{-1}{t^2}\right) \text{ avec } P_{n+1} = -X^2 P_n' + 2X^3 P_n.$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} f^{(n+1)}(t) = \lim_{u \rightarrow \pm\infty} P_{n+1}(u) \exp(-u^2) = 0$ par croissance comparée, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, avec $f^{(n+1)}(0) = 0$.

b) Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de Taylor-Young, f , de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ (au moins!), admet un D.L. à l'ordre n en 0.

Et comme : $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, f^{(k)}(0) = 0$, ce D.L. est : $f = o(x^n)$.

Autrement dit, f tend plus vite vers 0 que tout monôme...

Exercice 10 Alternance

Étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = 2^n + (-2)^n \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right).$$

Solution (Ex.10 – Alternance)

$$u_{2n} = 2^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

$$u_{4n+1} = 2^{4n+1} + (-2)^{4n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc u diverge.

Exercice 11 Équivalent d'une somme par deux méthodes

1. a) Montrer que pour tout entier naturel non nul k ,

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

- b) En déduire un équivalent de $S_n \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On pose : $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$ et $v_n = S_n - 2\sqrt{n+1}$.

- a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
b) En déduire un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution (Ex.11 – Équivalent d'une somme par deux méthodes)

1. a) Par conjugaison : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$

$$\text{Or : } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 2\sqrt{k} \leq \sqrt{k+1} + \sqrt{k} \leq 2\sqrt{k+1}.$$

Par inversion, on a directement l'encadrement voulu.

Variante : Par l'inégalité de accroissements finis, $f : [k; k+1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ étant dérivable avec $\forall x \in [k; k+1], \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$, on en déduit l'encadrement voulu.

On peut aussi partir de : $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ et appliquer la croissance de l'intégrale.

- b) Encadrons S_n .

$$\text{On a déjà : } \forall k \in \mathbb{N}^*, 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

L'autre partie de l'encadrement donne :

$\forall k \geq 2, \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ et on remarque que cette inégalité est encore vraie pour $k=1$.

En sommant pour k allant de 1 à n , on en tire :

$$2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq S_n \leq 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

$$\text{Donc : } 2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n}.$$

N'oublions pas qu'on dispose d'une version du théorème d'encadrement (gendarmes) pour les équivalents.

$$\text{Or : } 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(2\sqrt{n+1}) \text{ donc } 2\sqrt{n+1} - 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

Donc par encadrement $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

$$2. \text{ a) } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{2\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 0.$$

De façon analogue, $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

$$u_n - v_n = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc u et v sont adjacentes.

- b) En notant ℓ leur limite commune, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ell + o(1)$, donc $S_n = 2\sqrt{n} + \ell + o(1) = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Exercice 12 Divergence de la série harmonique

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $H_n \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$.

Solution (Ex.12 – Divergence de la série harmonique)

$$1. \quad H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

$$2. \quad H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq 0 \text{ donc } (H_n) \text{ est croissante, donc soit converge, soit diverge vers } +\infty.$$

Si $H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors $H_{2n} - H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0 \geq \frac{1}{2}$: absurde.

Exercice 13 Nature des suites $(\cos(n))$ et $(\sin(n))$

1. a) Exprimer $\sin(n+1) - \sin(n-1)$ en fonction de $\cos(n)$. En déduire que, si la suite $(\sin(n))$ converge, alors $(\cos(n))$ converge vers 0.
b) En exprimant $\cos(2n)$ à l'aide de $\cos^2(n)$, montrer finalement que $(\sin(n))$ diverge.
2. Établir la divergence de la suite $(\cos(n))$.

Solution (Ex.13 – Nature des suites $(\cos(n))$ et $(\sin(n))$)

$$1. \text{ a) } \sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin(1)\cos(n).$$

Si la suite $(\sin(n))$ converge vers ℓ :

$$\cos(n) = \frac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{2\sin(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell - \ell}{2\sin(1)} = 0.$$

- b) Toujours si la suite $(\sin(n))$ converge, en passant à la limite dans $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$, $0 = -1$: absurde. Donc $(\sin(n))$ diverge, sans limite.
2. Si la suite $(\cos(n))$ converge vers ℓ ,
 $\cos(n+1) - \cos(n-1) = -2\sin(n)\sin(1)$ entraîne $\sin(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Or la suite $(\sin(n))$ diverge. Donc $(\cos(n))$ diverge.

Exercice 14 Convergence de la série de Riemann d'ordre 2

On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Solution (Ex.14 – Convergence de la série de Riemann d'ordre 2)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0,$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \leq 0,$$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

u et v sont adjacentes.

Exercice 15 Taylor-Young et dérivées

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f(0) = f'(0) = 0$.

Montrer qu'il existe une fonction g de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = g(x^2).$$

Solution (Ex.15 – Taylor-Young et dérivées)

Posons : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(\sqrt{x})$. On a ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x^2)$.

Par composition, g est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, \text{ or par la formule de Taylor-Young, } f'(t) = f'(0) + f''(0)t + o(t),$$

$$\text{donc } f'(\sqrt{x}) = f''(0)\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

$$\text{Ainsi : } g'(x) = \frac{1}{2}f''(0) + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}f''(0).$$

Comme g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $]0; +\infty[$, cette limite prouve que g est dérivable en 0, à dérivée continue en 0.

Ainsi, g est C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Mission accomplie.

Exercice 16 Reformulation

Soit $x \in [0; 2\pi[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\cos(nx).$$

Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Solution (Ex.16 – Reformulation)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \Re \left(- \sum_{k=1}^n \left(\frac{-1}{2} \right)^k e^{ikx} \right) = \Re \left(- \sum_{k=1}^n \left(\frac{-e^{ix}}{2} \right)^k \right).$$

$$\text{Comme } \frac{-e^{ix}}{2} \neq 1 \text{ (son module vaut } 1/2), u_n = \Re \left(\frac{e^{ix}}{2} \times \frac{1 - (-e^{ix}/2)^{n+1}}{1 + e^{ix}/2} \right)$$

$$\text{Comme } \left| \frac{e^{ix}}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2} \right)^{n+1} = 0, \text{ donc}$$

• u converge,

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \Re \left(\frac{e^{ix}}{2 + e^{ix}} \right).$$

$$\frac{e^{ix}}{2 + e^{ix}} = \frac{(2 + e^{-ix})e^{ix}}{(2 + e^{-ix})(2 + e^{ix})} = \frac{2e^{ix} + 1}{5 + 4\cos(x)},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2\cos(x) + 1}{5 + 4\cos(x)}.$$

Exercice 17 Complexification

Soit α, β, a, b quatre réels tels que $(\alpha, \beta) \neq (1, 0)$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

Soit u et v les suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ v_0 = b, \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \alpha u_n - \beta v_n, \\ v_{n+1} = \beta u_n + \alpha v_n. \end{cases}$$

Montrer que les suites u et v convergent toutes les deux si, et seulement si, $\alpha^2 + \beta^2 < 1$.

Solution (Ex.17 – Complexification)

Posons, pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_n = u_n + iv_n$.

La relation de récurrence s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = (\alpha + i\beta)z_n.$$

(z_n) est une suite géométrique de raison $\alpha + i\beta \neq 1$: elle converge si, et seulement si, $|\alpha + i\beta| < 1$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\alpha^2 + \beta^2 < 1$.

• Si $\alpha^2 + \beta^2 < 1$, alors (z_n) converge vers 0, et comme $u = \operatorname{Re}(z)$ et $v = \operatorname{Im}(z)$, u et v convergent simultanément, vers 0.

• Si $\alpha^2 + \beta^2 \geq 1$, alors (z_n) diverge. Or si (u_n) ET (v_n) convergeaient, alors z convergerait. Donc l'une (au moins) diverge.

Exercice 18 EDL : applications directes du cours

Résoudre les équations différentielles suivantes, où y désigne une fonction de x suffisamment dérivable sur le domaine indiqué :

1. $y' = (1 + y)\sin x$, $x \in \mathbb{R}$
2. $3xy' - 4y = x$, $x \in]0; +\infty[$
3. $xy' + y = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in]0; +\infty[$
4. $y'' + y = 0$, $x \in \mathbb{R}$
5. $y'' - 3y' + 2y = 0$, $x \in \mathbb{R}$

Solution (Ex.18 – EDL : applications directes du cours)

Je note (E) l'équation différentielle à résoudre, (H) l'équation homogène associée.

1. (H) $\iff y' - (\sin x)y = 0$.

Les solutions de (H) sont : $x \mapsto Ce^{-\cos x}$ où $C \in \mathbb{R}$ quelconque.

$x \mapsto -1$ est solution particulière évidente de (E).

Les solutions de (E) sont :

$$x \mapsto Ce^{-\cos x} - 1 \text{ où } C \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

2. (H) $\iff y' - \frac{4}{3x}y = 0$.

Les solutions de (H) sont : $x \mapsto Cx^{4/3}$ où $C \in \mathbb{R}$ quelconque.

Recherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante.

Soit $f : x \mapsto C(x)x^{4/3}$ où $C : x \mapsto C(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$(\forall x \in]0; +\infty[, \quad 3xf'(x) - 4f(x) = x) \iff$$

$$\left(\forall x \in]0; +\infty[, \quad 3x\left(C'(x)x^{4/3} + C(x)\frac{4}{3}x^{1/3}\right) - 4C(x)x^{4/3} = x \right) \iff$$

$$(\forall x \in]0; +\infty[, \quad 3x^{7/3}C'(x) = x) \iff$$

$$\left(\forall x \in]0; +\infty[, \quad C'(x) = \frac{1}{3}x^{-4/3} \right) \iff$$

$$\exists k \in \mathbb{R}, (\forall x \in]0; +\infty[, \quad C(x) = -x^{-1/3} + k)$$

Donc $x \mapsto -x$ est solution particulière (évidente???????... si on avait retiré nos lunettes en contre-plaqué) de (E).

Les solutions de (E) sont :

$$x \mapsto Cx^{4/3} - x \text{ où } C \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

3. (H) $\iff y' + \frac{1}{x}y = 0$.

Les solutions de (H) sont : $x \mapsto Ce^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}$ où $C \in \mathbb{R}$ quelconque.

Recherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante.

Soit $f : x \mapsto \frac{C(x)}{x}$ où $C : x \mapsto C(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\left(\forall x \in]0; +\infty[, \quad xf'(x) + f(x) = \frac{1}{1+x^2} \right) \iff$$

$$\left(\forall x \in]0; +\infty[, \quad x\left(\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}\right) + \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{1+x^2} \right) \iff$$

$$\left(\forall x \in]0; +\infty[, \quad C'(x) = \frac{1}{1+x^2} \right) \iff$$

$$\exists k \in \mathbb{R}, (\forall x \in]0; +\infty[, \quad C(x) = \operatorname{Arctan}(x) + k)$$

Donc $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ est solution particulière (évidente???????... si on avait retiré nos lunettes en contre-plaqué, bis) de (E).

Les solutions de (E) sont :

$$x \mapsto \frac{C}{x} + \operatorname{Arctan}(x) \text{ où } C \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

4. Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficient constant d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, de solutions $r = \pm i$.

Les solutions de (E) sont :

$$x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

5. Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficient constant d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, de solutions 1 et 2.

Les solutions de (E) sont :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$