Exercice 1 *Natures des séries de terme général u_n ...*

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \quad (n \geq 0)$

2. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} \quad (n \geq 1)$

3. $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad (n \geq 0)$

4. $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^{-1} \quad (n \geq 1)$

5. $u_n = \sin\dfrac{\pi \times n^2}{n+1} \quad (n \geq 0)$

6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \quad (n \geq 2)$

7. $u_n = \left(n \sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \quad (n \geq 1, \alpha \in \mathbb{R})$

8. $u_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} \quad (n \geq 0,\ a \in \mathbb{R})$

Solution (**Ex.1 –** *Natures des séries de terme général u_n ...*)

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$ car $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
Par le critère de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

2. $n\ln(1+\dfrac{1}{n}) = 1 - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(1/n^2\right)$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(1/n^2\right)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$: la série diverge.

3. $\ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$. $\sum u_n$ converge par équivalence.

4. $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$: la série converge par comparaison à la série de Riemann de paramètre 2.

5. $u_n = \sin\left(\pi\dfrac{(n+1)^2-2(n+1)+1}{n+1}\right) = \sin\left(\pi(n-1)+\dfrac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{n+1}$: on conclut à la convergence grâce au critère spécial des séries alternées.

6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{1+(-1)^n/\sqrt{n}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$
$u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$
$\displaystyle\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le théorème spécial de séries alternées,
$\displaystyle\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente,
$\displaystyle\sum \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ est une série absolument convergente donc convergente, par comparaison à la série de Riemann convergente $\displaystyle\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$,
donc $\displaystyle\sum u_n$ diverge.

7. $\ln(u_n) = n^\alpha \ln\left(1-\dfrac{1}{6n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = n^\alpha\left(1-\dfrac{1}{6n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$
$\ln(u_n) = -\dfrac{1}{6}n^{\alpha-2} + o\left(n^{\alpha-3}\right)$
• Si $\alpha < 2$: $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, la série diverge grossièrement.
• Si $\alpha = 2$: $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1/6$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(-1/6)$, la série diverge grossièrement.
• Si $\alpha > 2$: $n^2 u_n = \exp\left(2\ln(n) - \dfrac{1}{6}n^{\alpha-2} + o\left(n^{\alpha-3}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\ln(n) = o\left(n^{\alpha-2}\right)$, donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série converge par comparaison à la série de Riemann de paramètre 2.

8. • Si $|a| < 1$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |a|^n$, or $\sum |a|^n$ est une série géométrique convergente. Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
• Si $a = 1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ et si $a = -1$, $u_{2n} = 1/2$ et $u_{2n+1} = -1/2$: dans le deux cas, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
• Si $|a| > 1$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\dfrac{1}{a}\right|^n$, or $\displaystyle\sum \left|\dfrac{1}{a}\right|^n$ est une série géométrique convergente. Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 2 *Un peu tous les critères*
On pose, pour tout $n \geqslant 2$.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)},\ v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n} \text{ et } w_n = \frac{1}{\ln^2(n)}.$$

1. a) Montrer que $\dfrac{1}{n} = o(w_n)$.
b) Quelle est la nature de la série de terme général w_n ?
2. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
3. a) Montrer que la suite $\left(|v_n|\right)$ n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang.
b) Déterminer un équivalent simple de $v_n - u_n$.
c) En déduire la nature de la série de terme général v_n.

Solution (**Ex.2 –** *Un peu tous les critères*)

1. a) Par croissances comparées, $\dfrac{\ln^2(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{\ln^2(n)}\right)$.

b) Comme la série harmonique de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge, par négligeabilité la série de terme général w_n diverge.

2. Comme $\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$ est une suite décroissante de limite nulle, le théorème de Leibniz assure que la série de terme général u_n converge.

3. a) Pour $n \geqslant 3$, $\ln(n) + (-1)^n > 0$ et $|v_n| = \dfrac{1}{\ln(n) + (-1)^n}$.

$\ln(n+1) + (-1)^{n+1} - \ln(n) - (-1)^n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + 2(-1)^{n+1}$ est du signe de $2(-1)^{n+1}$ car $1 < 1 + \dfrac{1}{n} \leqslant 2 < \mathrm{e}$ donc $0 < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 1 < 2$.

Donc la suite $\left(\ln(n) + (-1)^n\right)$ n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang, donc la suite $(|v_n|$ n'est pas monotone non plus, même à partir d'un certain rang.

b) $v_n - u_n = \dfrac{-1}{\ln^2(n) + (-1)^n \ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\ln^2(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -w_n$.

c) Le théorème de Leibniz ne s'applique pas au terme général v_n ($(|v_n|)$ non décroissante).

On déduit par équivalence de termes négatifs que $\sum_n (v_n - u_n)$ diverge. Comme $\sum_n u_n$ converge, $\sum_n v_n$ diverge, sinon $\sum_n (v_n - u_n)$ convergerait par linéarité.

Exercice 3 *Natures en série*

Soit, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln(1 + u_n)$.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(u_n)$.

4. Déterminer la nature de la série de terme général $\cos(u_n)$.

Solution (**Ex.3 –** *Natures en série*)

1. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une suite décroissante de limite nulle donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge par le critère des séries alternées.

2. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\ln(1+u_n) = u_n - \dfrac{u_n^2}{2} + \mathcal{O}\left(u_n^3\right) = u_n - \dfrac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Or $\sum_n u_n$ par 1., et $\sum_n \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergent car la série de Riemann de paramètre $3/2 > 1$ converge. De plus la série harmonique $\sum_n \dfrac{1}{2n}$ diverge.

Donc $\sum_n \ln(1+u_n)$ diverge.

3. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\sin(u_n) = u_n + \mathcal{O}\left(u_n^3\right) = u_n + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Or $\sum_n u_n$ par 1., et $\sum_n \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergent car la série de Riemann de paramètre $3/2 > 1$ converge. Donc par linéarité $\sum_n \ln(1+u_n)$ converge.

4. Comme $\cos(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$, $\sum_n \cos(u_n)$ diverge grossièrement.

Exercice 4 *Pairs et impairs*

1. a) Justifier la convergence des séries $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(2n)^2}$.

b) En admettant $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, calculer les sommes des séries précédentes.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} > \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Solution (**Ex.4 –** *Pairs et impairs*)

1. a) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ converge par application du théorème spécial des séries alternées.

$\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(2n)^2}$ converge par linéarité car la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$ converge.

$\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ converge par le critère des équivalents de t.g. positifs : $\dfrac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$ et convergence de la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{24}$,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n\text{ pair}}\frac{1}{n^2}+\sum_{n\text{ impair}}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$,

d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\sum_{n\text{ pair}}\frac{1}{n^2}-\sum_{n\text{ impair}}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{24}-\frac{\pi^2}{8}=-\frac{\pi^2}{12}$.

Remarque : la somme de cette dernière série alternée est bien du signe de son premier terme.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$\forall k\in\mathbb{R}, 0\le\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}\le\dfrac{(x^2)^k}{k!}$ assure la convergence de $\displaystyle\sum_{k\ge0}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ par comparaison à la série exponentielle de paramètre x^2.

Une comparaison analogue justifie la convergence de $\displaystyle\sum_{k\ge0}\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$, donc de $\displaystyle\sum_{k\ge0}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ par linéarité.

Attention si on utilise un autre critère : x^{2k+1} est de signe alternant pour $x<0$.

Enfin $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-x)^k}{k!}=\exp(-x)>0$.

Exercice 5 *Constante d'Euler et harmonique alternée : somme et série du reste*

1. Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$.

a) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, $u_{n+1}-u_n=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b) En déduire l'existence d'une constante réelle γ telle que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+\gamma+o(1)\qquad(\heartsuit).$$

2. a) Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Dans la suite de l'exercice, on note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\text{ et }R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

b) Justifier que $S_{2n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$, et en déduire que $S_{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(2)$.

c) En déduire finalement la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

3. a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Justifier que $R_n+R_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$.

b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Que vaut R_n-R_{n+1} ?

c) En déduire que $2R_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

d) Quelle est la nature de la série de terme général R_n ?

Solution (**Ex.5 –** *Constante d'Euler et harmonique alternée : somme et série du reste*)

1. a) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{-1}{n(n+1)}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

donc $u_{n+1}-u_n=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b) Par domination, et par convergence de la série de Riemann de paramètre $2>1$, la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge, donc la suite u converge. En notant γ sa limite, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+o(1)\qquad(\heartsuit)$.

2. a) Par le théorème spécial des séries alternées, la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge car la suite $\left(\dfrac{1}{k}\right)$ tend vers 0 en décroissant.

b) $S_{2n}=\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 2n,\ k\text{ impair}}\frac{1}{k}-\sum_{1\leqslant k\leqslant 2n,\ k\text{ pair}}\frac{1}{k}$ et en observant que la somme pour les indices impairs est la somme totale privée de la somme pour les indices pairs, on a

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

c) $S_{2n}=\ln(2n)+\gamma+o(1)-\ln(n)-\gamma-o(1)=\ln(2)+o(1)$, d'où $S_{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(2)$.

Comme $S_{2n+1}=S_{2n}+\dfrac{1}{2n+1}$, $S_{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(2)$.

Donc la suite (S_n) converge vers $\ln(2)$.

Variante : on sait que S_n) converge et que sa suite extraite (S_{2n}) converge vers $\ln(2)$, donc (S_n) converge vers $\ln(2)$.
Autrement dit $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\ln(2)$.

3. a) $\displaystyle R_n+R_{n+1}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+2}}{k+1}$

$\displaystyle R_n+R_{n+1}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$.

b) $\displaystyle R_n-R_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}=\frac{(-1)^n}{n+1}$.

c) En sommant les deux relations précédentes, $\displaystyle 2R_n=\frac{(-1)^n}{n+1}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$

En appliquant le théorème de Leibniz à la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$ puisque $\left(\dfrac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}\right)$ est une suite tendant vers 0 en décroissant, la majoration du reste fournit

$\forall n\geqslant 1,\quad \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2)}\leqslant\frac{1}{n^2}$.

Autrement dit, ce reste est un $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc $\displaystyle 2R_n=\frac{(-1)^n}{n+1}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

d) On a déjà vu que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge, et puisque la série de Riemann de paramètre $\alpha=2>1$ converge, toute série de terme général $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge.
Par linéarité, la série de terme général R_n converge.

Exercice 6 *Convergences et sommes*

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.

2. On s'intéresse maintenant à la série de terme général

$$v_n=\frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

a) Justifier que la série $\displaystyle\sum_n v_n$ converge.

b) Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad v_n=\frac{a}{n^2}+\frac{b}{(n+1)^2}+\frac{c}{n(n+1)}.$$

c) On donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.
Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$.

Solution (**Ex.6 –** *Convergences et sommes*)

1. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.
Tout marche pour prouver la convergence : majoration, équivalence, domination du terme général par $1/n^2$, mais **soyons directs :** la série de terme général $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ converge car la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge...
Par télescopage, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\lim_{N\to+\infty}1-\frac{1}{N+1}=1$

2. a) Par domination par le terme général de la série de Riemann de paramètre $\alpha=4$, $\displaystyle\sum_n v_n$ converge.

b) **Soyons directs,** en élevant la décomposition en éléments simples de 1., on trouve directement

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad v_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{-2}{n(n+1)}.$$

c) Comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}v_n=\frac{\pi^2}{6}+\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)-2\times 1=\frac{\pi^2}{3}-3.$$

Exercice 7 *Autour du logarithme*

1. Existence et valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

2. a) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$.

b) Proposer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme partielle de la série précédente.

Solution (**Ex.7 –** *Autour du logarithme*)

1. L'existence peut être obtenue via l'équivalence $\ln(1-1/n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n^2$ et la convergence de la série de Riemann de paramètre 2. Mais on peut faire d'une pierre deux coups en cherchant la somme.

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) =$$

$$\sum_{n=2}^{N} \Big[\ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln(n)\Big] = \sum_{n=1}^{N-1}\ln(n) + \sum_{n=3}^{N+1}\ln(n) - 2\sum_{n=2}^{N}\ln(n) =$$

$$\ln(1)+\ln(2)+\ln(N)+\ln(N+1)-2\ln(2)-2\ln(N) = \ln\frac{N+1}{2N}$$

Donc la série converge et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$.

Remarque : termes strictement négatifs... somme strictement négative...

2. $$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N} \Big[\ln(n)-\ln(n+1)\Big] =$$

$$\sum_{n=1}^{N}\ln(n) - \sum_{n=2}^{N+1}\ln(n) = \ln(1)-\ln(N+1) = -\ln(N+1)$$

Donc la série diverge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} -\ln(N)$.

Exercice 8 *Produit infini*

Montrer la convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$.

Solution (**Ex.8 –** *Produit infini*)

Manifestement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \overset{\text{déf.}}{=} \ln(u_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$, or $\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$ et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ converge.

Le critère des équivalents pour ces séries à termes positifs permet d'affirmer que la suite $(v_n)_n$ converge. Par composition par la fonction exponentielle (continue !), la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 9 *Somme d'une série de type exponentielle*

1. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}$.

2. a) Déterminer trois réels α, et γ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^3 = \alpha n(n-1)(n-2) + \beta n(n-1) + \gamma n.$$

b) En déduire la somme de la série précédente.

Solution (**Ex.9 –** *Somme d'une série de type exponentielle*)

1. $\dfrac{n^3}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n-3)!}$ permet de justifier la convergence, ou encore D'Alembert : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$...

2. Pour pouvoir simplifier les factorielles, on écrit :
$n^3 = n(n-1)(n-2) - 3n^2 + 2n = n(n-1)(n-2) - 3n(n-1) + 5n$.

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{n^3}{n!} = \sum_{n=0}^{N}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!} - 3\sum_{n=0}^{N}\frac{n(n-1)}{n!} + 5\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{n!}$$

$$= \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n-3)!} - 3\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(n-2)!} + 5\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} e - 3e + 5e = 3e.$$

Exercice 10 *Fonction ζ de Riemann en 1*

Pour tout $\alpha > 1$ on pose

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}.$$

1. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer $\lim\limits_{\alpha\to 1^+}\zeta(\alpha)$.

2. Donner un équivalent de ζ en 1.

Solution (**Ex.10 –** *Fonction ζ de Riemann en 1*)

1. Par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$.

Donc : $\dfrac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}$.

Par comparaison, $\lim_{\alpha\to1^+}\zeta(\alpha)=+\infty$.

La majoration n'était pas nécessaire mais sera utile pour la suite.

2. Et : $\forall\alpha>1, 1\le\dfrac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)}\le(\alpha-1)+1$, donc par encadrement : $\dfrac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)}\xrightarrow[\alpha\to1]{}1$, et
$$\zeta(\alpha)\underset{\alpha\to1}{\sim}\frac{1}{\alpha-1}.$$

Exercice 11 *Avec ou sans la formule de Stirling*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit
$$u_n=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

1. Dans cette première question, on s'interdit d'utiliser la formule de Stirling.
   a) Déterminer un équivalent de $\ln u_{n+1}-\ln u_n$.
   b) En déduire que $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
   c) En s'intéressant à la série de terme général $\ln\big((n+1)u_{n+1}\big)-\ln\big((n)u_n\big)$, montrer que $nu_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.
   En déduire la nature de la série $\sum_{n\ge0}u_n$.
   d) Soit $v_n=\sqrt{n}u_n$.
   En s'intéressant à la série de terme général $\ln v_{n+1}-\ln v_n$, montrer que la suite $(\sqrt{n}u_n)$ converge vers une limite strictement positive.
2. Retrouver les résultats précédents à l'aide de la formule de Stirling.

Solution (**Ex.11 –** *Avec ou sans la formule de Stirling*)

1. Dans cette première question, on s'interdit d'utiliser la formule de Stirling.
   a) $\ln u_{n+1}-\ln u_n=\ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\ln\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)^2}=\ln\dfrac{2n+1}{2n+2}=\ln\left(1-\dfrac{1}{2n+2}\right)$
   $\ln u_{n+1}-\ln u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{2n}$.
   b) La série $\sum_{n\ge0}(\ln u_{n+1}-\ln u_n)$ tend vers $-\infty$, donc $\ln u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty$, donc $u_n=\mathrm{e}^{\ln u_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
   c) $\ln\big((n+1)u_{n+1}\big)-\ln\big((n)u_n\big)=\ln\dfrac{2n+1}{2n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2n}$ donc la série $\sum_{n\ge0}\ln\big((n+1)u_{n+1}\big)-\ln\big((n)u_n\big)$ diverge vers $+\infty$, donc $\ln(nu_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ donc $nu_n=\mathrm{e}^{\ln(nu_n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.
   Comme $nu_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\ge n_0, nu_n\ge1$ *i.e.* $u_n\ge\dfrac{1}{n}$: $\sum_{n\ge0}u_n$ diverge par comparaison de termes généraux positifs.
   d) $\ln v_{n+1}-\ln v_n=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\ln u_{n+1}-\ln u_n$,
   or $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2n}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\ln u_{n+1}-\ln u_n=-\dfrac{1}{2n}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
   donc $\ln v_{n+1}-\ln v_n=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général $\ln v_{n+1}-\ln v_n$ converge.
   On en déduit que $(\ln v_n)$ converge, vers une limite $c\in\mathbb{R}$. Donc $v_n=\mathrm{e}^{\ln v_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell=\mathrm{e}^c>0$. Cela signifie au passage que $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\ell}{\sqrt{n}}$.
2. $u_n=\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}2^{2n}(2\pi n)n^{2n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ ce qui permet de retrouver tous les résultats précédents... et même plus : $\ell=1/\sqrt{\pi}$.

Exercice 12 *Une condition nécessaire pour les t.g. décroissants* 0

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite *décroissante* telle que la serie $\sum_{n\ge1}u_n$ converge.
   On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$.
   a) Que vaut $\lim_{n\to+\infty}S_{2n}-S_n$? En déduire $\lim_{n\to+\infty}2nu_{2n}$.
   b) Montrer que : $u_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & \text{si } \exists k\in\mathbb{N}^*, n=k^2,\\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré.}\end{cases}$
   Montrer que $\sum_{n\ge1}u_n$ converge.
   A-t-on $u_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$?

Solution (**Ex.12 –** *Une condition nécessaire pour les t.g. décroissants*)

1. a) Comme la série $\sum_{n\ge1}u_n$ converge, la suite (S_n) converge, vers une limite S. Alors : $S_{2n}-S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}S-S=0$.

Or : $\forall n \geq 1, \quad S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_n \geq n u_{2n}$ car u décroît.

Et comme la serie $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, u tend vers 0. Étant de plus décroissante, u est une suite positive. Ainsi : $\forall n \geq 1, \quad 0 \leq n u_{2n} \leq S_{2n} - S_n$.

Par encadrement, $n u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $2n u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) $\forall n \geq 1, 0 \leq u_{2n+1} \leq u_{2n}$ donc $0 \leq 2n u_{2n+1} \leq 2n u_{2n}$, et par encadrement, $2n u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Comme de plus $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad (2n+1) u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, $n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, autrement dit : $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. $\forall N \geq 1, \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \frac{1}{k^2}$. Comme la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (k^2) u_{k^2} = 1$, ce qui exclut que $n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On n'a pas : $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.