

Exercice 1 Natures des séries de terme général $u_n \dots$

- | | |
|---|--|
| 1. $u_n = \frac{n!}{n^n} \quad (n \geq 0)$ | 2. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \quad (n \geq 1)$ |
| 3. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad (n \geq 0)$ | 4. $u_n = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^{-1} \quad (n \geq 1)$ |
| 5. $u_n = \sin \frac{\pi \times n^2}{n+1} \quad (n \geq 0)$ | 6. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \quad (n \geq 2)$ |
| 7. $u_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \quad (n \geq 1, \alpha \in \mathbb{R})$ | 8. $u_n = \frac{a^n}{1 + a^{2n}} \quad (n \geq 0, a \in \mathbb{R})$ |

Exercice 2 Un peu tous les critèresOn pose, pour tout $n \geq 2$.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{\ln^2(n)}.$$

1. a) Montrer que $\frac{1}{n} = o(w_n)$.
b) Quelle est la nature de la série de terme général w_n ?
2. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
3. a) Montrer que la suite $(|v_n|)$ n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang.
b) Déterminer un équivalent simple de $v_n - u_n$.
c) En déduire la nature de la série de terme général v_n .

Exercice 3 Natures en sérieSoit, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n .
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln(1 + u_n)$.
3. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(u_n)$.
4. Déterminer la nature de la série de terme général $\cos(u_n)$.

Exercice 4 Pairs et impairs

1. a) Justifier la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2}$.

b) En admettant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer les sommes des séries précédentes.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} > \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Exercice 5 Constante d'Euler et harmonique alternée : somme et série du reste

1. Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

- a) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, $u_{n+1} - u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- b) En déduire l'existence d'une constante réelle γ telle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1) \quad (\heartsuit).$$

2. a) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Dans la suite de l'exercice, on note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

- b) Justifier que $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$, et en déduire que $S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$.

- c) En déduire finalement la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

3. a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Justifier que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$.

- b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Que vaut $R_n - R_{n+1}$?

- c) En déduire que $2R_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- d) Quelle est la nature de la série de terme général R_n ?

Exercice 6 Convergences et sommes

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.

2. On s'intéresse maintenant à la série de terme général

$$v_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

a) Justifier que la série $\sum_n v_n$ converge.

b) Déterminer trois réels a , b et c tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{a}{n^2} + \frac{b}{(n+1)^2} + \frac{c}{n(n+1)}.$$

c) On donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Exercice 7 Autour du logarithme

1. Existence et valeur de $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

2. a) Nature de $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.

b) Proposer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme partielle de la série précédente.

Exercice 8 Produit infini

Montrer la convergence de la suite de terme général $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 9 Somme d'une série de type exponentielle

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!}$.

2. a) Déterminer trois réels α , β et γ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^3 = \alpha n(n-1)(n-2) + \beta n(n-1) + \gamma n.$$

b) En déduire la somme de la série précédente.

Exercice 10 Fonction ζ de Riemann en 1

Pour tout $\alpha > 1$ on pose

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \zeta(\alpha)$.

2. Donner un équivalent de ζ en 1.

Exercice 11 Avec ou sans la formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

1. Dans cette première question, on s'interdit d'utiliser la formule de Stirling.

a) Déterminer un équivalent de $\ln u_{n+1} - \ln u_n$.

b) En déduire que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

c) En s'intéressant à la série de terme général $\ln((n+1)u_{n+1}) - \ln((n)u_n)$, montrer que $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

d) Soit $v_n = \sqrt{n}u_n$.

En s'intéressant à la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$, montrer que la suite $(\sqrt{n}u_n)$ converge vers une limite strictement positive.

2. Retrouver les résultats précédents à l'aide de la formule de Stirling.

Exercice 12 Une condition nécessaire pour les t.g. décroissants 0

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante telle que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

a) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - S_n$? En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nu_{2n}$.

b) Montrer que : $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}^*, n = k^2, \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré.} \end{cases}$

Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

A-t-on $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$?