

Problème 1 *Inspiré d'un problème du baccalauréat 1990, filière C*

On étudie les solutions de l'équation (E_n) d'inconnue x dans $]0; +\infty[$

$$(E_n) : \frac{x \ln(x)}{x+1} = n$$

où n désigne un entier naturel non nul.

Après avoir établi l'existence et l'unicité d'une unique solution α_n pour chaque n de $\mathbb{N}^*$ dans la partie A, on étudie le comportement asymptotique de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans la partie B. Dans la dernière partie on étudie, pour chaque valeur de n dans $\mathbb{N}^*$, une suite convergeant rapidement vers α_n ce qui permet d'avoir des valeurs approchées précises de α_n .

Les parties B et C sont indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE A

☞ *Études de fonctions, continuité, dérivabilité, bijectivité...*

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et } f(0) = 0.$$

1. a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
b) Que dire de l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f au voisinage de 0 ?
2. Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\varphi(x) = \ln x + x + 1.$$

- a) Étudier les variations de φ .
- b) Établir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution β et une seule, et que $0 < \beta < e^{-1}$. (On ne demande pas de construire la courbe représentative de φ .)
- c) Pour $x > 0$, exprimer $f'(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f .
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis la limite de $\ln(x) - f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Construire les courbes représentatives $\mathcal{C}$ de f et Γ de $x \mapsto \ln(x)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ [unité graphique 3 cm ou 3 grands carreaux].
5. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , l'équation

$$(E_n) : \frac{x \ln(x)}{x+1} = n$$

possède une unique solution dans $]0; +\infty[$.

Dans toute la suite, on note α_n l'unique solution dans $]0; +\infty[$ de (E_n) .

PARTIE B

☞ *Comparaisons asymptotiques, équivalences et négligeabilités, en particulier on n'oubliera pas que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n) \dots$*

6. *Comparaison de α_n à e^n*
 - a) Établir que $f(e^n) \leq n$. En déduire que $\alpha_n \geq e^n$.
 - b) Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut s'écrire sous la forme :

$$\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n} \quad (1)$$

- c) En déduire un équivalent simple de α_n lorsque n tend vers l'infini.
7. *Comparaison de α_n à $e^n + n$*
On écrit α_n sous la forme

$$\alpha_n = e^n \beta_n \quad \text{où } \beta_n \geq 1 \quad (2)$$

- a) Que sait-on de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$?
- b) En exprimant la relation (1) pour β_n , justifier que

$$\beta_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n e^{-n}.$$

- c) En déduire que

$$\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^n + n + o(n).$$

8. Amélioration de l'estimation du reste « $o(n)$ »

On écrit α_n sous la forme

$$\alpha_n = e^n(1 + \epsilon_n) \quad \text{où } \epsilon_n \geq 0 \quad (3)$$

- a) À l'aide de (1), exprimer $(1 + \epsilon_n) \ln(1 + \epsilon_n)$ en fonction de n .
 b) Justifier que pour tout $t \geq 0$, $\ln(1 + t) \leq t$.
 c) Établir que pour tout $t \geq 0$

$$0 \leq (1 + t) \ln(1 + t) - t \leq \frac{t^2}{2}.$$

- d) En déduire que pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq ne^{-n} - \epsilon_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n} \quad (4)$$

- e) À l'aide de (3) et (4), justifier que

$$\forall \rho \in]0; 1[, \quad \alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^n + n + o(e^{-\rho n})$$

... ce qui signifie que, lorsque n croît, l'écart entre α_n et $e^n + n$ tend exponentiellement vers 0... ce qui est très rapide.

PARTIE C

☞ Stabilité, accroissements finis et fonctions lipschitziennes, suites récurrentes...

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul fixé.

On définit la fonction g sur $]0; +\infty[$ par

$$g : x \mapsto \exp \left(n \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = e^n e^{n/x}.$$

9. a) Prouver que, pour $x > 0$, l'équation $f(x) = n$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

- b) Retrouver en particulier que $\alpha_n > e^n$.

10. Étudier la monotonie de g .

11. a) Justifier que, pour tout $t > 0$, $te^{-t} \leq e^{-1}$.

- b) On pose $a = e^n$ et $b = e^{n+1/e}$. Justifier que l'intervalle $[a; b]$ est stable par g , c'est-à-dire que $g([a; b]) \subset [a; b]$.

Dans la suite de cette partie, on note (u_k) la suite définie par

$$u_0 = e^n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = g(u_k).$$

- c) Justifier que pour tout k de $\mathbb{N}$, $u_k \in [a; b]$.

12. a) On pose $K_n = ne^{-n+1/e}$. Justifier que g est K_n -lipschitzienne sur $[a; b]$.

- b) Justifier que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et en déduire que $K_n \in]0; 1[$.

En conséquence, on a

$$\forall (x, y) \in [a; b]^2, \quad |g(x) - g(y)| \leq K_n |x - y|$$

avec $K_n < 1$ et on dit que g est une application contractante.

13. a) Justifier que, pour tout entier naturel k ,

$$|u_{k+1} - \alpha_n| \leq K_n |u_k - \alpha_n|.$$

- b) En déduire, pour tout entier naturel k ,

$$|u_k - \alpha_n| \leq (K_n)^k |e^n - \alpha_n|.$$

- c) Montrer finalement que la suite (u_k) converge et que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \alpha_n.$$