

Exercice 1 *Natures*

Déterminer la nature de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle I :

1. $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 + 2t + 1}, I = [0; +\infty[$
2. $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t^3 + 1}}, I = [1; +\infty[$
3. $f : t \mapsto \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^3 + t^2}}, I =]0; 1]$
4. $f : t \mapsto \frac{\sin(t) + \cos(t)}{\sqrt{t^3 + 1}}, I = [0; +\infty[$
5. $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\ln(t)}, I =]1; 2]$
6. $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\ln(t)}, I = [2; +\infty[$
7. $f : t \mapsto \frac{t - [t]}{t^2}, I =]0; +\infty[$
8. $f : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right), I =]0; +\infty[$

Solution (Ex.1 – Natures)

1. Convergente : $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, ou encore $F : t \mapsto \frac{-1}{t+1}$;
2. Convergente : $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^{3/2}} = o\left(\frac{1}{t^{5/4}}\right)$;
3. Divergente : $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$;
4. Convergente : $\forall t \geq 1, |f(t)| \leq \frac{2}{t^{3/2}}$;
5. Divergente :
 $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{e^{-1}}{t-1}$, et par translation de la variable $\int_1^2 \frac{dt}{t-1}$ est de même nature que
l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{du}{u}$, donc divergente.
6. Convergente : $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, ou encore : $\forall t \geq 3, f(t) \leq e^{-t}$;
7. Divergente : $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}$ assure l'intégrabilité en $+\infty$,

mais : $\forall t \in]0; 1[, f(t) = \frac{1}{t}$ entraîne la divergence de $\int_0^1 f(t)dt$;

8. Convergente : $\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ assure l'intégrabilité en $+\infty$,
et en 0 : $\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \ln(t^2 + 1) - 2\ln(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -2\ln(t)$ or $\int_0^1 \ln(t)dt$ converge ...

Remarque : une intégration par parties peut aussi justifier la convergence (et donner la valeur) :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = \pi \dots$$

Exercice 2 *Calculs*

Montrer l'existence et calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$
2. $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\exp(x)+1)(\exp(-x)+1)}$
3. $K = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$
4. $L = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$
5. $M = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$
6. $R = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \ln(\sin x) dx$

Solution (Ex.2 – Calculs)

1. $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ continue positive sur $[0; +\infty[$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$: convergence par équivalence.
 $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} dx = \left[\ln \frac{x+1}{x+2} \right]_0^{+\infty} = \ln 2.$
2. $f : x \mapsto \frac{1}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)}$ continue positive sur $[0; +\infty[$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$: convergence par équivalence.
 $J \stackrel{u=e^x}{=} \int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)^2} du = \frac{1}{2}.$

3. $f : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ continue positive sur $]0; +\infty[$,
 $\sqrt{x}f(x) = \sqrt{x}\ln(1+x^2) - 2\sqrt{x}\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0 et $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$:
 convergence par domination en 0 et équivalence en $+\infty$.
 $K \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[x\ln(1+1/x^2)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2} dx = \pi$.
4. $f : x \mapsto \exp(-\sqrt{x})$ continue positive sur $[0; +\infty[$, $x^2 f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination en $+\infty$.
 $L \stackrel{u=\sqrt{x}}{=} \int_0^{+\infty} 2ue^{-u} du \stackrel{\text{IPP}}{=} [-2ue^{-u}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-u} du = 2$.
5. $f : x \mapsto \frac{\ln x}{(1+x)^2}$ continue sur $]0; +\infty[$, $\sqrt{x}f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0 et
 $x^{3/2}f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination en 0 et en $+\infty$.
 $M \stackrel{u=1/x}{=} -\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{(u+1)^2} du = -M$ donc $M = 0$.
6. $f : x \mapsto \sin x \ln(\sin x)$ continue sur $]0; \pi/2]$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc intégrale faussement impropre.
 $R \stackrel{x=\cos t}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1-t^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1-t) + \ln(1+t) dt = \ln 2 - 1$.

Exercice 3 Tassement

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.

Montrer que $\int_x^{x+1} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Solution (Ex.3 – Tassement)

Il suffit d'écrire (Chasles) :

$$\int_x^{x+1} f(t) dt = \int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0 \dots$$

Exercice 4 Une différence entre séries et intégrales

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

Indication : On commencera par poser $u = t^2$, puis par faire une intégration par parties...

2. a) Est-il nécessaire que le terme général de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ tende vers 0 pour que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge ?
 b) Est-il nécessaire que f , continue par morceaux sur $[a; +\infty[$, admette une limite nulle en $+\infty$ pour que $\int_a^{+\infty} f$ existe ?

Solution (Ex.4 – Une différence entre séries et intégrales)

1. Le changement de variable $u = t^2$ conduit à l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du$, qui en intégrant par parties est de même nature que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^{3/2}} du$, elle-même absolument convergente par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}}$.
2. a) Si une série converge, son terme général tend vers 0 :

$$u_n = \sum_{k=n_0}^n u_k - \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = 0.$$
 C'est dans le cours de première année.
- b) $f : t \mapsto \sin(t^2)$ est continue sur $[\sqrt{\pi}; +\infty[$, n'admet aucune limite en $+\infty$ et pourtant $\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} f$ existe...

Exercice 5 Que faire d'un logarithme ?

Montrer l'existence et calculer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(1+e^{-x}) dx.$$

Solution (Ex.5 – Que faire d'un logarithme ?)

Ici, il est INTERDIT DE NE RIEN TENTER, car tout marche :

- pour l'existence :

☞ Comparaison : $\forall x \geq 0, 0 \leq e^{-x} \ln(1+e^{-x}) \leq e^{-x} \ln(2)$ et $\int_0^1 e^{-x} dx$ existe ...

☞ Négligeabilité : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} \ln(1+e^{-x})}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \ln(1+e^{-x}) = 0$ donc $e^{-x} \ln(1+e^{-x})$

$$e^{-x} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} (1/x^2) \dots$$

☞ Équivalence : $e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (e^{-x})^2$ et $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \stackrel{\text{primit.}}{=} \frac{1}{2}$ existe ...

• pour l'existence et la valeur (comme souvent, savoir calculer la valeur permet de justifier au passage l'existence) :

☞ Calcul d'une primitive : la formule de dérivation $(u \ln u)' = u' \ln u + u'$ fournit

$$u' \ln u = (u(\ln u - 1))' \text{ donc}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) dx \stackrel{\text{primit.}}{=} -[(1 + e^{-x})(\ln(1 + e^{-x}) - 1)]_0^{+\infty} = 1 + 2(\ln 2 - 1) = 2 \ln 2 - 1;$$

☞ Changement de variable :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) dx \stackrel{u=e^{-x}}{=} \int_0^1 \ln(1 + u) du \stackrel{\text{IPP}}{=} [(1 + u) \ln(1 + u)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1 + u}{1 + u} du = 2 \ln 2 - 1;$$

☞ Par intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) dx \stackrel{\text{IPP}}{=} [-(1 + e^{-x}) \ln(1 + e^{-x})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (1 + e^{-x}) \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = 2 \ln 2 - \Gamma(1) = 2 \ln 2 - 1.$$

Exercice 6 Arctangentes en cascade

1. Justifier la convergence des intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2}, J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^2} \text{ et } K = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1 + t^2)^2} dt.$$

2. Les calculer.

Solution (Ex.6 – Arctangentes en cascade)

1. I, J et K convergent par le critère des équivalents.

$$2. I \stackrel{\text{primit.}}{=} [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}, I \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[\frac{t}{1 + t^2} \right]_0^{+\infty} + 2K \text{ donc } K = \frac{\pi}{4}.$$

$$J = I - K = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 7 Limite d'une famille de séries

1. Soit $a \in]0; +\infty[$.

a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a}{n^2 + a^2}$ converge.

b) Montrer que : $\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \frac{\pi}{2}$.

2. Montrer l'existence de $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$, puis la calculer.

Solution (Ex.7 – Limite d'une famille de séries)

1. a) $\frac{a}{n^2 + a^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ assure la convergence par le critère des équivalents pour ces séries à terme général positif et par la convergence de la série de Riemann de paramètre 2.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall t \in [n; n+1], \frac{a}{n^2 + a^2} \geq \frac{a}{t^2 + a^2}, \text{ donc } \frac{a}{n^2 + a^2} \geq \int_n^{n+1} \frac{a}{t^2 + a^2} dt$$

$$\forall t \in [n-1; n], \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \frac{a}{t^2 + a^2}, \text{ donc } \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{a}{t^2 + a^2} dt$$

En sommant ces inégalités pour $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$,

$$\int_1^{N+1} \frac{a}{t^2 + a^2} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \int_0^N \frac{a}{t^2 + a^2} dt.$$

À l'aide de la primitive $t \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{t}{a}\right)$ de $t \mapsto \frac{a}{t^2 + a^2}$,

$$\text{Arctan}\left(\frac{N+1}{a}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leq \sum_{n=1}^N \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \text{Arctan}\left(\frac{N}{a}\right).$$

Par conservation des inégalités (larges) en passant à la limite :

$$\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

2. Puisque $\lim_{a \rightarrow +\infty} \text{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) = 0$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$ existe par le théorème d'encadrement et

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8 Fonction gamma d'Euler et suite double d'intégrales

Pour tout x de $]0; +\infty[$, on pose, sous réserve d'existence,

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Justifier que la fonction Γ est effectivement définie sur $]0; +\infty[$.

Γ s'appelle la fonction gamma d'Euler.

2. a) Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

- b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

En quelque sorte, Γ prolonge la factorielle sur $]0; +\infty[$... au décalage d'une unité près.

3. On admet que Γ est une fonction continue.

Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ au voisinage de 0.

4. Pour tous p et q de $\mathbb{N}$, on pose sous réserve d'existence,

$$I_{p,q} \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^1 z^p \ln^q z \, dz.$$

En utilisant le changement de variable $u = -(p+1)\ln z$, justifier l'existence de $I_{p,q}$ et la calculer.

Solution (Ex.8 – Fonction gamma d'Euler et suite double d'intégrales)

1. • $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ assure la convergence en $+\infty$.

• $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$ et $x-1 > -1$ assure la convergence en 0 (et aussi la divergence si $x \leq 0$...).

2. a) Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Comme $t^x e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $t^x e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, par une intégration par parties, j'obtiens :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

- b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$...

3. $\forall x > 0, \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ or $\Gamma(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \Gamma(1)$ par continuité donc $\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$.

D'où $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$.

4. Le changement proposé étant une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante,

$$\begin{aligned} I_{p,q} &\stackrel{u=1-(p+1)\ln z}{=} \int_{+\infty}^0 (e^{-u/(p+1)})^p \left(\frac{-u}{p+1}\right)^q \left(\frac{-1}{p+1} e^{-u/(p+1)}\right) du \\ &= \frac{(-1)^q}{(p+1)^{q+1}} \Gamma(q+1) = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}. \end{aligned}$$

Exercice 9 Heureuse intégrale à paramètre

Soit a un réel.

1. Établir la convergence de

$$I_a = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right) dt.$$

2. Calculer I_a .

Solution (Ex.9 – Heureuse intégrale à paramètre)

1. $\ln\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a^2}{t^2}$ donne la convergence en $+\infty$ par équivalence (Riemann en $+\infty$).

$\ln\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right) = \ln(t^2 + a^2) - 2\ln(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -2\ln(t)$ donne la convergence en 0 par équivalence ($\int_0^1 \ln(t) dt$ converge).

2. $I_a \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[t \ln\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t \left(\frac{2t}{t^2 + a^2} - \frac{2}{t}\right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{2a^2}{t^2 + a^2} dt$

$$I_a = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t/a)^2 + 1} dt \stackrel{u=t/a}{=} 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 1} a du = 2a \frac{\pi}{2} = a\pi \text{ (happy?)}$$

Exercice 10 Intégrales à paramètre

a désigne un réel de $]0; +\infty[$.

1. Justifier l'existence et déterminer la valeur de

$$I_a \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2}.$$

2. Justifier l'existence de

$$J_a \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt.$$

3. À l'aide du changement de variable $u = a^2/t$, calculer J_a .

Solution (Ex.10 – Intégrales à paramètre)

1. $t \mapsto \frac{1}{a^2 + t^2}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$. Comme $\frac{1}{a^2 + t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, on obtient l'existence par équivalence.

- $I_a \stackrel{u=t/a}{=} \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} a du = \frac{1}{a} [\operatorname{Arctan} u]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2a}$.
2. $\frac{\ln t}{a^2+t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{a^2} \ln t$ donc par équivalence de fonctions négatives (et comme $\int_0^1 \ln t dt$ existe), $\int_0^1 \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$ existe.
- $t^{3/2} \frac{\ln t}{a^2+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{\ln t}{a^2+t^2} = o(t^{3/2})$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$ existe par domination. Donc J_a existe.
3. $J_a \stackrel{u=a^2/t}{=} \int_{+\infty}^0 \frac{2 \ln a - \ln u}{a^2 + a^4/u^2} \left(\frac{-a^2}{u^2} \right) du = \int_0^{+\infty} \frac{2 \ln a - \ln u}{u^2 + a^2} du = 2 \ln(a) I_a - J_a$
- d'où $J_a = \ln(a) I_a = \frac{\pi \ln a}{2a}$.

Exercice 11 Convergence de l'intégrale de Dirichlet

1. Montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

converge.

2. En déduire la nature de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

3. Justifier l'existence de

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt,$$

intégrale de Dirichlet (qui vaut π pour information).

Solution (Ex.11 – Convergence de l'intégrale de Dirichlet)

1. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$ donc I est faussement impropre en 0.
- $0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$ permet de comparer I à une intégrale convergente en $+\infty$.
2. Une intégration par parties permet de conclure, avec en plus $I = J$.
3. L'intégrande est paire (à vérifier!), donc D existe (et vaut $2J$).

Exercice 12 Une fonction constante

Soit

$$g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} dt.$$

1. Montrer que g est effectivement définie sur $]0; +\infty[$.

2. On admet que : $g(1) = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de Dirichlet).

À l'aide d'un changement de variable, calculer $g(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.

Solution (Ex.12 – Une fonction constante)

1. L'intégrale est faussement impropre en 0 car $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(xt)}{t} = x$. La convergence en $+\infty$ se prouve en par une intégration par parties en dérivant $t \mapsto 1/t$ et primitivant $t \mapsto \sin(xt)$, puis par comparaison, grâce à l'intégrale de Riemann du paramètre $\alpha = 2$.
2. $g(x) \stackrel{u=xt}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 13 Convergences

1. Nature de

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sin t} dt, \quad J = \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{\sin t} dt \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin t}} dt.$$

2. En effectuant changement de variable $u = \pi - t$ dans K , déterminer la nature de

$$L = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin t}} dt.$$

Solution (Ex.13 – Convergences)

1. $\frac{e^{-t}}{\sin t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$: I diverge; $\frac{e^{-t}-1}{\sin t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -1$: J converge (faussement impropre);
- $\frac{1}{\sqrt{\sin t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$: K converge.
2. $K \stackrel{u=\pi-t}{=} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{du}{\sqrt{\sin(\pi-u)}} = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{du}{\sqrt{\sin(u)}}$. Par la relation de Chasles, L existe et $L = K + K$.