

Solution (Ex.1 – Inspiré d'un problème du baccalauréat 1990, filière C)

1. a) f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables.

La limite de référence $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donne $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ donc f est continue en 0.

Pour $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(x)}{x + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

- b) Il découle de la limite précédente que $\mathcal{C}$ présente une demi-tangente verticale à l'origine, dirigée vers le bas.

2. a) φ est dérivable car somme de fonctions usuelles dérivables, avec $\forall x > 0$, $\varphi'(x) = 1 + 1/x > 0$ donc φ est strictement croissante.

- b) φ est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\varphi(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$. Comme $0 \in]-\infty; +\infty[$, 0 possède un unique antécédent β par φ : l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une unique solution $\beta \in]0; +\infty[$.

De plus $\varphi(e^{-1}) = e^{-1} > 0 = \varphi(\beta)$ donc par stricte croissance de φ , $\beta < e^{-1}$.

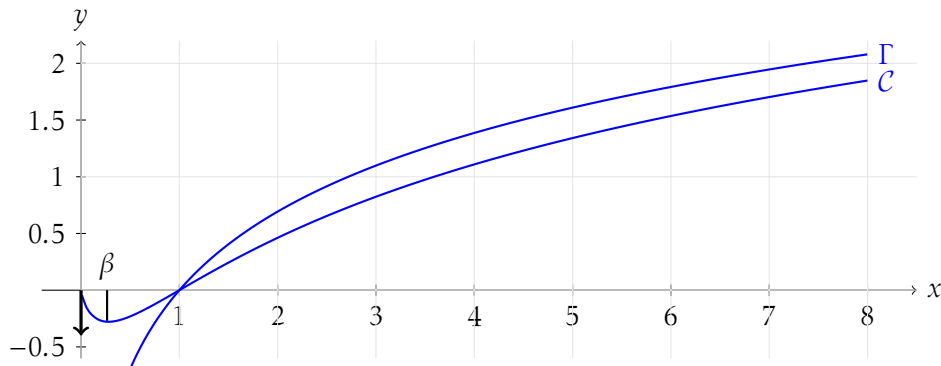
- c) Pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2}$ est du signe de $\varphi(x)$. Donc f est strictement décroissante sur $[0; \beta]$ et strictement croissante sur $[\beta; +\infty[$.

On peut ajouter que $f(\beta) = -\beta$ car $-\ln(\beta) = \beta + 1$.

3. $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x \ln x}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Pour $x > 0$, $\ln x - f(x) = \frac{\ln(x)}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées.

4. Par la question précédente, $\mathcal{C}$ est asymptote à Γ en $+\infty$.



Lorsqu'on vous demande une courbe, faites-y apparaître TOUTES les informations vous avez obtenues lors de l'étude précédente.

5. f est négative sur $[0; 1]$ donc puisque $n \geq 1$, (E_n) n'a pas de solution dans cet intervalle.

Sur $[1; +\infty[$, f est continue strictement croissante donc réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $f([1; +\infty[) = [0; +\infty[$. Comme $n \in [0; +\infty[$, n possède un unique antécédent par f et (E_n) a une unique solution dans $[1; +\infty[$.

Ainsi (E_n) possède une et une seule solution dans $]0; +\infty[$.

6. a) $f(e^n) = \frac{e^n}{1+e^n} \times n \leq n = f(\alpha_n)$, donc par stricte croissance de f , $e^n \leq \alpha_n$... ce qui induit déjà $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

b) $\frac{\alpha_n \ln(\alpha_n)}{\alpha_n + 1} = n \Leftrightarrow \ln(\alpha_n) = n \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) \Leftrightarrow \ln(\alpha_n) - n = \frac{n}{\alpha_n} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$

c) $\alpha_n \geq e^n$ donc $0 \leq \frac{n}{\alpha_n} \leq \frac{n}{e^n}$ et par encadrement $\frac{n}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors $\frac{\alpha_n}{e^n} = \exp\left(\frac{n}{\alpha_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Autrement dit $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n$.

7. a) $\beta_n = \frac{\alpha_n}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, c'est écrit ci-dessus.

b) $(1) \Leftrightarrow \ln(\beta_n) = \frac{n}{e^n \beta_n}$ et comme $\beta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$, $\beta_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n e^{-n}$.

c) Ainsi $\beta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + n \exp(-n) + o(n \exp(-n))$. En multipliant par e^n : $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^n + n + o(n)$.

8. a) $(1) \Rightarrow \ln(1 + \varepsilon_n) = \frac{n}{e^n(1 + \varepsilon_n)}$ d'où $(1 + \varepsilon_n) \ln(1 + \varepsilon_n) = n e^{-n}$.

b) **Ultra-classique** – C'est une conséquence de la concavité de la fonction logarithme sur $]0; +\infty[$: l'équation de sa tangente en 1 étant $y = x - 1$, on a pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$, ce qui équivaut à $\ln(1+t) \leq t$ pour tout $t > -1$. La concavité de « $\ln$ » se justifie par : $\ln^{(2)} \leq 0$.

L'étude du signe de la fonction $t \mapsto t - \ln(1+t)$ fait l'affaire aussi.

- c) On travaille sur $[0; +\infty[$. Avec $h : t \mapsto (1+t) \ln(1+t) - t$, on a $h' : t \mapsto \ln(1+t) > 0$: h est croissante et nulle en 0 donc positive sur $\mathbb{R}_+$, d'où la minoration dans cet encadrement.

Avec $j : t \mapsto (1+t) \ln(1+t) - t - t^2/2$, on a $j' : t \mapsto \ln(1+t) - t \leq 0$: j est décroissante et nulle en 0 donc négative sur $\mathbb{R}_+$, d'où la majoration dans cet encadrement.

d) En prenant $t = \varepsilon_n \geq 0$, $0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n^2}{2}$.

La minoration donne $\varepsilon_n \leq ne^{-n}$ donc $\varepsilon_n^2 \leq n^2 e^{-2n}$, ce qui permet de s'affranchir de ε_n dans la majoration.

Ainsi : $0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n}$.

e) (3) s'écrit $\varepsilon_n = e^{-n} \alpha_n - 1$, ce qui dans (4) fournit

$$0 \leq ne^{-n} - e^{-n} \alpha_n + 1 \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n}$$

soit encore : $0 \leq n + e^n - \alpha_n \leq \frac{ne^{-n}}{2}$.

Soit alors $\rho \in]0; 1[$. On a : $0 \leq \frac{n + e^n - \alpha_n}{e^{-\rho n}} \leq \frac{ne^{(\rho-1)n}}{2}$.

Comme $\rho - 1 < 0$, $\frac{ne^{(\rho-1)n}}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ puisque $n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{(1-\rho)n})$ par croissances comparées.

D'où $n + e^n - \alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-\rho n})$, autrement dit :

$$\forall \rho \in]0; 1[, \quad \alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^n + n + o(e^{-\rho n})$$

9. a) $f(x) = n \Leftrightarrow \ln(x) = n \left(\frac{x+1}{x} \right) \Leftrightarrow x = g(x)$

b) On a de plus : $\forall x > 0, g(x) = e^n e^{n/x} > e^n$ puisque $e^{n/x} > 1$, or $\alpha_n = g(\alpha_n)$ donc $\alpha_n > e^n$.

10. g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a : $\forall x > 0, g'(x) = \frac{-n}{x^2} g(x) < 0$ donc g est strictement décroissante.

11. a) Pour tout $t > 0$, $\ln(te^{-t}) = \ln(t) - t \leq -1$ car $\ln(t) \leq t - 1$ (inégalité classique, voir 8.b).

Par croissance de l'exponentielle, $te^{-t} \leq e^{-1}$.

On peut bien évidemment étudier $t \mapsto te^{-t}$...

b) • $g(a) = e^n e^{ne^{-n}} \leq e^n e^{e^{-1}} = b$;

• $g(b) > e^n = a$;

• Comme g est continue strictement décroissante, $g([a; b]) = [g(b); g(a)] \subset [a; b]$.

Dans la suite de cette partie, on note (u_k) la suite définie par

$$u_0 = e^n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = g(u_k).$$

c) On raisonne par récurrence sur k :

• $u_0 = a \in [a; b]$;

• la stabilité de $[a; b]$ par g assure l'hérédité de cette propriété, puisque $u_k \in [a; b]$ entraîne $u_{k+1} = g(u_k) \in [a; b]$;

• on conclut que pour tout k de $\mathbb{N}$, $u_k \in [a; b]$.

12. a) On a :

$$\forall x \in [a; b], |g'(x)| = \frac{n}{x^2} g(x) \leq \frac{n}{a^2} b = \frac{n}{e^{-2n}} e^{n+1/e} = ne^{-n+1/e} = K_n.$$

g étant dérivable sur le segment $[a; b]$, l'inégalité des accroissements finis assure que g est K_n -lipschitzienne que le segment $[a; b]$.

b) La suite (K_n) est **strictement positive** et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{n+1}{n} e^{-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1} \leq 2e^{-1} \leq \frac{2}{e} < 1 \quad \text{donc la suite}$$

$(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $K_n \in]0; K_1]$. Or $K_1 = e^{-1+1/e} < 1$ puisque $1/e < 1$.

Donc $K_n \in]0; 1[$.

13. a) L'idée est d'appliquer l'inégalité précédente à $x = u_k$ et $y = \alpha_n$.

On sait que $u_k \in [a; b]$.

N'oublions pas de justifier que $\alpha_n \in [a; b]$ aussi.

En considérant que $m : x \mapsto g(x) - x$, m est continue avec $m(a) = g(a) - a \geq 0$ ($g(a) \in [a; b]$!) et $m(b) = g(b) - b \leq 0$ ($g(b) \in [a; b]$) donc m s'annule au moins une fois dans $[a; b]$. Or $m(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x \Leftrightarrow x = \alpha_n$. Donc $\alpha_n \in [a; b]$.

Comme g est K_n lipshitzienne sur $[a; b]$, $|g(u_k) - g(\alpha_n)| \leq K_n |u_k - \alpha_n|$, donc $|u_{k+1} - \alpha_n| \leq K_n |u_k - \alpha_n|$.

b) Par récurrence sur k , puisque $u_0 = e^n$ ce qui assure l'initialisation, et l'inégalité précédente assurant l'hérédité, pour tout entier naturel k , $|u_k - \alpha_n| \leq (K_n)^k |e^n - \alpha_n|$.

c) Comme $K_n \in]0; 1[$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} (K_n)^k = 0$. Par encadrement, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} |u_k - \alpha_n|$ **existe** et vaut 0, autrement dit :

$$\text{la suite } (u_k) \text{ converge et } \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \alpha_n.$$