

Problème 1 Constante d'Euler, Formule de Stirling et Intégrales de Wallis

Dans le cours, nous avons travaillé sur les très classiques constante d'Euler et formule de Stirling en exploitant des séries télescopiques. Nous les retrouvons ici par d'autres méthodes.

Constante γ d'Euler

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}.$$

a) Justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

b) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\Gamma_n = \sum_{p=1}^n u_p$.

Justifier que la suite (Γ_n) est convergente, et que sa limite γ vérifie $0 \leq \gamma \leq 1$.

c) En déduire :

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Par rapport au cours, nous avons récupéré une information : $0 \leq \gamma \leq 1$.

Formule de Stirling, à une constante près

On va partir sur une estimation de l'écart en $n!$ et n^n , en considérant $\ln(n!) - n \ln(n)$, différence de leur logarithme.

2. a) Justifier successivement, pour tout entier $n \geq 2$,

$$n \ln(n) = \sum_{k=2}^n (k \ln(k) - (k-1) \ln(k-1))$$

puis

$$\ln(n!) - n \ln(n) = \sum_{k=2}^n (k-1) \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

b) À l'aide d'un développement asymptotique de $(k-1) \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$, justifier l'existence d'une suite (α_k) telle que

$$\alpha_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ et } \ln(n!) - n \ln(n) = -n + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^n \alpha_k$$

c) En déduire, en utilisant la constante d'Euler, que la suite

$$\left(\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n \right)_{n \geq 2}$$

converge.

d) En déduire l'existence d'une constante K telle que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

Les intégrales de Wallis pour déterminer cette constante

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt.$$

3. a) Établir la relation (essentielle!), pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

Cette relation servira à trois reprises dans la suite.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

c) En déduire un équivalent de W_{2n} à l'aide de la constante K de la question 2d).

d) Déduire de 3a) que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

e) Montrer que la suite (W_n) est décroissante et en déduire que

$$W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n.$$

f) Justifier alors que

$$W_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

g) Déterminer la valeur de K .

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

★★★★★

J'entrai dans l'école de mathématiques, dont le maître enseignait à ses étudiants une méthode inimaginable en Europe. Propositions et démonstrations étaient clairement écrites sur une mince gaufrette avec une encre composée d'une teinture céphalique. L'étudiant à jeun était obligé, après avoir avalé cette gaufrette de s'abstenir de boire et de manger pendant trois jours, en sorte que, le pain à chanter étant digéré, la teinture céphalique pût monter au cerveau, et y porter avec elle les propositions et démonstrations. Cette méthode, il est vrai, n'avait pas eu beaucoup de succès jusqu'ici, mais c'était, disait-on, parce que l'on s'était trompé dans le *quantum*, c'est-à-dire dans la mesure de la dose, ou parce que les étudiants, malins et indociles, faisaient seulement semblant d'avalier le bolus, ou bien parce qu'ils mangeaient en cachette pendant les trois jours.

Les voyages de Gulliver
Jonathan SWIFT