

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Les **séries et intégrales de BERTRAND** de paramètres (a, b) sont

$$S_{a,b} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^a \ln^b n} \quad \text{et} \quad I_{a,b} = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a \ln^b t}.$$

1. Peut-on utiliser le critère de D'Alembert pour les séries $S_{a,b}$?
2. Cas $(a, b) = (1, 1)$.
 - a) Soit $c \in \mathbb{R}$. Étudier pour quelles valeurs de c on a $\frac{1}{n \ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^c}\right)$ et pour quelles valeurs de c on a $\frac{1}{n^c} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$.
 - b) Peut-on connaître le comportement que la série $S_{1,1}$ à l'aide d'une comparaison aux séries de Riemann ?
 - c) Montrer que $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}$.
 - d) En déduire la nature de $S_{1,1}$.
 - e) À l'aide d'une primitive, étudier la nature de $I_{1,1}$.
3. On suppose $a > 1$ et b quelconque.
 - a) Déterminer $c > 1$ tel que $\frac{1}{n^a \ln^b n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^c}\right)$. Que peut-on en déduire ?
 - b) Montrer que, au voisinage de $+\infty$, $f_{a,b} : [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t^a \ln^b t}$ est décroissante.
 - c) En déduire, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, la nature de $I_{a,b}$.
4. On suppose $a < 1$ et b quelconque.
 - a) Justifier l'existence d'un réel M tel que $\forall t \geq M, \quad \frac{1}{t^a \ln^b t} \geq \frac{1}{t}$.
 - b) En déduire la nature de $S_{a,b}$ et de $I_{a,b}$.
5. On suppose $a = 1$ et $b \neq 1$.
 - a) On suppose $b < 1$. En comparant $f_{1,b}$ à $f_{1,1}$, déterminer la nature de $S_{1,b}$ et de $I_{1,b}$.
 - b) On suppose $b > 1$. Justifier que $S_{1,b}$ et $I_{1,b}$ sont de même nature.
 - c) Déterminer cette nature commune.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence des séries et intégrales de Bertrand.