Solution (**Ex.1** − *E3A 2002*)

1. Si u est constante, on a pour tout n : $a^2 = a\sqrt{n}$ d'où $a = 0$. Réciproquement, si $a = 0$, u est constante.

2. Si la suite converge vers ℓ, on obtient $\ell = 0$ en passant à la limite dans la définition.

3. Si $u_n \geq \sqrt{n}$, u tend vers $+\infty$ par comparaison.
De $u_{n+1} = u_n \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \geq u_n$ on déduit que u est croissante.

4. a) On le montre par récurrence sur n ; c'est vrai pour $n = k$; si $u_n < \sqrt{n}$, on déduit $u_{n+1} < \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$.

b) Pour $n \geq k$ on a : $u_{n+1} = u_n \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leq u_n$.

c) La suite u est décroissante et minorée (par 0), elle est donc convergente ; d'après le 2°, sa limite est 0.

5. a) Appliquons la fonction ln à $u_{k+1} = \dfrac{u_k^2}{\sqrt{k}}$: $\ln u_{k+1} = 2\ln u_k - \dfrac{\ln k}{2}$; divisons par 2^{k+1} :
$\dfrac{1}{2^{k+1}} \ln u_{k+1} = \dfrac{1}{2^k} \ln u_k - \dfrac{\ln k}{2^{k+2}}$.
Sommons pour k de 1 à $n-1$: $\dfrac{1}{2^n} \ln u_n = \dfrac{1}{2} \ln a - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{\ln k}{2^{k+2}}$.

b) ... d'où $u_n = a^{2^{n-1}} \exp(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^{n-k-2} \ln k)$.

6. a) Comme $\dfrac{2}{3} \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \times \frac{1-(2/3)^n}{1-2/3} = 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$, et comme $\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, la série de terme général $\left(\frac{2}{3}\right)^k$ converge.

b) $\dfrac{w_k}{(2/3)^k} = \dfrac{\ln k}{(4/3)^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée car $\ln k = o\left(\alpha^k\right)$ pour $\alpha > 1$.
Donc $w_k = o\left(\left(\frac{2}{3}\right)^k\right)$. Alors par définition de la limite, avec $\varepsilon = 1$,

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall k \geq \mathrm{N},\ \left|\frac{w_k}{(2/3)^k} - 0\right| \leq 1,$$

et comme ces suites sont positives : $\forall k \geq \mathrm{N},\ \dfrac{w_k}{(2/3)^k} \leq 1$, i.e. $w_k \leq (2/3)^k$.

c) Par comparaion de termes généraux positifs, a) et b) montrent que la série de terme général w_n est convergente.

7. a) Si pour un entier k on a $u_k < 1$ alors $u_k < \sqrt{k}$ ce qui entraine que la suite converge (d'après le 4°). Réciproquement, si la suite converge, sa limite est 0 et par suite il existe $k > 2$ tel que $u_k < 1$.

b) On a calculé : $\dfrac{1}{2^n} \ln u_n = \dfrac{1}{2} \ln a - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{\ln k}{2^{k+2}} = \dfrac{1}{2} \ln a - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{w_{k-1}}{4}$.
Si la suite u converge, on a $u_n < 1$ pour n assez grand, d'où $\ln u_n < 0$ et par suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} w_{k-1} > 2\ln a$; on en déduit que $\mathrm{S} > 2\ln a$, soit $a < \exp(\mathrm{S}/2)$. Réciproquement, si $a < \exp(\mathrm{S}/2)$, donc $\mathrm{S} > 2\ln a$, il existe n tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} w_{k-1} > 2\ln a$ (la suite (Σw_n) est croissante) ; pour ce n on a $\ln u_n < 0$ d'où $u_n < 1$ et la suite u converge.

Solution (**Ex.2** − *Enstim 2007*)

8. a) Par composition de $t \mapsto \dfrac{-1}{t}$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par exp $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $tf'(t) = \dfrac{1}{t} f(t) = g(t)$.

9. a) $\lim\limits_{t\to 0^+} -1/t = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u = 0$, donc par composition : $g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$: g admettant une limite finie en 0, g est prolongeable par continuité en 0... en posant $g(0) = 0$.

b) $\forall t > 0$, $\dfrac{g(t)-g(0)}{t-0} = \dfrac{-1}{t^2} \exp(\dfrac{-1}{t}) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ car $u^2 e^u \xrightarrow[u\to-\infty]{} 0$. Le prolongement par continuité de g est dérivable en 0 avec $g'(0) = 0$.

10. $\forall t > 0, g'(t) = \dfrac{g(t)}{t^2}(1-t)$ est du signe de $1-t$.

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$	0	+	0	−	
$g(t)$	0	↗	e^{-1}	↘	0

11. $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, t \mapsto te^{-t}$

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto t$ et $t \mapsto -e^{-t}$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $[\,1\,;\,x\,]$ (ou $[\,x\,;\,1\,]$ si $x \leq 1$),
$\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_1^x h(t)\mathrm{d}t = \int_1^x te^{-t}\mathrm{d}t = \left[-te^{-t}\right]_1^x + \int_1^x e^{-t}\mathrm{d}t$
$= e^{-1} - xe^{-x} - [e^{-t}]_1^x = 2e^{-1} - (1+x)e^{-x}$

b) Pour $h \in]\,-1\,;\,1[$ (donc au voisinage de 0),
$\mathrm{H}(1+h) = 2e^{-1} - (2+h)e^{-1-h} = e^{-1}\left(2 - (2+h)e^{-h}\right)$
$\underset{h\to 0}{=} e^{-1}\left(2 - (2+h)(1-h+\dfrac{h^2}{2} - \dfrac{h^3}{6} + o(h))\right) \underset{h\to 0}{=} e^{-1}\left(h - \dfrac{h^3}{6} + o(h)\right)$
D'où $\mathrm{H}(x) \underset{x\to 1}{=} e^{-1}\left((x-1) - \dfrac{(x-1)^3}{6}\right) + o\left((x-1)^3\right)$.

12. a) $(\mathrm{E}_n) \iff \dfrac{f(t)}{t} = \dfrac{1}{n} \iff g(t) = \dfrac{1}{n}$. g est continue strictement croissante sur $[\,0\,;\,1]$ avec $g([\,0\,;\,1]) =]\,0\,;\,e^{-1}\,[$, donc $\dfrac{1}{n} \in g([\,0\,;\,1])$ car $n \geq 3 > e$.

Par le théorème de la bijection strictement monotone, $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent α_n dans $]0\,;\,1[$ par g : (E_n) possède une unique solution dans $]0\,;\,1[$.

b) • Pour $n \geq 3$, $\alpha_n \in]0\,;\,1[$, $\alpha_{n+1} \in]0\,;\,1[$ et $g(\alpha_n) = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = g(\alpha_{n+1})$. Or g est strictement croissante sur $]0\,;\,1[$, donc $\alpha_n > \alpha_{n+1}$.
Ainsi la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est strictement décroissante.
• On montre de même la stricte croissance de $(\beta_n)_{n\geq 3}$ car g est strictement décroissante sur $]1\,;\,+\infty[$.

c) Supposons que (α_n) converge vers $\ell \in]0\,;\,1]$.
De : $\forall n \geq 3, g(\alpha_n) = 1/n$, on tire par continuité de g en ℓ, $g(\ell) = 0$, ce qui est impossible car $0 \notin g(]0\,;\,1])$.
Un raisonnement analogue montre qu'il est impossible que (β_n) converge vers $\ell > 0$.
Moralité : si α et β (suites positives) convergent vers une limite, cette limite est nulle.
De plus, α est décroissante minorée par 0 donc convergente, donc converge vers 0.
De même, β est croissante donc soit convergente, mais dans ce cas sa limite serait 0 par ce qui pércède, ce qui est exclu car β est minorée par 1 donc sa limite serait au moins 1, soit tend vers $+\infty$, ce qui est la seule possibilité. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

13. a) On sait déjà que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;\,+\infty[$. Comme $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0 = f(0)$, f est continue sur $[0\,;\,+\infty[$. Comme $f'(t) = \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-1/t} \overset{u=-1/t}{=} u^2\mathrm{e}^u \xrightarrow[u\to-\infty]{} 0$, $f'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$: par le théorème de prolongement de la dérivée, f est dérivable en 0 de dérivée en 0 valant $f'(0) = 0 = \lim\limits_{t\to 0} f'(t)$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

b) $f'(0) = 0$, $g(0) = 0 = 0 \times f'(0)$ donc l'égalité de 8.b) reste valable pour $t = 0$.

14. a) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, f et g sont continues $[0\,;\,x]$ donc $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{G}(x)$ existent.
Effectuons une intégration par parties avec $t \mapsto t$ et f $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\,x[$:
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x 1 \times f(t)\mathrm{d}t = [tf(t)]_0^x - \int_0^x tf'(t)\mathrm{d}t = xe^{-1/x} - \mathrm{G}(x).$$

b) Soit $x \geq 1$. $\mathrm{G}(x) = \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t + \int_1^x g(t)\mathrm{d}t = \mathrm{G}(1) + \int_1^x g(t)\mathrm{d}t$
$\forall t \in [1\,;\,x]$, $g(t) \leq \frac{1}{t}$ car $\mathrm{e}^{-1/t} \leq 1$ donc par croissance de l'intégrale :
$$\int_1^x g(t)\mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \ln(x).$$
Avec $\mathrm{C} = \mathrm{G}(1)$, on a bien : $\forall x \geq 1, \quad 0 \leq \mathrm{G}(x) \leq \mathrm{C} + \ln(x)$.

c) $\forall x \geq 1, \quad 0 \leq \frac{\mathrm{G}(x)}{x} \leq \frac{\mathrm{C}}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$.
Par croissance comparée, le majorant tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ donc par le théorème d'encadrement, $\frac{\mathrm{G}(x)}{x}$ tend vers 0. Ainsi $\mathrm{G}(x)$ est négligeable devant x au voisinage de $+\infty$.
Comme $\mathrm{e}^{-1/x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, $x\mathrm{e}^{-1/x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc $\mathrm{G}(x) = o\left(x\mathrm{e}^{-1/x}\right)$, et ainsi $x\mathrm{e}^{-1/x} - \mathrm{G}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\mathrm{e}^{-1/x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ Donc $\mathrm{F}(x)$ est équivalent à x au voisinage de $+\infty$.

15. a) Les solutions de l'équation homogène (H) : $y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ forment l'ensemble $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{1/x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ car $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

b) Utilisons la méthode de *variation de la constante*.
Soit $\lambda :]0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}$, $h :]0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}$ (donc solution de (H) !) et une fonction dérivable et $y :]0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \lambda(x)h(x)$.
y vérifie (E) ssi $\forall x > 0, x^2\lambda'(x)h(x) + \lambda(x)\big(x^2h'(x) + h(x)\big) = x^2$
ssi $\forall x > 0,\ x^2\lambda'(x)h(x) = x^2$ car h est solution de (H)
ssi $\forall x > 0,\ \lambda'(x) = \frac{1}{h(x)}$ ssi $\forall x > 0,\ \lambda'(x) = f(x)$ ssi $\exists \mathrm{K} \in \mathbb{R},\ \lambda = \mathrm{F} + \mathrm{K}$.
L'ensemble des solutions de (E) est :
$$\left\{y :]0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}(\mathrm{F}(x) + \mathrm{K}), \mathrm{K} \in \mathbb{R}\right\}.$$

16. En prenant $x = 0$ dans (E) il vient immédiatement $u_0 = y(0) = 0$.

17. Dérivons la relation (E) : $\forall x \in [0\,;\,+\infty[, 2xy'(x) + x^2y''(x) + y'(x) = 2x$.
En $x = 0$, on obtient $u_1 = y'(0) = 0$.
Dérivons à nouveau (E) :
$\forall x \in [0\,;\,+\infty[, 2y'(x) + 2xy''(x) + 2xy''(x) + x^2y^{(3)}(x) + y''(x) = 2$.
En $x = 0$, on obtient $u_2 = y''(0) = 2$.

18. Soit $y : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Supposons y solution de (E). Par la question précédente :
$y(0) = 0$ donc $\gamma = 0$, $y'(0) = 0$ donc $\beta = 0$, $y''(0) = 2$ donc $\alpha = 1$. Donc $y : x \mapsto x^2$.
Alors $x^2y'(x) + y(x) : x \mapsto 2x^3 + x^2$ n'étant pas $x \mapsto x^2$, y n'est pas solution de (E), ce qui est contradictoire.
Ainsi, (E) n'admet aucune solution polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

19. a) • Soit $v : [0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. On a : $\forall k \geq 3, v^{(k)} = 0$.
Par la formule de Leibniz :
$$(vy')^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v^{(k)}(y')^{(n-k)} = vy^{n+1} + nv'y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2}v''y^{(n-1)}$$
Ainsi, en dérivant n fois la relation (E), on a bien :
$$x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0.$$
• En $x = 0$, cette relation fournit : $y^{(n)}(0) + n(n-1)y^{(n-1)}(0) = 0$, donc $u_n = -n(n-1)u_{n-1}$.

b) Par récurrence sur $n \geq 2$, on obtient sans peine
$$u_n = (-1)^n n!(n-1)!.$$

c) y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;\,+\infty[$ donc admet des développements limités de tout ordre au voisinage de 0 (à droite nécessairement), donnés par :
$y(x) = o(1)$, $y(x) = o(x)$ et pour $n \geq 2$ par :
$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!}x^k + o\left(x\right) = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k(k-1)!x^k + o\left(x^n\right)$$