Solution (**Ex.1** − *Autour de l'intégrale de Dirichlet*)

1. $g : t \longmapsto \cos(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\mathrm{e}^{-t}\right)$. Comme d'après le cours $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

2. $u : t \mapsto -\cos(\mathrm{e}^t)$ et $v : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $u(t)v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Par intégration par parties, I est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$, qui converge d'après 1.

3. En posant $u = \mathrm{e}^t$, $\mathcal{C}^1$ strictement croissante donc bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[\,1\,;\,+\infty[$, par changement de variable I est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(u) \times \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \mathrm{J}$, donc J existe.

4. $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{u}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[\,0\,;\,1]$ car tend vers 1 en 0 donc l'intégrale faussement généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ existe. Par la relation de Chasles, l'intégrale de DIRICHLET $\mathrm{D} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ existe.

Solution (**Ex.2** − *Wallis like*)

5. $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^{n+1}}$ est continue sur $[\,0\,;\,+\infty[$ et équivalente en $+\infty$ à $x \longmapsto \dfrac{1}{2^{2n+2}}$ intégrable car $2n+2 > 1$, donc est intégrable.

6. $\mathrm{I}_0 = [\mathrm{Arctan}(x)]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2}$.

7. $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\,+\infty[$ avec $u(x)v(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $u(0)v(0) = 0$, donc en intégrant par parties puisque I_0 converge, on a : $\mathrm{I}_0 = -\displaystyle\int_0^{+\infty} x \times \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

Par linéarité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_1$ d'où $\mathrm{I}_0 = 2\mathrm{I}_0 - 2\mathrm{I}_1$ puis $\mathrm{I}_1 = \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_0$.

8. $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^{n+1}}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\,+\infty[$ avec $u(x)v(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $u(0)v(0) = 0$, donc en intégrant par parties puisque I_n converge, on a : $\mathrm{I}_n = -\displaystyle\int_0^{+\infty} x \times \frac{-2(n+1)x}{(1+x^2)^{n+2}}\mathrm{d}x = 2(n+1)\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}}\mathrm{d}x$.

Par linéarité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^{n+2}}\mathrm{d}x = \mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1}$ d'où $\mathrm{I}_n = 2(n+1)\mathrm{I}_n - 2(n+1)\mathrm{I}_{n+1}$ puis $\mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\mathrm{I}_n$.

9. $\mathrm{P}_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = \prod_{k=1}^{n} 2\prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$ et $\mathrm{I}_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = (2n)!/\mathrm{P}_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

En itérant la relation précédente valable pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_n = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\mathrm{I}_0 = \frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{P}_n}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)}\pi.$$

10. *Pour les lectrices attentives :*

le changement de variable $x = \tan t$ est $\mathcal{C}^1$ strictement croissant donc bijectif de $[\,0\,;\,\pi/2[$ sur $[\,0\,;\,+\infty[$ et, en remarquant que $t = \mathrm{Arctan}x$

$$\mathrm{I}_n \overset{x=\tan t}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^n}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t)^n \mathrm{d}t = \mathrm{W}_{2n}.$$

Solution (**Ex.3** − *Somme d'une série alternée grâce à la constante d'Euler*)

11. a) $\forall k \geqslant 3, \quad u_k \geqslant \dfrac{1}{k} \geqslant 0$ donc par comparaison de t.g. positifs, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} u_k$ diverge puisque la série harmonique diverge.

b) f est dérivable car quotient de fonctions usuelles dérivables dont le dénonimateur ne s'annule pas sur $[\,1\,;\,+\infty[$ et pour $t \geqslant l1$, $f'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2}$ donc f est strictement croissante sur $[\,1\,;\,\mathrm{e}]$ et strictement décroissante sur $[\,\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

c) Soit $k \geqslant 4$. Par décroissance de f sur $[\,k-1\,;\,k]$ et sur $[\,k\,;\,k+1]$, on a :

$$\forall t \in [\,k-1\,;\,k\,], f(t) \geqslant f(k) \text{ et } \forall t \in [\,k\,;\,k+1\,], f(k) \geqslant f(t).$$

Par croissance de l'intégrale et puisqu'une primitive de f est $t \longmapsto \ln^2 t/2$, on obtient

$$\frac{1}{2}\left(\ln^2(k+1) - \ln^2(k)\right) \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{2}\left(\ln^2(k) - \ln^2(k-1)\right)$$

d) Pour $n \geqslant 4$, en écrivant $\mathrm{S}_n = \mathrm{S}_3 + \displaystyle\sum_{k=4}^{n} u_k$ et en sommant les encadrements précédents de 4 à n, on obtient par télescopage :

$$\mathrm{S}_3 + \frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^4(4) \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \mathrm{S}_3 + \frac{1}{2}\ln^2(n) - \frac{1}{2}\ln^4(3).$$

Les constantes étant négligeables devant les termes tendant vers $+\infty$, le minorant est équivalent $\dfrac{1}{2}\ln^2(n+1)$ et le majorant à $\dfrac{1}{2}\ln^2(n)$. Or $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, donc par le théorème des gendarmes

$$\boxed{\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln^2(n)).}$$

12. a) Pour $n \geqslant 4$, $w_n - w_{n-1} = u_n - \dfrac{1}{2}\ln^2(n) + \dfrac{1}{2}\ln^2(n-1) \leqslant 0$ par 11.c).

b) Par l'encadrement de S_n issu de 11.d), pour tout $n \geqslant 4$, $w_n \geqslant \mathrm{S}_3 + \dfrac{1}{2}(\ln^2(n+1) - \ln^2(n)) - \dfrac{1}{2}\ln^4(4) \geqslant \mathrm{S}_3 - \dfrac{1}{2}\ln^4(4)$ donc la suite (w_n) est minorée. Étant décroissante, elle converge vers une constante C : $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{C} + o\,(1)$ donc

$$\boxed{\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln^2(n) + \mathrm{C} + o\,(1).}$$

13. a) D'après 11.b) $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante, et de limite nulle par croissances comparées. Donc par le théorème spécial des séries alternées $\displaystyle\sum_{n\geq 3}(-1)^n u_n$ converge, donc série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{A}_{2n} = \sum_{k=1}^{n} u_{2k} - \sum_{k=1}^{n} u_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} u_{2k} - \left(\sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_{2k}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} u_{2k} - \mathrm{S}_{2n}$,
or $\sum_{k=1}^{n} u_{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2)+\ln(k)}{2k} = \frac{\ln(2)}{2}\mathrm{H}_n + \frac{1}{2}\mathrm{S}_n$, d'où $\mathrm{A}_{2n} = \ln(2)\mathrm{H}_n + \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{2n}$.

c) À l'aide des constantes d'Euler et de Stieltjes,
$\mathrm{A}_{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2)(\ln(n)+\gamma) + \frac{1}{2}\ln^2(n) + \mathrm{C} - \frac{1}{2}\ln^2(2n) - \mathrm{C} + o(1)$
Arrangeons à la mode collège et lycée :
$\ln^2(n) - \ln^2(2n) = (\ln(n) - \ln(2n))(\ln(n) + \ln(2n)) = -\ln(2)(\ln(2) + 2\ln(n))$, alors
$\mathrm{A}_{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2} + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln(2)}{2}\big(2\gamma - \ln(2)\big)$.
Par convergence de la série alternée, sa somme est la limite de la suite extraite (A_{2n}) :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} = \frac{\ln(2)}{2}\big(2\gamma - \ln(2)\big).}$$

14. *Pour les lecteurs attentifs :*

Le théorème de Leibniz, que nous avons appliqué à partir de $n = 3$, indique que $\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n u_n$ est négative car du signe de son premier terme :
$\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n u_n \leqslant 0$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n + u_1 - u_2 \leqslant 0$ donc $\frac{\ln(2)}{2}\big(2\gamma - \ln(2)\big) - \frac{\ln(2)}{2} \leqslant 0$ soit $2\gamma - \ln(2) - 1 \leqslant 0$ et finalement $\gamma \leqslant \frac{\ln(2)+1}{2}$.

Solution (**Ex.4** − *Sur une série trigonométrique*)
Soit θ un réel non multiple de 2π.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}$$

15. θ un multiple de 2π donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$ et la série de terme général u_n diverge : c'est la série harmonique.

16. a) Puisque $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 0$, $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \frac{\mathrm{e}^{i\theta(n+1)} - 1}{\mathrm{e}^{i\theta} - 1}$.
Rappelons que pour tout nombre complexe z, $|\mathcal{R}e(z)| \leqslant |z|$.
Comme $\mathrm{S}_n = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right)$, $|\mathrm{S}_n| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right| \leqslant \left|\frac{\mathrm{e}^{i\theta(n+1)} - 1}{\mathrm{e}^{i\theta} - 1}\right| \leqslant \left|\frac{2}{\mathrm{e}^{i\theta} - 1}\right|$ par l'inégalité triangulaire.

b) $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{S}_k - \mathrm{S}_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{S}_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{S}_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{S}_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{S}_k}{k+1} =$
$\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{S}_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathrm{S}_0 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{S}_k}{k(k+1)} - 1 + \frac{\mathrm{S}_n}{n}$.

c) (S_n) est bornée donc d'une part $\frac{\mathrm{S}_k}{k(k+1)} \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ donc la série $\sum \frac{\mathrm{S}_k}{k(k+1)}$ converge, et d'autre part $\frac{\mathrm{S}_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série de terme général u_n converge.

17. a) Comme $|\cos(x)| \in [\,0\,;\,1]$, $|\cos(x)|^2 \leqslant |\cos(x)|$, et évidement $|\cos(x)|^2 = \cos^2(x)$.
Alors $|u_n| = \left|\frac{\cos(n\theta)}{n}\right| \geqslant \frac{\cos^2(n\theta)}{n}$ et comme $\cos^2\alpha = \frac{\cos(2\alpha)+1}{2}$, $|u_n| \geqslant \frac{\cos(2n\theta)}{2n} + \frac{1}{2n} \geqslant 0$, la positivité étant garantie par le fait que $\cos(2n\theta) \geqslant 0$.

b) • Si θ est multiple de π, $\cos(n\theta) = (-1)^n$ et $|u_n| = \frac{1}{n}$ donc $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ diverge.

• Si θ n'est pas multiple de π, 2θ n'est pas multiple de 2π donc par 16.c) la série de terme général $\frac{\cos(2n\theta)}{n}$ converge. Alors la série de terme général $\frac{\cos(2n\theta)}{2n} + \frac{1}{2n}$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.
Par comparaison de termes généraux positifs, $\sum |u_n|$ diverge.

Solution (**Ex.5** − *Exercice sans trop d'indications*)

18. $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 + \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2}{6}$.

19. $f :]\,0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t\lfloor 1/t \rfloor$ est continue par morceaux.
Comme : $\forall t > 1, f(t) = 0$, $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.
Comme $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ par le théorème d'encadrement pour les équivalents puisque $x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 1$ et l'intégrale est faussement généralisée en 0.

20. On a déjà remarqué que $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$.
L'idée est de travailler sur des intervalles où la partie entière est connue :
$\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = n \Leftrightarrow n \leqslant \frac{1}{t} < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < t \leqslant \frac{1}{n}$
Coupons alors l'intervalle $]\,0\,;\,1] :]\,0\,;\,1] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]\frac{1}{n+1}\,;\,\frac{1}{n}\right]$.

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{1/(n+1)}^{1/n} t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{1/(n+1)}^{1/n} t \times n\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1/(n+1)}^{1/n} =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12}}$$