Exercice 1 *E3A 2002*

Soit a un réel positif ou nul. On considère la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$u_1 = a \text{ et : } \forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle la suite u est constante. Déterminer cette valeur.

2. On suppose que la suite u converge vers une limite finie ℓ. Montrer que $\ell = 0$.

3. On suppose que la suite u vérifie la propriété :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n \geq \sqrt{n}.$$

Montrer que u est une suite croissante qui tend vers $+\infty$.

4. On suppose que la suite u vérifie la propriété :

$$(\sharp) : \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_k < \sqrt{k}.$$

a) Montrer que $u_n < \sqrt{n}, \forall n \geq k$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq k}$ est décroissante.

c) Que peut-on en déduire pour la suite u ?

5. a) Pour $k \geq 1$, calculer $\dfrac{1}{2^{k+1}} \ln u_{k+1} - \dfrac{1}{2^k} \ln u_k$ et en déduire $\dfrac{1}{2^n} \ln u_n$ sous forme d'une somme.

b) En déduire u_n en fonction de a et de n, pour tout entier naturel n.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$w_n = \frac{\ln n}{2^n} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$$

de sorte que

$$\frac{1}{2^n} \ln u_n = \frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{4} \mathrm{S}_{n-1}.$$

6. Dans cette question, on considère de plus la série de terme général w_n, dont la suite des somme partielle est $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a) Rappeler la valeur, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$, et en déduire la nature de la série de terme général $\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$.

b) Justifier que $w_k = o\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\right)$, et en déduire l'existence d'un entier naturel N tel que :

$$\forall k \geq \mathrm{N}, \quad w_k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

c) La série de terme général w_n est-elle convergente ?

7. On note S la limite de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

a) Montrer que la suite u est convergente si et seulement si il existe un entier $k > 2$ tel que $u_k < 1$.

b) En déduire que la suite u est convergente si et seulement si $a < \exp(\mathrm{S}/2)$.

Exercice 2 *Enstim 2007*

Les 3 parties sont largement indépendantes

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on définit

$$f(t) = \exp\left(\frac{-1}{t}\right) \text{ et } g(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

Partie A – Étude de f et g

8. a) Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, que vaut $tf'(t)$?

9. a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

b) Montrer que le prolongement par continuité de g, que l'on notera encore g, est dérivable en 0. Préciser $g'(0)$.

10. a) Dresser le tableau de variations de g.

b) Esquisser l'allure de sa courbe.

11. Soit H la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $h : t \mapsto g(1/t)$, s'annulant en 1.

a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer H.

b) Montrer que, au voisinage de 1, $\mathrm{H}(x) = e^{-1}\left((x-1) - \dfrac{(x-1)^3}{6}\right) + o\left((x-1)^3\right)$.

12. Soit $n \geq 3$ un entier naturel. On introduit l'équation

$$(\mathrm{E}_n) \ : \ f(t) = t/n,$$

d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$.

a) En utilisant la question 10, montrer que (E_n) a une unique solution dans $]\,0\,;\ 1[$, que l'on notera α_n.

On montrerait identiquement (mais ce n'est pas à faire) que (E_n) admet une unique solution dans $]\,1\,;\ +\infty[$, que l'on notera β_n.

b) Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ et $(\beta_n)_{n\geq 3}$ sont monotones.

c) Est-il possible que l'une des deux suites converge vers une limite $\ell > 0$? En déduire leurs limites.

Partie B – Fonctions définies par des intégrales

On prolonge maintenant f à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$.

13. a) Montrer que l'application f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

b) Préciser $f'(0)$ et montrer que l'égalité de la question 8.b) reste valable pour $t = 0$.

14. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note : $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de ces intégrales que l'on ne cherchera surtout pas à calculer puis montrer que

$$\mathrm{F}(x) = xe^{-1/x} - \mathrm{G}(x).$$

b) En séparant l'intégrale $\mathrm{G}(x)$ en deux, montrer qu'il existe une constante C réelle telle que pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq \mathrm{G}(x) \leq \mathrm{C} + \ln(x).$$

c) En déduire que $\mathrm{G}(x)$ est négligeable devant x au voisinage de $+\infty$ ainsi qu'un équivalent de $\mathrm{F}(x)$ au voisinage de $+\infty$.

15. a) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (H) : $x^2y' + y = 0$.

b) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E) : $x^2y' + y = x^2$, l'expression générale de la solution fera apparaître la fonction F.

Partie C – Étude qualitative d'une équation différentielle

On considère maintenant une application y solution de (E) : $x^2y' + y = x^2$ cette fois sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. Nous allons, sans aucun calcul explicite de y, déterminer entièrement la suite des $u_n = y^{(n)}(0)$ à partir de l'équation (E).

16. Justifier que $u_0 = 0$.

17. En dérivant (E), calculer $u_1 = y'(0)$ et $u_2 = y''(0)$.

18. Peut-on avoir y de la forme : $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$?

19. Soit n un entier naturel.

a) On suppose ici $n \geq 3$. Prouver à l'aide de la formule de Leibniz que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x^2y^{(n+1)}(x) + (1+2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0.$$

En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $u_n = (-1)^n n!(n-1)!$.

c) En déduire les développements limités (dont on justifiera l'existence) de y à tout ordre au voisinage de 0.