CONSIGNES On **encadrera** la réponse finale **à chaque question**, on **signalera explicitement tout résultat admis** et on **numérotera chaque page**.

⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 1 *Autour de l'intégrale de Dirichlet*

On considère l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$.

1. Justifier que la fonction $t \longmapsto \cos(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. En écrivant $\sin(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^t \sin(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}$, démontrer l'existence de I.

3. En déduire à l'aide d'un changement de variable l'existence de $\mathrm{J} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$.

4. Justifier enfin l'existence de l'intégrale de DIRICHLET définie par $\mathrm{D} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$.

Exercice 2 *Wallis like*

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}$

5. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'existence de I_n.

6. Calculer I_0.

7. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathrm{I}_0 = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ et en déduire que $\mathrm{I}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{I}_0$.

8. Plus généralement, montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\mathrm{I}_n$.

9. Justifier que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n n!$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, et en déduire une expression de I_n à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et du nombre π.

10. *Les lectrices attentives auront pu remarquer une ressemblance avec les intégrales de Wallis du D.M. no2.* Effectuer dans I_n le changement de variable $x = \tan t$ et établir un lien entre I_n et les intégrales de Wallis définies par $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 3 *Somme d'une série alternée grâce à la constante d'Euler*

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

11. a) Établir que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} u_k$ diverge.

b) Étudier les variations de $\quad f : [\,1\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$.

c) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 4$, $\quad \dfrac{1}{2}\big(\ln^2(k+1) - \ln^2(k)\big) \leqslant u_k \leqslant \dfrac{1}{2}\big(\ln^2(k) - \ln^2(k-1)\big)$

d) En déduire un encadrement de S_n lorsque $n \geqslant 4$, puis justifier que : $\quad \mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\ln^2(n))$

12. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $w_n = \mathrm{S}_n - \dfrac{1}{2}\ln^2(n)$.

a) Justifier que $(w_n)_{n\geqslant 3}$ est une suite décroissante.

b) En déduire l'existence d'une constante réelle C (appelée constante de Stieltjes) telle que $\quad \mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2}\ln^2(n) + \mathrm{C} + o\,(1)$.

13. On s'intéresse maintenant à la série alternée de terme général $(-1)^n u_n$ et on pose pour tout $n \geqslant 1$

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k.$$

a) Justifier la convergence de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

b) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad \mathrm{A}_{2n} = \ln(2)\mathrm{H}_n + \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{2n}$.

c) On rappelle l'existence de la constante γ d'Euler vérifiant : $\quad \mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$, résultat qu'on ne demande pas de redémontrer.

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} = \frac{\ln(2)}{2}\big(2\gamma - \ln(2)\big)$$

14. En déduire que $\gamma \leqslant \dfrac{\ln(2)+1}{2}$.

Les lecteurs attentifs auront pu remarquer que dans D.M. no2 nous avions déjà établi $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

Exercice 4 *Sur une série trigonométrique*

Soit θ un réel non multiple de 2π.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}$$

15. Quelle est la nature de la série de terme général u_n si θ un multiple de 2π ?

Dans toute la suite, on suppose que θ n'est pas un multiple de 2π

16. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.

a) Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$ et montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\mathrm{S}_n| \leqslant \dfrac{2}{|\mathrm{e}^{i\theta}-1|}$

Autrement dit, la suite (S_n) *est bornée.*

b) En observant que, pour $k \geqslant 1$, $\cos(k\theta) = \mathrm{S}_k - \mathrm{S}_{k-1}$, justifier que $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{S}_k}{k(k+1)} - 1 + \frac{\mathrm{S}_n}{n}$.

c) En déduire la convergence de la série de terme général u_n.

17. a) Justifier que, pour tout réel x, $|\cos(x)| \geqslant \cos^2(x)$ puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \geqslant \frac{\cos(2n\theta)}{2n} + \frac{1}{2n} \geqslant 0$$

b) En déduire que la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente.

Exercice 5 *Exercice sans trop d'indications*

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

18. En exploitant $\dfrac{2k+1}{k(k+1)^2} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{(k+1)^2}$, calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{k(k+1)^2}$.

19. La notation $\lfloor \alpha \rfloor$ désigne la partie entière du réel α.

Montrer que l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \mathrm{d}t$ converge.

20. Calculer I.

⋆⋆⋆⋆⋆

J'étais alors en proie à la mathématique.
Temps sombre ! enfant ému du frisson poétique,
Pauvre oiseau qui heurtais du crâne mes barreaux,
On me livrait tout vif aux chiffres, noirs bourreaux ;
On me faisait de force ingurgiter l'algèbre :
On me liait au fond d'un Boisbertrand funèbre ;
On me tordait, depuis les ailes jusqu'au bec,
Sur l'affreux chevalet des X et des Y ;
Hélas ! on me fourrait sous les os maxillaires
Le théorème orné de tous ses corollaires ;
Et je me débattais, lugubre patient
Du diviseur prêtant main-forte au quotient.
De là mes cris.
Victor Hugo. *Les Contemplations*