Solution (**Ex.1 –** *Constante d'Euler, Formule de Stirling et Intégrales de Wallis*)

1. a) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [p\,;\,p+1]$, $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{p}$ donc par croissance de l'intégrale $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{p}$ qui entraîne $0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

b) **EXPLOITONS LES COURS AU MAXIMUM!**

• La série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ converge car la suite $\left(\dfrac{1}{p}\right)$ converge.

• Par comparaison de termes généraux positifs, la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} u_p$ converge donc la suite (Γ_n) converge.

• Pour encadrer γ, on somme les inégalités précédentes : $0 \leqslant \Gamma_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n+1}$ et on passe à la limite : $\gamma \in [0\,;\,1]$.**ET C'EST FINI... SINON on peut effectivement procéder sur la suite** (Γ_n) avec les arguements suivants :

• Par positivité des u_p, (Γ_n) est croissante.

• En sommant les encadrements précédents pour p parcourant $[\![1\,;\,n]\!]$, $0 \leqslant \Gamma_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Donc (Γ_n) est majorée par 1.

• Ainsi la suite (Γ_n) est convergente, et sa limite γ vérifie $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

c) D'une part : $\Gamma_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n) + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

D'autre part $\Gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$, et comme $\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, on en déduit :

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).}$$

2. a) Soit $n \geqslant 2$.

• Par télescopage, et comme $1 \times \ln(1) = 0$, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$n\ln(n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \Big(k\ln(k) - (k-1)\ln(k-1)\Big)$.

• $\ln(n!) - n\ln(n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n} \Big(k\ln(k) - (k-1)\ln(k-1)\Big) = \sum_{k=2}^{n} (k-1)[\ln(k-1) - \ln(k)] = \sum_{k=2}^{n} (k-1)\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$

b) • $(k-1)\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} (k-1)\left(-\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2k^2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k^3}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{=} -1 + \dfrac{1}{2k} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$.

• Toujours pour $n \geqslant 2$, il vient, en notant $a_k = (k-1)\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) + 1 - \dfrac{1}{2k}$ de sorte que $\alpha_k \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$:

$\ln(n!) - n\ln(n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(-1 + \frac{1}{2k} + \alpha_k\right) = -(n-1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k$

c) En utilisant la constante d'Euler,

$\ln(n!) - n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} -n + 1 + \dfrac{1}{2}\ln(n) + \dfrac{1}{2}\gamma + o(1) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \alpha_k$ puis

$\ln(n!) - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln(n) + n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{2}\gamma + o(1) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \alpha_k$.

Comme $\alpha_k \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, la série de terme général a_k converge donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \alpha_k$ admet une limite finie S

lorsque n tend vers $+\infty$.

Ainsi $\ln(n!)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)+n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell = 1+\frac{1}{2}\gamma+S$, *CQFD*.

d) Comme $\exp\left(\ln(n!)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)+n\right) = \frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}$, on a : $\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} K = e^{\ell}$. D'où l'existence d'une constante K telle que $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} Kn^n e^{-n}\sqrt{n}.}$

3. a) On écrit $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \sin t \,dt$ et on effectue une intégration par parties en dérivant $\sin^{n+1}$ et en primitivant sin, toutes les fonction s étant $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi/2]$:

$W_{n+2} = \left[\sin^{n+1} t\cos t\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t\cos^2 t\,dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t(1-\sin^2 t)dt = (n+1)(W_n - W_{n+2})$) d'où la relation (♡) $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.

b) **Cette relation peut se justifier par réucurrence sur n...**

• $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{2^0(0!)^2}\frac{\pi}{2}$.

• Si $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$, alors par (♡), et en multipliant par $\frac{2n+2}{2n+2}=1$,

$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}$, et la relation est héréditaire.

... mais on peut aussi expliciter le produit des nombres pairs et des nombres impairs :

$P_n = \prod_{k=1}^{n}(2k) = \prod_{k=1}^{n} 2\prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$ et $I_n = \prod_{k=1}^{n}(2k-1) = (2n)!/P_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ d'où $\frac{I_n}{P_n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

c) En exploitant $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} Kn^n e^{-n}\sqrt{n}$, il vient $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{K\sqrt{2n}}$.

d) Cette relation peut se justifier par réucurrence sur n.

• $W_0W_1 = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\sin t\,dt = \frac{\pi}{2}\times 1 = \frac{\pi}{2}$.

• Si $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$, alors par (♡),

$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+2)\frac{n+1}{n+2}W_nW_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

e) • Pour tout n de $\mathbb{N}$, $W_{n+1}-W_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n(t)(\sin(t)-1)dt \leqslant 0$ car on intègre une fonction négative sur le segment $[0;\pi/2]$.

• *Il est dit que (♡) interviendrait TROIS fois...*

On a : $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$, donc $\frac{n+1}{n+2}W_n \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$, or $\frac{n+1}{n+2}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$, donc par le théorème des gendarmes $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

f) On a $W_{2n+1}W_{2n} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$ avec $W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{2n}$. Donc $W_{2n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4n}$.

Or pour tout n $W_{2n} \geqslant 0$ comme intégrale d'une fonction positive. Donc $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$.

g) Ainsi $\frac{\pi}{K\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$, donc $K \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$, et comme K est une constante, $K = \sqrt{2\pi}$.

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$