Dans ce problème, on s'intéresse à une façon de ramener la matrice d'un endomorphisme à une matrice diagonale par blocs dont les deux blocs ont des formes particulières. Cette méthode est connue sous le nom de *décomposition de Fitting* ou *lemme de Fitting* [1]

Problème 1 *Noyaux et images itérés, décomposition de Fitting*

$\mathbb{K}$ désigne le corps des scalaires $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On rappelle qu'un endomorphisme φ, respectivement une matrice M, est dit *nilpotent* s'il exsite un entier naturel k tel que $\varphi^k = 0$, respectivement $M^k = 0$.

Étude d'un exemple

On considère l'endomorphisme φ de $E = \mathbb{K}^4$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. a) Déterminer les sous-espaces $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ en donnant une base de chacun d'eux. Sont-ils supplémentaires dans E ?

b) Déterminer les sous-espaces $N = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$ et $A = \mathrm{Im}(\varphi^2)$ en donnant une base de chacun d'eux.

c) Justifier que A et N sont stables par φ et supplémentaires dans E.

2. a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E que l'on déterminera dans laquelle la matrice représentative de φ est

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) On note α l'endomorphisme induit par φ sur A :

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & A & \longrightarrow & A \\ & u & \longmapsto & \varphi(u) \end{array}.$$

Justifier que α est un automorphisme de A.

c) On note ν l'endomorphisme induit par φ sur N :

$$\begin{array}{rccc} \nu : & N & \longrightarrow & N \\ & u & \longmapsto & \varphi(u) \end{array}.$$

Justifier que ν est un endomorphisme nilpotent de A.

1. Hans Fitting (13 novembre 1906 à Mönchengladbach - 15 juin 1938 à Königsberg) est un mathématicien allemand spécialisé en algèbre qui, avant sa mort précoce, développa d'importants concepts en théorie des groupes finis. *Source : wikipédia*

Cas général

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et φ un endomorphisme de E.

3. *Noyaux itérés*

a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(\varphi^k) \subset \mathrm{Ker}(\varphi^{k+1})$.

b) Montrer que, s'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(\varphi^k) = \mathrm{Ker}(\varphi^{k+1})$ alors $\mathrm{Ker}(\varphi^{k+1}) = \mathrm{Ker}(\varphi^{k+2})$.

c) En considérant la suite $\left(\dim(\mathrm{Ker}(\varphi^k))\right)_{k\in\mathbb{N}}$, montrer qu'il existe un entier j tel que $\mathrm{Ker}(\varphi^j) = \mathrm{Ker}(\varphi^{j+1})$.

d) Montrer alors qu'il existe un unique entier p tel que :

$$0_E = \mathrm{Ker}(\varphi^0) \subsetneq \mathrm{Ker}(\varphi^1) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(\varphi^p) = \mathrm{Ker}(\varphi^{p+1}) = \mathrm{Ker}(\varphi^{p+2}) = \ldots$$

« $\subsetneq$ » signifiant « inclus dans mais non égale à » ou « strictement inclus » :

$$A \subsetneq B \text{ si, et seulement si, } \begin{cases} \forall x \in A, x \in B \\ \exists x \in B \setminus A \end{cases}$$

4. *Images itérées*

a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(\varphi^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(\varphi^k)$.

b) En déduire, grâce à un argument de dimension, que

$$E = \mathrm{Im}(\varphi^0) \supsetneq \mathrm{Im}(\varphi^1) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathrm{Im}(\varphi^p) = \mathrm{Im}(\varphi^{p+1}) = \ldots$$

où l'entier p est celui défini dans la question précédente et où « $\supsetneq$ » signifie « contient strictement ».

5. *Décomposition de Fitting*

On note A et N les sous-espaces de E définis par

$$A = \mathrm{Im}(\varphi^p) \quad \text{et} \quad N = \mathrm{Ker}(\varphi^p).$$

a) Justifier que A et N sont stables par φ, et supplémentaires.

b) Montrer que l'endomorphisme induit par φ sur N, que l'on notera φ_N, est nilpotent.

c) Montrer que l'endomorphisme induit par φ sur A, que l'on notera φ_A, est un automorphisme.

6. *Une caractérisation de* N *et de* A

a) Soit ν un sous-espace vectoriel de E stable par φ et tel que l'endomorphisme induit par φ sur ν soit nilpotent. Montrer que $\nu \subset N$.

b) Soit α un sous-espace vectoriel de E stable par φ et tel que l'endomorphisme induit par φ sur α soit un automorphisme. Montrer que $\alpha \subset A$.

Ainsi, A (respectivement N) est le plus gros sous-espace vectoriel de E stable par φ tel que la restriction de φ à A (respectivement N) soit bijective (respectivement nilpotente).

7. *Décomposition matricielle de Fitting*

Montrer que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs du type

$$F = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

avec B inversible et C nilpotente. On n'exclut pas que $B \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R})$ c'est-à-dire que F = C, ou que $C \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R})$ c'est-à-dire que F = B.

8. *Nécessité de la finitude de la dimension*

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et Δ l'endomorphisme de dérivation : $\Delta(P) = P'$ pour tout P de E.

Montrer qu'il n'existe pas de sous-espaces vectoriels A et N stables par Δ et supplémentaires tels que l'endomorphisme induit par Δ sur A soit bijectif et celui induit sur N soit nilpotent. *On pourra raisonner par l'absurde.*