Exercice 1 *L'endomorphisme « transposition »*

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M \mapsto M^T$.

Déterminer f^2, $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{Tr}(f)$ et $\det(f)$.

Solution (**Ex.1 –** *L'endomorphisme « transposition »*)

$f^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, donc f est un automorphisme involutif ($f^{-1} = f$), donc $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$.

Dans une base obtenue en concaténant une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(K)$ des matrices symétriques, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$, et une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n(K)$ des matrices antisymétriques, de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$, qui sont supplémentaires, la matrice de f est $diag(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$ et :

$$\mathrm{Tr}((f) = \frac{n(n+1)}{2} \times 1 + \frac{n(n-1)}{2} \times (-1) = n,$$

$$\det((f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Exercice 2 *Matrices par blocs et supplémentaires stables*

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f l'endomorphisme de E défini par

$$f(1) = f(X) = X + 1 \quad \text{et} \quad f(X^2) = f(X^3) = X^3 + X^2.$$

1. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

2. a) Écrire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de E.

b) En déduire deux sous-espaces non triviaux supplémentaires et stables par f.

3. a) Montrer que $p \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{2} f$ est un projecteur.

b) En déduire deux sous-espaces (non triviaux et distincts des précédents) supplémentaires et stables par f.

Solution (**Ex.2 –** *Matrices par blocs et supplémentaires stables*)

1. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \mathrm{Vect}(X + 1, X^3 + X^2)$ est de dimension 2.
Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2$.
Par linéarité, $f(1 - X) = f(1) - f(X) = 0$ et $f(X^3 - X^2) = 0$.
Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1 - X, X^3 - X^2)$.

2. a) $M \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) On déduite de cette écriture par blocs que $\mathrm{Vect}(1, X)$ et $\mathrm{Vect}(X^2, X^3)$ sont stables par f. Ils sont supplémentaires puisqu'en concaténant leurs bases $(1, X)$ et (X^2, X^3), on obtient la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. a) $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = \dfrac{1}{2} M$ et $M^2 = 2M$, donc $(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p))^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)$ et $p^2 = p$: p est un projecteur.

b) p étant un projecteur, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par p et supplémentaires. Or $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(f)$, et comme $f = 2p$, tout sous-espace stable par p est stable par f.
Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1 - X, X^3 - X^2)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X + 1, X^3 + X^2)$ sont deux sous-espaces supplémentaires et stables par f, distincts des précédents.

Exercice 3 *Exemple de diagonalisation par blocs*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (x - y, x - 2y + z, x - 4y + 2z).$$

1. a) On pose $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $G = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
Montrer que F et G sont supplémentaires et stables par f.

b) Donner une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice représentant f dans $\mathcal{C}$ s'écrive

$$mat_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

2. a) Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel.
On suppose que $f(u) = \lambda u$. Montrer que $\det((f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$.

b) En déduire qu'il n'existe pas de base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.

Solution (**Ex.3 –** *Exemple de diagonalisation par blocs*)

1. a) $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((1, 0, -1))$ et $G = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, 1))$.
$u \in F \cap G \Longrightarrow (f(u) = u$ et $f^2(u) = -u) \Longrightarrow u = -u \Longrightarrow u = 0$: F et G sont en somme directe.
$\dim(F) + \dim(G) = \dim \mathbb{R}^3$.

Donc $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
$u \in F \Longrightarrow f(u) = u \Longrightarrow f(u) \in F$,
$u \in G \Longrightarrow f^2(u) = -u \Longrightarrow f^3(u) = -f(u) \Longrightarrow (f^2 + id)(f(u)) = 0 \Longrightarrow f(u) \in G$, F et G sont stables.

b) Prenons $u = (1,0,-1) \in F$, alors $f(u) = u$.
Prenons $v = (1,-1,0) \in G$ et $w = f(v) = (2,3,5)$. Alors $f(w) = f^2(v) = -v$. On vérifie sans peine que $\mathcal{C} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et on a :

$$mat_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

2. a) $u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, donc $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$ et $f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injectif, donc pas bijectif : $\det(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$.

b) Supposons qu'une telle base $\mathcal{D} = (a,b,c)$ existe et que $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}(f) = diag(\lambda, \mu, \nu)$.
Alors λ, μ et ν sont des racines de $P(x) \overset{\text{déf.}}{=} \det(f - x\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
Or $\det\left(f - x\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix}\right) = (1-x)(x^2+1)$.
Donc $\lambda = \mu = \nu = 1$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}(f) = I_3$, donc $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, ce qui est manifestement faux.
Ainsi il n'existe pas de base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.

Exercice 4 *Trace et crochets*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$AB - BA = I_n \ ?$$

Solution (**Ex.4 –** *Trace et crochets*)
$\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0$ et $\mathrm{Tr}(I_n) = n$. Comme $n \neq 0$, il est impossible que $AB - BA = I_n$...

Exercice 5 *Matrices semblables*
Montrer que

$$M \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Solution (**Ex.5 –** *Matrices semblables*)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. Il s'agit de montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (u,v,w)$ telle que $T = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$.

Or : $T = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(u) = 2u \\ f(v) = v \\ f(w) = v + w \end{cases}$

Ceci conduit à des systèmes linéaires dont une solution est $\begin{cases} u = (0,1,0) \\ v = (2,0,-1) \\ w = (1,1,-1) \end{cases}$

On vérifie que cette famille est de rang 3, car $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$, donc forme une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$, ce qui prouve que M et T sont semblables, puisqu'elles représentent un même un endomorphisme dans deux bases distinctes.

Exercice 6 *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[X]$
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$ la base canonique de E, f l'application définie par :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P + P' + P^{(2)} + P^{(3)}$$

1. Déterminer $M \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

2. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$. Que peut-on dire de f ?

3. a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{V}$ des réels α tels que $f - \alpha id_E$ ne soit pas bijectif.

b) Pour chaque $\alpha \in \mathcal{V}$, déterminer $E_\alpha \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Ker}(f - \alpha id_E)$.

c) En déduire qu'il n'existe pas de base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

4. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme réciproque de f.

5. Quel est l'antécédent de X^3 par f ?

Solution (**Ex.6 –** *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[X]$)

1. $M \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 4$. $\text{Im}(f) = E$ car $\text{Im}f \subset E$ et $\dim \text{Im}f = \dim E$. $\text{Ker}f = \{0\}$ car $\dim \text{Ker}f = 4 - 4 = 0$.
f est un automorphisme de E.

3. a) $f - \alpha id_E$ non bijectif ssi $\text{rg}(f - \alpha id_E) \neq 4$ ssi $\text{rg}(M - \alpha I_4 \neq 4$ ssi $\alpha = 1$. Ainsi $\mathcal{V} = \{1\}$.

b) $E_1 = \text{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$.

c) Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une base $=(P, Q, R, S)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = diag(a, b, c, d)$.
Alors $f(P) = aP$ donc $P \in \text{Ker}(f - aid_E)$, donc $\text{Ker}(f - aid_E) \neq \{0\}$ et $f - aid_E$ n'est pas bijectif. Par 3.a), $a = 1$. Il en est de même pour b, c et d.
Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = I_4 = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(id_E)$, donc $f = id_E$. Ce qui est absurde.
Donc 'il n'existe pas de base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

4. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1} = M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $f(P) = X^3 \iff P = f^{-1}(X^3) = X^3 - 3X^2$ d'après $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$.

Exercice 7 *Une matrice « pascalienne » 1*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $\mathcal{P} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficients

$$\forall (i, j) \in [\![1 ; n+1]\!], \qquad p_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}.$$

1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{C} \overset{\text{déf.}}{=} \left(1, X+1, (X+1)^2, \ldots, (X+1)^n\right)$.

a) Justifier que $\mathcal{P}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

b) Pour (j, k) dans $\mathbb{N}^2$, calculer $(X^k)^{(j)}$, et en déduire $\mathcal{P}^{-1}$ grâce à la formule de Taylor.

2. On considère l'endomorphisme :

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X+1).$$

a) Montrer que φ est un automorphisme et donner son automorphisme réciproque.

b) Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et retrouver alors $\mathcal{P}^{-1}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathcal{P}^k$.

Solution (**Ex.7 –** *Une matrice « pascalienne »*)

1. a) Exprimons les vecteurs de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$: $(X+1)^j = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}X^i = \sum_{i=0}^{n} p_{i+1,j+1}X^i$ du fait du décalage entre indices et exposants (la Premiére ligne concerne $1 = X^0$, la 2-ème X^1, etc., tandis que la Premiére colonne concerne $(X+1)^0$, la c-ème olonne concerne $(X+1)^1$, etc.) D'où $p_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

b) Pour (j,k) dans $\mathbb{N}^2$, $(X^k)^{(j)} = \dfrac{k!}{(k-j)!}X^{k-j}$ si $j \leq k$, vaut 0 sinon.

Exprimons les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ grâce à la formule de Taylor en -1 : $X^k = \sum_{i=0}^{k}\dfrac{(X^k)^{(j)}(-1)}{j!}(X-(-1))^j = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(X+1)^j = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(X+1)^j$, et comme $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$, $(\mathcal{P}^{-1})_{i,j} = (-1)^{i-j}\binom{j-1}{i-1}$.

2. a) φ est linéaire puisque $(\lambda P+Q)(X+1) = \lambda P(X+1)+Q(X+1)$, c'est un endomorphisme.
De plus, $\varphi(P) = 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) = 0$ donc P a une infinité de racines : $P = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$, φ est injectif, et comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, cela suffit pour affirmer que φ est un automorphisme.
On remarque qu'en définissant $\psi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ par $\psi : Q(X) \mapsto Q(X-1)$, on a pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, $\psi \circ \varphi(P) = \psi(P(X+1)) = P((X-1)+1) = P(X)$. Donc $\psi \circ \varphi = id_{\mathbb{R}_n[X]}$ et $\psi = \varphi^{-1}$.

b) Les colonnes de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ expriment les vecteurs $\varphi(X^j) = (X+1)^j$ dans la base $\mathcal{B}$: $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est donc la matrice $\mathcal{P}$.
De plus, $\mathcal{P}^{-1} = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$: les colonnes de $\mathcal{P}^{-1}$ expriment $\psi(X^j) = (X-1)^j$ dans la base $\mathcal{B}$.

Par la formule du binôme : $(X-1)^j = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}X^i(-1)^{j-i}$ et on retrouve $(\mathcal{P}^{-1})_{i,j} = (-1)^{i-j}\binom{j-1}{i-1}$.

3. $\mathcal{P}^k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^k)$ or par une récurrence immédiate $\varphi^k : P \mapsto P(X+k)$. Pour tout j de $[\![0\,;\,n]\!]$, $\varphi^k(X^j) = (X+k)^j = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}k^{j-i}X^i$, d'où

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n+1]\!], \quad \left(\mathcal{P}^k\right)_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}k^{j-i}.$$

Exercice 8 *Polynôme minimal et crochets de Lie*

1. *Polynôme minimal*
Soit $n \geq 2$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Justifier que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n^2})$ est liée.

b) En déduire l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(A) = 0$.

Un tel polynôme est qualifié de « polynôme annulateur de A ».

c) Soit $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N} / \exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(A) = 0$ et $\deg(P) = n\}$. Justifier qu'il existe $d \overset{\text{déf.}}{=} \min(\mathcal{D})$, et qu'il existe un polynôme μ_A unitaire de degré d tel que $\mu_A(A) = 0$.

d) Montrer que, si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de A, alors il existe Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q\mu_A$.

e) Montrer que μ_A, défini en 1.c), est unique.

f) En déduire que l'ensemble $\mathcal{Z}(A)$ des polynômes annulateurs de A est :
$$\mathcal{Z}(A) = \{Q\mu_A, Q \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Ce polynôme est qualifié de « polynôme minimal de A ».

2. *Un polynôme divisible par son dérivé*
Soit P un polynôme unitaire (donc non nul) de $\mathbb{K}[X]$ tel qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant :
$$XP' = \alpha P.$$

a) Montrer que $\alpha = \deg P$.

b) On suppose que P′ possède une racine β non nulle d'ordre de multiplicité μ.

i – Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine β de XP′ ?

ii – Justifier que β est racine de P. Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine β de P ?

iii – En déduire que $P = X^\alpha$.

3. *Application à une équation matricielle*
Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :
$$AB - BA = A.$$

a) Que peut-on dire de $\mathrm{Tr}(A)$?

b) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$,
$$A^kB - BA^k = kA^k.$$

c) Justifier que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,
$$P(A)B - BP(A) = AP'(A).$$

d) En déduire que $\mu_A = X^d$. Que peut-on dire de A ?

e) Donner un exemple de deux matrices non nulles A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ vérifiant $AB - BA = A$.

Solution (**Ex.8 –** *Polynôme minimal et crochets de Lie*)

1. *Polynôme minimal*

a) La famille $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$ est liée car elle compte n^2+1 vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n^2.

b) Par conséquent, il existe n^2+1 coefficients $(a_k)_{0\leq a_k\leq n^2}$ non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0$. Avec $P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$, on a $P(A) = 0$.

c) $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{K}[X]/P(A) \text{ et } \deg(P) = n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle admet un plus petit élément $d \overset{\text{déf.}}{=} \min(\mathcal{D})$.
Il existe donc (au moins) un polynôme Π de degré d tel que $\Pi(A) = 0$. Soit a_d le coefficient dominant de Π. Alors $\mu_A \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{a_d}\Pi$ convient.

d) Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de A. Effectuons la division euclidienne de P par μ_A : $P = Q\mu_A + R$ avec $\deg(R) < d$.
Alors $R(A) = P(A) - Q(A)\mu_A(A) = 0$. Donc R est un polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à d. Par définition de d, $R = 0$. Donc il existe bien Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q\mu_A$.

e) Réciproquement, si $P = Q\mu_A$, alors $P(A) = 0$.
On en déduit bien que : $\mathcal{Z}(A) = \{Q\mu_A, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

2. *Un polynôme divisible par son dérivé*
Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ tel qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$XP' = \alpha P.$$

a) Soit d le degré de P. Le coefficient dominant de XP′ est d et celui de αP est α donc $\alpha = d = \deg(P)$.

b) On suppose que P′ possède une racine β non nulle d'ordre de multiplicité μ.

i – L'ordre de multiplicité de la racine β de XP′ est encore μ (β n'étant pas racine de X).

ii – $P(\beta) = \beta P'(\beta) = 0$: β est racine de P. L'ordre de multiplicité de la racine β de P est :
- $\mu + 1$ par la propriété liant multiplicité et dérivation,
- μ par l'égalité $P = XP'$ ...

d'où PROBLÈME !!!
Donc P′ ne possède par de racine non nulle.

iii – L'unique racine de P′ est 0, et de multiplicité $d-1 = \alpha-1$. Donc $P' = \alpha X^{\alpha-1}$.
Donc $P = X^\alpha + c$. Or $P(0) = 0P'(0) = 0$. Donc $c = 0$ et $P = X^\alpha$.

3. *Application à une équation matricielle*
Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$AB - BA = A.$$

a) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(()AB) - \mathrm{Tr}(()BA) = 0$.

b) La propriété est vraie au rang $k = 0$ (et $k = 1$).
Supposons-la vraie à un rang k quelconque. Alors :
$A^{k+1}B - BA^{k+1} = AA^kB - ABA^k + ABA^k - BAA^k = A(A^kB - BA^k) + (AB - BA)A^k = AkA^k + AA^k = (k+1)A^{k+1}$.
Par récurrence, la propriété est vraie pour tout k de $\mathbb{N}$.

c) Soit $P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

$$P(A)B - BP(A) = \sum_{k\geq 0} a_k A^k B - B\sum_{k\geq 0} a_k A^k = \sum_{k\geq 0} a_k (A^kB - BA^k) = \sum_{k\geq 0} k a_k A^k = A\sum_{k\geq 1} k a_k A^{k-1} = AP'(A).$$

d) Appliquons c) à μ_A : $0 = A\mu_A'(A)$. Donc $X\mu_A' \in \mathcal{Z}(A)$. Donc : $\exists Q \in \mathbb{K}[X], X\mu_A' = Q\mu_A$. En raison des degrés, Q est un polynôme constant, disons $Q = \alpha$.
Alors $X\mu_A' = \alpha\mu_A$ avec μ_A non nul et unitaire. Par 2., $\mu_A = X^d$.
Ainsi A est nilpotente (d'ordre de nilpotence d).

e) Partons de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nilpotente et de trace nulle et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$AB - BA = A \iff \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} d - a = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient.