Exercice 1 *Nilpotence*

1. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer le noyau et l'image de φ. Sont-ils supplémentaires ?

b) Déterminer φ^3.

c) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^2(u) \neq 0$. Montrer que $\mathcal{B} = (\varphi^2(u), \varphi(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

d) Déterminer la matrice représentant φ dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et φ un endomorphisme de E vérifiant

$$\varphi^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad \varphi^n = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice représentative de φ est

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Donner une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice représentative de φ est

$$N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Expliciter la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Que vaut P^{-1} ?

Solution (**Ex.1 –** *Nilpotence*)

1. Traitée en TD

2. a) On s'inspire de la première question.
Il existe $u \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(u) \neq 0$, sinon φ^{n-1} serait l'endomorphisme nul.
Soit $\mathcal{B} = (\varphi^{n-1}(u), \dots, \varphi(u), u)$.
On justifie que $\mathcal{B}$ est une base en disant
- $Card(\mathcal{B}) = n = \dim(E)$;
- $\mathcal{B}$ est libre. En effet, comme dans 1., supposons

$$(\heartsuit) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \varphi^k(u) = 0_E$$

où je vous rappelle que $\varphi^0 = id_E$ donc $\varphi^0(u) = u$.
En composant par φ^{n-1}, tous les termes du membre de gauche sont nuls sauf le dernier qui vaut $\lambda_0 \varphi^{n-1}(u)$ avec $\varphi^{n-1}(u) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$.
Alors $(\heartsuit)$ devient $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \varphi^k(u) = 0_E$, et en composant par φ^{n-2} on a de même $\lambda_1 = 0$.
En réitérant ce procédé, on montre que $\lambda_k = 0$ pour tout k de $[\![0 ; n-1]\!]$.
La matrice représentant φ dans $\mathcal{B}$ est bien celle proposée.

b) La base $\mathcal{C} = (u, \varphi(u), \dots, \varphi^{n-1}(u)$ convient pour obtenir N'.

c) P présente en colonnes les « nouveaux vecteurs », ceux de $\mathcal{C}$, exprimés dans l' « ancienne base » $\mathcal{B}$.
Les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ sont $(0, 0, \dots, 0, 1)$, celles de $\varphi(u)$ sont $(0, 0, \dots, 0, 1, 0)$ jusque celles de $\varphi^{n-1}(u)$ qui sont $(1, 0, 0, \dots, 0)$.
Ainsi
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$ et un raisonnement analogue montre que $P^{-1} = P$. On peut aussi calculer P^2 pour se rassurer : $P^2 = I_n$ donc $P^{-1} = P$.

Exercice 2 *Trace*

Soit $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'application définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall M \in E, \quad u(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.

2. On suppose **dans cette question uniquement** que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Écrire la matrice représentant u dans la base canonique de E.

b) Déterminer le rang, le noyau et l'image de u et montrer qu'ils sont supplémentaires.

3. On revient au cas général.

a) Déterminer le noyau et l'image de u.

b) À quelle condition *sine qua non* le noyau et l'image de u sont-ils supplémentaires.

Solution (**Ex.2 –** *Trace*)
Soit $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'application définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall M \in E, \quad u(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A.$$

1. Par définition de u, $u(M) \in E$ pour tout M de E. La linéarité de la trace montre que $u(\lambda M + N) = \lambda u(M) + u(N)$ pour tout $(M, N, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$, donc u est linéaire.

2. a) Soit $\mathcal{C}$ la base canonique et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(M) = 3$ car les trois premières colonnes sont libres et leur somme est nulle donc $C_4 = -C_1 - C_2 - C_3$, donc
$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ et $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$.
D'où :

- $\mathrm{rg}(u) = 3$
- $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$
- $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(A)$... $u(A) = 0_2$ clairement !
- $\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 = 2 \end{vmatrix}$ donc en concaténant les bases de l'image et du noyau, on obtient une base de E : image et noyau sont supplémentaires.

3. On revient au cas général.

a) Notons que si $A = 0$, alors $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$, et $\mathrm{Ker}(u) = E$ et $\mathrm{Im}(u) = \{0_n\}$.
Supposons A non nulle.
Soit $M \in E$. $u(M) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Tr}(A)M = \mathrm{Tr}(M)A$, discutons !
Premier cas : si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, $M = \dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{\mathrm{Tr}(A)}A$ donc $M \in \mathrm{Vect}(A)$.
Et réciproquement, si $M \in \mathrm{Vect}(A)$, alors en écrivant $M = \lambda A$,
$u(M) = \mathrm{Tr}(A)\lambda A - \lambda \mathrm{Tr}(A)A = 0_n$.
Donc $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(A)$, comme dans la question 2...
Pour l'image, qui est de dimension $n^2 - 1$ par le théorème du rang, (avez-vous remarqué que, en 2., les matrices de $\mathrm{Im}(u)$ sont de trace nulle ?), on peut remarquer que :
$\forall M \in E, \mathrm{Tr}(u(M)) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(M) - \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(A) = 0$, donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.
Or par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = n^2 - 1$, donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$... comme en 2...
Second cas : si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $0_n = \mathrm{Tr}(M)A$ et comme $A \neq 0_n$, $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Et réciproquement si $\mathrm{Tr}(M) = 0$ alors $u(M) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.
Il s'ensuit que $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 1$. Or $u(I_n) = -nA$ donc $A \in \mathrm{Im}(u)$. Comme $A \neq 0_n$, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(A)$.

b) Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, on a : $A \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$ donc $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ ne sont pas supplémentaires.
Si $\mathrm{Tr}(()A) \neq 0$, on a : $A \notin \mathrm{Im}(u)$, donc $\mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_n\}$, i.e. $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires.
Le noyau et l'image de u sont supplémentaires si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Exercice 3 *Noyaux et images itérés*
E désigne un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et φ un endomorphisme de E.
Pour tout k de $\mathbb{N}$, on note F_k et G_k les sous-espaces vectoriels

$$F_k = \mathrm{Im}(\varphi^k) \quad \text{et} \quad G_k = \mathrm{Ker}(\varphi^k).$$

1. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, $F_{k+1} \subset F_k$ et $G_k \subset G_{k+1}$.

2. Justifier qu'il existe p dans $\mathbb{N}$ tel que $F_{p+1} = F_p$.
3. On note m le plus petit entier p tel que $F_{p+1} = F_p$. Que vaut m si φ est un automorphisme ?
4. Montrer que F_m et G_m sont stables par φ.
5. Déterminer m, F_m et G_m lorsque φ est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$
6. Écrire la matrice representative de φ dans une base obtenue en concaténant une base de F_m et une base de G_m.

Solution (**Ex.3 –** *Noyaux et images itérés*)
E désigne un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et φ un endomorphisme de E.
Pour tout k de $\mathbb{N}$, on note F_k et G_k les sous-espaces vectoriels
$$F_k = \mathrm{Im}(\varphi^k) \quad \text{et} \quad G_k = \mathrm{Ker}(\varphi^k).$$

1. • $u \in F_{k+1} \Longrightarrow \exists x, u = \varphi^{k+1}(x) \Longrightarrow u = \varphi^k(\varphi(x)) \Longrightarrow u \in F_k$.
• $u \in G_k \Longrightarrow \varphi^k(u) = 0 \Longrightarrow \varphi(\varphi^k(u)) = 0 \Longrightarrow u \in G_{k+1}$.
2. La suite $(\dim(F_k))$ est une suite décroissante d'entiers naturels donc minorée par 0, donc convergente, donc stationnaire : $\exists p \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant p, \dim(F_k) = \dim(F_p)$, et par inclusion, l'égalité des dimensions assure l'égalité des sous-espaces : $\forall k \geqslant p, F_k = F_p$.
3. Si φ est un automorphisme, alors $F_1 = \mathrm{Im}(\varphi) = E$ et $F_0 = \mathrm{Im}(\varphi^0) = \mathrm{Im}(id_E) = E$, donc $m = 0$.
4. • $\varphi(F_m) = \varphi(\mathrm{Im}(\varphi^m)) = \mathrm{Im}(\varphi^{m+1}) = F_{m+1} = F_m$ donc F_m est stable par φ.
• $u \in G_m \Longrightarrow \varphi^m(\varphi(u)) = \varphi(\varphi^m(u)) = \varphi(0) = 0 \Longrightarrow \varphi(u) \in \mathrm{Ker}(\varphi^m) = G_m$ donc G_m est stable par φ.
5. $\mathrm{rg}(M^0) = \mathrm{rg}(I_3) = 3$, $\mathrm{rg}(M) = 2$, $\mathrm{rg}(M^2) = 1$ puis $\mathrm{rg}(M^3) = 1$ donc $F_0 \supsetneq F_1 \supsetneq F_2 = F_3$ en raison des inclusions de 1, donc $m = 2$.
$F_m = \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Vect}((1,0,-2))$ et $G_m = \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Vect}((6,5,0),(-2,0,5))$.
6. $\mathcal{M}_{((1,0,-2),(6,5,0),(-2,0,5))} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \end{pmatrix}$, diagonale par blocs...