Exercice 1 *Déterminants élémentaires*

Calculer sous forme factoriser

1. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$; 3. $abcV(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

Solution (**Ex.1 –** *Déterminants élémentaires*)

1. $2abc$.
2. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca))$.
3. $abc(a-b)(a-c)(b-c)$.
4. Soit A, B, C trois colonnes.

$$\begin{aligned}\det(A+B, B+C, C+A) &= \det(A, B+C, C+A) + \det(B, B+C, C+A)\\ &= \det(A, B+C, C) + \det(B, C, C+A)\\ &= \det(A, B, C) + \det(B, C, A)\\ &= 2\det(A, B, C)\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2abc(a-b)(a-c)(b-c)$$

Exercice 2 *Par récurrence*

Calculer par récurrence les déterminants suivant

1. $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$; 2. $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$

On pourra commencer par amener un maximimum de 0 dans la dernière ligne puis la dernière colonne...

Solution (**Ex.2 –** *Par récurrence*)

1. $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$ conduit à
   $D_n = D_{n-2}$ et
   $$D_n = \frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$
2. $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_n$ conduit à
   $D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$ et
   $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$.

Exercice 3 *Tridiagonal*

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1+z^2 & z & & (0) \\ z & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & z \\ (0) & & z & 1+z^2 \end{vmatrix}_{[n]}$.

Solution (**Ex.3 –** *Tridiagonal*)

En développant suivant la première colonne puis la première ligne (stratégie tridiagonale) :

$D_n = (1+z^2)D_{n-1} - z^2 D_{n-2}$.

Notons que cette relation est encore vérifiée pour $n = 0$ en prenant $D_0 = 1$, car $D_1 = 1+z^2$ et $D_2 = (1+z^2)^2 - z^2$.

Suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$x^2 - (1+z^2)x + z^2 = 0$, de racines 1 et z^2.

• Premier cas : $z^2 \neq 1$.

Il existe a et b dans $\mathbb{C}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = a + bz^{2n}$.

Avec D_0 et D_1, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = \dfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}$.

• Second cas : $z^2 = 1$.

Il existe a et b dans $\mathbb{C}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = a + bn$.

Avec $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = 1 + n$.

Exercice 4 *Déterminant et racines n-ièmes de l'unité*

Soit $n \geq 2$, $a \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & a \\ a & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Calculer $\det(M)$.
2. déterminer le rang de M en fonction de a.

Solution (**Ex.4 –** *Déterminant et racines n-ièmes de l'unité*)

1. En décomposant la première colonne :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & a \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & a \\ a & & & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} a^n.$$

2. $\det(M) = 0 \Leftrightarrow (-a)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0\,;\, n-1]\!], a = -e^{2ik\pi/n}$.

   Dans ce cas, M_a possède une matrice extraite $\begin{pmatrix} 1 & a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & a \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{[n-1]}$ de rang $n-1$ donc est au moins de rang $n-1$.

   Finalement :

$$\mathrm{rg}(M_a) = \begin{cases} n-1 & \text{si } \exists k \in [\![0\,;\, n-1]\!], a = -e^{2ik\pi/n}, \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 5 *Déterminant tridiagonal*

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ et $D_n(\theta)$ le déterminant d'ordre n :

$$D_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D_n(\theta) = \frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}.$$

Solution (**Ex.5 –** *Déterminant tridiagonal*)

$D_0(\theta) = 1 = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$ (produit vide, ou convention),

$D_1(\theta) = 2\cos\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}$,

$D_2(\theta) = 4\cos^2\theta - 1 = \dfrac{\sin(3\theta)}{\sin\theta}$

car $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin\theta\big(3 - 4\sin^2\theta\big) = \sin\theta\big(4\cos^2\theta - 1\big)$.

En développant par rapport à la 1ère colonne,

$$D_{n+2}(\theta) = 2\cos\theta D_{n+1}(\theta) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la 1ère ligne,

$$D_{n+2}(\theta) = 2\cos\theta D_{n+1}(\theta) - D_n(\theta).$$

Avec les valeurs initiales, cette relation est vraie dès $n = 0$.

L'équation caractéristique associée par la relation linéaire de la suite $(D_n(\theta))$ est $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$.

Ses solutions sont $e^{\pm i\theta}$ et il existe α et β réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad D_n(\theta) = \alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta).$$

Avec $n = 0$: $\alpha = 1$.

Avec $n=1$: $\cos\theta+\beta\sin\theta=2\cos\theta\Rightarrow\beta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N},\quad D_n(\theta)=\cos(n\theta)+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin(n\theta)=\dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$

Exercice 6 *Matrices antisymétriques*

Soit A une matrice antisymétrique d'ordre $2n+1$. Montrer que $\det(A)=0$.
En est-il de même pour une matrice antisymétrique d'ordre pair ?

Solution (**Ex.6 –** *Matrices antisymétriques*)

$\det(A)=\det\left(A^T\right)=\det(-A)=(-1)^{2n+1}\det(A)=-\det(A)$ donc $\det(A)=0$.

$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ est un contre-exemple si l'ordre est pair...

Exercice 7 *Inverse d'une matrice triangulaire par blocs*

Soit $n,p\in\mathbb{N}^*$ et $M=\begin{pmatrix}A&B\\0&C\end{pmatrix}$ avec $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M est inversible si, et seulement si, A et C le sont.
2. Dans ce cas, écrire M^{-1} par blocs.

Solution (**Ex.7 –** *Inverse d'une matrice triangulaire par blocs*)

1. $\det(M)=\det(A)\det((\,)C)$ donc
   $\left(\det(M)\neq0\right)\Leftrightarrow\left(\det(A)\neq0\qquad textet\det((\,)C)\neq0\right)$,
   ce qui se traduit par M est inversible si, et seulement si, A et C le sont.
2. On pourra chercher $M^{-1}=\begin{pmatrix}X&Y\\Z&T\end{pmatrix}$, ou on méditera avec profit sur la propriété :
   l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire (penser à la résolution d'un système linéaire du type TX = 0...)
   $\begin{pmatrix}A&B\\0&C\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}BC^{-1}\\0&C^{-1}\end{pmatrix}=I_{n+p}$

Exercice 8 *Déterminant et blocs*

Soit $(A,B,C,D)\in\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^4$ tel que $D\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $CD=DC$.

Montrer que :

$$\det\left(\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\right)=\det(AD-BC).$$

Solution (**Ex.8 –** *Déterminant et blocs*)

On cherche à trouver des relations entre matrices triangulaires par blocs, par exemple :

$$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}?&-B\\0&A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}?&0\\?&AD-BC\end{pmatrix}.$$

En prenant le premier « ? » égal à I_n :

$$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}I_n&-B\\0&A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&0\\C&AD-BC\end{pmatrix}.$$

Alors $\det\left(\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\right)\times\det(A)=\det(A)\det((\,)AD-BC)$.

Et puisque $\det(A)\neq0$, $\det\left(\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\right)=\det((\,)AD-BC)$.