Exercice 1 *CVU sur $\mathbb{R}$? Sur les segments ?*
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $a \in]0\,;+\infty[$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-a\,;a]$.
3. Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment du type $[\alpha\,;\beta]$ où $\alpha < \beta$?

Solution (**Ex.1 –** *CVU sur $\mathbb{R}$? Sur les segments ?*)

1. • $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   • Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\sin(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.
   Donc $f_n \xrightarrow{CS} 0$.
   • $f_n(x) - 0 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{nx} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$: $f_n - 0$ n'est pas bornée, il n'y a pas convergence uniforme.
2. De : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin u| \leq |u|$ (IAF par exemple), on tire :
   $\forall x \in [-a\,;a]\, |f_n(x)| \leq \dfrac{a}{n}$, donc $\|f_n - 0\|_{\infty,[-a\,;a]} \leq \dfrac{a}{n}$,
   donc $\|f_n - 0\|_{\infty,[-a\,;a]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: il y a convergence uniforme sur $[-a\,;a]$.
3. Soit $a = \max(|\alpha|, |\beta|)$ de sorte que $[\alpha\,;\beta] \subset [-a\,;a]$.
   Alors, par définition d'un « sup », $\|f_n - 0\|_{\infty,[\alpha\,;\beta]} \leq \|f_n - 0\|_{\infty,[-a\,;a]}$,
   donc par encadrement $\|f_n - 0\|_{\infty,[\alpha\,;\beta]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: il y a convergence uniforme sur tout segment.

Exercice 2 *Convergence uniforme ?*
Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. **a)** Établir, pour tout $\alpha \in]0\,;1]$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$.
   b) La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme ?

Solution (**Ex.2 –** *Convergence uniforme ?*)

1. Soit $x \geq 0$. $\dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1+x}$, la suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
2. **a)** Soit $\alpha > 0$. Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 + \alpha x - (1+x)^\alpha$. $g'(x) = \alpha\left(1 - (1+x)^{\alpha-1}\right) \geq 0$ car $\alpha - 1 \leq 0$. g est croissante et nulle en 0, donc positive sur $\mathbb{R}^+$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$. $|f_n(x) - f(x)| \leq \left|\dfrac{1-(1+x)^{1/n}}{(1+x)^{1+1/n}}\right| \leq \dfrac{(1+x)^{1/n} - 1}{(1+x)^{1+1/n}} \leq \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}} \leq \dfrac{1}{n}$.
   Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \leq \dfrac{1}{n}$,
   et par encadrement $\|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3 *Quand intégrale et limite permutent ... ou pas*
Soit α un paramètre réel quelconque et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$f_n : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx}$.

1. Déterminer pour quelles valeurs de α la suite de fonctions (f_n) converge uniformément.
2. Justifier l'existence et déterminer la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$$
3. Justifier l'existence et déterminer la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2 x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$$

Solution (**Ex.3 –** *Quand intégrale et limite permutent ... ou pas*)

1. $f_n \xrightarrow{CS} f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x$.
   Par étude de $f_n - f$, $\|f_n - f\|_\infty = (f_n - f)(1/n) = n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1}$.
   Il y a donc convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.
2. $\alpha = 1/2$ donc il y a convergence uniforme sur le segment $[0\,;1]$ et le théorème de permutation s'applique :
   $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x\left(1 + \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$.

3. $\alpha = 2$ et il n'y a pas convergence uniforme.
Un calcul explicite par intégration par parties donne :
$\int_0^1 x\left(1+n^2\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} - n\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}$.

Exercice 4 *Quelques limites d'intégrales*
Justifier l'existence et déterminer les limites des suites suivantes :

1. $\forall n \geq 3, \quad w_n \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^n + t^{-n}}}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{\pi/4} \tan^n t \mathrm{d}t$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \overset{\text{déf.}}{=} \int_{-1}^{1} \cos\frac{t}{3^n}\mathrm{d}t$

Solution (**Ex.4 –** *Quelques limites d'intégrales*)
Justifier l'existence et déterminer les limites des suites suivantes :

1. Les v_n existent car les intégrandes sont continues sur le segment $[0\,;\,\pi/4]$.
Pour tout n, $f_n : t \mapsto \tan^n t$ est continue et dominée par la fonction constante intégrable sur $[0\,;\,\pi/4]$ $\varphi : t \mapsto 1$. De plus (f_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0\,;\,1[\\ 1 \end{cases}$. Par le théorème de convergence dominée, la permutation intégrale/limite est licite :
$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} f(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.
La convergence n'est pas uniforme [0,π/4] ...
En effet, soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n = \mathrm{Arctan}\left(2^{-1/n}\right)$ (obtenu en résolvant $\tan^n t = 1/2$).
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n \in]0\,;\,\pi/4[$ car $2^{-1/n} \in]0\,;\,1[$ et $f_n(t) - f(t) = 1/2$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|f_n - f\|_\infty \geq 1/2$... et $(\|f_n - f\|_\infty)$ ne tend pas vers 0.

2. $\forall n \geq 3, \quad w_n \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^n + t^{-n}}}$.
• *Existence*
$f_n :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{t^n + t^{-n}}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$ car $t^n + t^{-n} \xrightarrow[t\to0]{} +\infty$. Donc $\int_0^1 f_n$ existe.
$f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^n/2}$. Par équivalence de fonctions positives, sachant que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{n/2}}$ converge car $\frac{n}{2} > 1$, $\int_1^{+\infty} f_n$ converge.
Donc w_n existe pour tout $n \geq 3$.
• *Limite simple des f_n*
Si $t > 1$, $t^n + t^{-n} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^n \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc $f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
Si $t < 1$, $t^n + t^{-n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{t}\right)^n \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc $f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
Si $t = 1$, $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux
$$f :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 1 \\ 1/\sqrt{2} & \text{si } t = 1 \end{cases}.$$
• *Domination*
$\forall t \geq 1$, $t^n + t^{-n} \geq t^n$ donc $|f_n(t)| \leq t^{-n/2}$,
$\forall t < 1$, $t^n + t^{-n} \geq t^{-n}$ donc $|f_n(t)| \leq t^{n/2}$.
Soit : $\varphi :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} t^{3/2} & \text{si } t < 1 \\ t^{-3/2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.
φ est continue et intégrable sur $]0\,;+\infty[$ (faussement impropre sur $]0\,;1]$ et comme intégrale de Riemann sur $[1\,;+\infty[$ car $n/2 > 1$).
• *Par le théorème de convergence dominée*
$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f = 0$.

3. Les u_n existent car les intégrandes sont continues sur le segment $[-1\,;\,1]$, et on peut les calculer explicitement :
$u_n = \left[3^n \sin\left(\frac{t}{3^n}\right)\right]_{-1}^{1} = 2 \times 3^n \sin(1/3^n)$ par (im)parité de *sin*, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ puisque $\sin u \underset{u\to0}{\sim} u$.
Si on veut utiliser le cours de seconde année...
Soit, pour tout n, $f_n : t \mapsto \cos\frac{t}{3^n}$, qui est continue.
(f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto 1$.
Par convergence uniforme :
Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à cos avec $|\cos'| \leq 1$, on a :
$\forall t \in [-1\,;\,1] \left|\cos\frac{t}{3^n} - 1\right| \leq 1 \times \left|\frac{t}{3^n} - 0\right|$, donc $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{3^n}$.
Par encadrement : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f_n \xrightarrow{CU} f$.
Alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}t = 2$.

Par le théorème de convergence dominée :
Pour tout n, est dominée par la fonction constante f, intégrable. Par le théorème de convergence dominée, la permutation intégrale/limite est licite :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}t = 2.$$

Exercice 5 *Limite d'une suite d'intégrale*
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}\mathrm{d}t.$$

Solution (**Ex.5 –** *Limite d'une suite d'intégrale*)
Limite nulle, convergence dominée avec domination par exemple par $\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0\,;\,\pi/2] \\ \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t > \pi/2 \end{cases}$, en exploitant $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leq |u|$.

Exercice 6 *Équivalent d'une suite d'intégrales*

1. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\mathrm{I}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}\cos(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x.$$

2. En effectuant le changement de variable $u = nx$, déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution (**Ex.6 –** *Équivalent d'une suite d'intégrales*)

1. Soit, pour tout $n \geq 1$, $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}\cos(x)}{1+n^2x^2}$.
   - Pour tout $n \geq 1$, g_n est continue.
   - $g_n \xrightarrow{CS} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$
   - g est continue par morceaux.
   - $\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, |g_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ avec $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

   Par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$ existe et vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = 0$.

2. Soit $n \geq 1$. $x \mapsto nx$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif sur $\mathbb{R}$.
   $\mathrm{I}_n \overset{u=nx}{=} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/n^2}\cos(u/n)}{1+u^2}\mathrm{d}u$.
   Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/n^2}\cos(u/n)}{1+u^2}\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \pi$
   Avec, pour tout $n \geq 1$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u^2/n^2}\cos(u/n)}{1+u^2}$, on a :
   - pour tout $n \geq 1$, f_n continue ;
   - $f_n \xrightarrow{CS} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$;
   - f est continue ;
   - $\forall n \geq 1, \forall u \in \mathbb{R}, |f_n(u)| \leq f(u)$ avec f intégrable sur $\mathbb{R}$.

   Par le théorème de convergence dominée,
   $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \pi$.
   Du coup : $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n}$.

Exercice 7 *Permutation limite/intégrale même sans convergence simple*
L'objectif de l'exercice est de déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t).$$

1. Justifier que la suite (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}^+$.
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = |f_n|$.
2. Montrer que (g_n) converge simplement mais non uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
3. **a**) Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$.
   b) Montrer finalement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t = 0$.

Solution (**Ex.7 –** *Permutation limite/intégrale même sans convergence simple*)

1. Pour $t = 3\pi/2$, $\sin(t) = -1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n(t) = \mathrm{e}^{-3\pi/2}(-1)^n$ donc $(f_n(t))_n$ diverge. Il n'y a pas convergence simple (en tout $t = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$...)

2. • Soit $t \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{N}\}$. Alors $g_n(t) = \mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-t}$.

• Soit $t \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{N}\}$. Alors $g_n(t) = \mathrm{e}^{-t}|\sin(t)|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $|\sin(t)| \in [\,0\,;\,1[$.

• Donc $g_n \xrightarrow{CS} g : t \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{N}\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t}$ et $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable, Donc par domination $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$ existe.

b) Les g_n sont continues, et leur limite simple est continue par morceaux. Les g_n sont uniformément dominée par φ intégrable. Par le théorème de convergence dominée, g est intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} g(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0.$$