Table des matières

Ces exercices courts, pour la plupart donnés en colles en première année, constituent une collection des propriétés et méthodes que doit maîtriser un étudiant en fin de première année.

Nicolas Maillard
Contact : colasmaillard@free.fr

1 Analyse

1.1 Sommes

Exercice 1.

1. Démontrer par récurrence sur n la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

2. En calculant de deux façons $\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right)$, retrouver la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Correction n° 1.

1. Pour $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ »...

2. Par télescopage $\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right) = (n+1)^4$, et en développant :

$(k+1)^4 - k^4 = \cdots = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$,

$(n+1)^4 = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$

$(n+1)^4 = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$ et il n'y a plus qu'à isoler $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \cdots = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 2.

Calculer $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) \right)$.

Correction n° 2.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(i \times i + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^2}{2} - \frac{i}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + n^2(n+1) \right)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 3 + 6n)}{12} = \frac{n(n+1)(8n-2)}{12} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Exercice 3.

Soit d et f deux entiers naturels tels que $d \leqslant f$ ($d =$début et $f =$fin !).

1. a) Montrer que : $\forall i \in [\![d\,;\, f]\!]$, $\binom{i}{d} = \binom{i+1}{d+1} - \binom{i}{d+1}$.

b) En déduire $\displaystyle\sum_{i=d}^{f}\binom{i}{d}$.

2. Retrouver ce résultat en raisonnant par récurrence sur f.

Correction n° 3.

1. a) Formule de Pascal : $\displaystyle\binom{i+1}{d+1}=\binom{i}{d}+\binom{i}{d+1}$.

b) Télescopage :

$$\sum_{i=d}^{f}\binom{i}{d}=\sum_{i=d}^{f}\left(\binom{i+1}{d+1}-\binom{i}{d+1}\right)=\binom{f+1}{d+1}-\binom{d}{d+1}=\binom{f+1}{d+1}$$

1.2 Suites

Exercice 4.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0=2,\ u_1=5 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n.$$

Calculer u_n en fonction de n.

Correction n° 4.

Suite récurrente linéaire d'ordre 2, racines de l'équation caractéristique : 2 et 3. $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=2^n+3^n$.

Exercice 5.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0=2,\ u_1=\frac{2+\sqrt{3}}{2} \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}-u_n.$$

Calculer u_n en fonction de n.

Correction n° 5.

Suite récurrente linéaire d'ordre 2, racines de l'équation caractéristique : $\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{\pm i\pi/3}$: $\exists(a,b)\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=a\sin(n\pi/3)+b\cos(n\pi/3)$

$u_0=2\Rightarrow b=2$, $u_1=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=1$: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\sin(n\pi/3)+2\cos(n\pi/3)$.

Exercice 6.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0=-1,\ u_1=4 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n.$$

Calculer u_n en fonction de n.

Correction n° 6.

Suite récurrente linéaire d'ordre 2, unique racine de l'équation caractéristique : 2 : $\exists(a,b)\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=2^n(an+b)$

$u_0=-1\Rightarrow b=-1$, $u_1=4\Rightarrow a=3$: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=2^n(3n-1)$.

Exercice 7.

Étudier la suite u définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n+2.$$

On pourra utiliser une suite auxiliaire du type $(u_n-\mathrm{C}^{te})_{n\in\mathbb{N}}$ où C^{te} est une constante adéquate.

Correction n° 7.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n=u_n-\alpha$. Alors : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n+2\Leftrightarrow v_{n+2}+\alpha=4v_{n+1}+4\alpha-4v_n-4\alpha+2$

$\Leftrightarrow v_{n+2}=4v_{n+1}-4v_n+(2-\alpha)$

En prenant $\alpha=2$, v vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2-4x+4=0$ dont la racine double est 2. Il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=2^n(an+b)$, avec $v_0=u_0+2=2$ et $v_1=u_1+2=3$.

On trouve alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=2^n(2-n/2)=2^{n-1}(4-n)$,

puis : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2^{n-1}(4-n)-2$.

Exercice 8.

Étudier la suite u définie par $u_0=1$, $u_1=0$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=-u_{n+1}+2u_n+3.$$

On pourra utiliser une suite auxiliaire du type $(u_n-\alpha n)_{n\in\mathbb{N}}$ où α est une constante adéquate.

Correction n° 8.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n=u_n-n\alpha$. Alors : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n+2\Leftrightarrow v_{n+2}+(n+2)\alpha=-v_{n+1}-(n+1)\alpha+2v_n+2n\alpha+3$

$\Leftrightarrow v_{n+2}=-v_{n+1}+2v_n+(3-\alpha)$

En prenant $\alpha=3$, v vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2+x-2=0$ dont les racines sont -2 et 1. Il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=(-2)^na+b$, avec $v_0=u_0=1$ et $v_1=u_1-3=-3$.

On trouve alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\dfrac{4}{3}(-2)^n-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\big((-2)^{n+2}-1\big)$,

puis : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{1}{3}\big((-2)^{n+2}-1\big)+3n$.

Exercice 9.

Soit v la suite définie par

$$v_0 = e \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = ev_n^2.$$

1. Montrer que v est strictement positive et strictement croissante.

2. Montrer que v diverge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $u_n = \ln(v_n)$. Exprimer u_n en fonction de n et en déduire v_n en fonction de n. Retrouver les réponses aux questions précédentes à l'aide de cette expression.

Correction n° 9.

1. On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant \mathrm{e}$.
Du coup : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \mathrm{e}v_n \geqslant \mathrm{e}^2 > 1$ donc v croît.

2. On peut montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant \mathrm{e}^n$, et par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
On peut aussi raisonner par l'absurde. Supposons v convergent, de limite ℓ. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}v_n^2 = \mathrm{e}\ell^2$. Par unicité de la limite : $\ell = \mathrm{e}\ell^2$.
$\ell = \mathrm{e}\ell^2 \Leftrightarrow \ell(1-\mathrm{e}\ell) = 0 \Leftrightarrow (\ell = 0 \text{ ou } \ell = 1/\mathrm{e})$.
Or : $\big(\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant \mathrm{e}\big) \Rightarrow \ell \geqslant \mathrm{e}$, donc $\ell \neq 0$ et $\ell \neq 1/\mathrm{e}$. Contradiction : donc v diverge, et comme v est croissante, v diverge vers $+\infty$.

3. u vérifie la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(\mathrm{e}v_n^2) = 1 + 2u_n$: c'est une suite arithmético-géométrique.
Avec $u_0 = 1$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} - 1$.
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \exp(2^{n+1} - 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

EXERCICE 10.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n + 1).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Justifier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Correction n° 10.

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$».

2. Par récurrence : $u_1 = \ln(2) \leqslant u_0$, et $u_n \leqslant u_{n-1} \Rightarrow u_n + 1 \leqslant u_{n-1} + 1 \Rightarrow \ln(u_n + 1) \leqslant \ln(u_{n-1} + 1) \Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$.
Variante : $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n + 1) - u_n$ et on montre (en l'étudiant) que la fonction $x \mapsto \ln(x+1) - x$ est négative sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

3. u est décroissante et minorée donc converge, et comme u est positive, sa limite ℓ est positive (ou nulle).
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n + 1) = \ln(\ell + 1)$, $\ell = \ln(\ell) + 1$.
L'étude de $x \mapsto \ln(x+1) - x$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$ montre que $\ell = 0$ est l'unique solution de $\ell = \ln(\ell) + 1$. Donc $\ell = 0$.

EXERCICE 11.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

2. Étudier la variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Justifier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Correction n° 11.

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $2 \geqslant u_n \geqslant 0$».

2. Par récurrence : $u_1 = \sqrt{2} \geqslant u_0$, et $u_n \geqslant u_{n-1} \Rightarrow u_n + 2 \geqslant u_{n-1} + 2 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \geqslant \sqrt{u_{n-1} + 2} \Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$.

3. u est croissante et majorée donc converge, et comme $0 \leqslant u \leqslant 2$, sa limite ℓ est positive et inférieure à 2.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n + 2} = \sqrt{\ell + 2}$, $\ell = \sqrt{\ell + 2}$.
$\ell = \sqrt{\ell + 2} \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Leftrightarrow (\ell = 2 \text{ ou } \ell = -1)$, or $\ell \geqslant 0$, donc $\ell = 2$.

EXERCICE 12.

Étudier la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + 1}$.

Correction n° 12.

Par récurrence, on montre que u_n est défini et strictement positif pour tout n de $\mathbb{N}$.
$\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{u_n^2 + 1} < 1$ donc u est strictement décroissante, et minorée par 0, donc convergente. Sa limite ℓ vérifie $\ell = \dfrac{\ell}{\ell^2 + 1}$, donc $\ell^2 + 1 = 1$, donc $\ell = 0$.

EXERCICE 13.

Étudier la suite u définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

Correction n° 13.

Se traite comme l'exercice précédent. La suite est décroissante.
Sa limite vérifie $\ell = \sqrt{\ell + 1} \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 1 = 0 \Leftrightarrow \ell = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme $1 - \sqrt{5} < 0$ et $\ell \geqslant 0$, $\ell = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 14.

Étudier la suite u définie par $u_0 \in \left]0\,;+\infty\right[$, $u_1 \in \left]0\,;+\infty\right[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

Correction n° 14.

On établit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
(par exemple, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$ »).
On pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$, ce qui linéarise la relation de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \dfrac{1}{2}\ln(u_{n+1}) + \dfrac{1}{2}\ln(u_{n+1}) = \dfrac{1}{2}v_{n+1} + \dfrac{1}{2}v_n.$
v vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont les solutions de l'équation caractéristique sont 1 et $-1/2$.
Il existe alors a et b réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathrm{e}^{v_n} = \mathrm{e}^{a+(-1/2)^n b}$
On peut éventuellement exprimer a et b à l'aide de u_0 et u_1.
On peut aussi remarquer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^a$.

Exercice 15.

1. Étudier les variations de
$f : \left]0\,;+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x}.$

2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

4. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

5. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n)$.

6. En déduire un encadrement de u_n, puis montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1$.

Correction n° 15.

1. $\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{x^2 - x(x+1) + (x+1)}{x^2(x+1)} = \dfrac{1}{x^2(x+1)} > 0.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty,$
$\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\big(1 + 1/x\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$

3. f est croissante et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$: f est négative sur $\left]0\,;+\infty\right[$...

4. Par télescopage : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n+1).$
Par 3., $u_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$...

5. On étudie $g : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x+1}$.. qui est négative sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

6. Par 5., $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \leqslant 1 + \ln(n).$
Donc $\ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n)$ et $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(n)} + 1.$
$\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n(1+1/n))}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{1}{\ln(n)} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$
par encadrement, $\dfrac{u_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Exercice 16.

Soit la suite u définie par $u_1 \in \left]0\,;+\infty\right[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant u_1$.

2. En déduire : $\forall n \geqslant 2,\ u_n \geqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) u_1$.

3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$.

4. En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Correction n° 16.

1. Une récurrence immédiate montre que $u_n \geqslant 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Alors $u_2 = u_1 \geqslant u_1$ et pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = u_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{u_k}{k} \geqslant u_1$.

2. $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_1}{k} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) u_1.$

3. La dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - (\ln(x+1) - \ln(x))$ est
$f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-(x+1) - x^2 + x(x+1)}{x^2(x+1)} = \dfrac{-1}{x^2(x+1)}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \ln(1 + 1/x) = 0.$
f est décroissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$ et de limite nulle en $+\infty$ donc f est positive sur $\left[1\,;+\infty\right[$...

4. Par télescopage : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n) - \ln(1)$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(n)$, et par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 17.

1. Soit $a,\ b \in]\,0\,;+\infty\,[$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (a^n + b^n)^{1/n}$.

2. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ k réels.
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (|a_1|^n + \cdots + |a_k|^n)^{1/n}$.

Correction n° 17.

1. Supposons $a < b$. $(a^n + b^n)^{1/n} = \big(b^n(1 + (a/b)^n)\big)^{1/n} = b\big((1 + (a/b)^n\big)^{1/n} = b\exp\left(\frac{1}{n}\ln(1 + (a/b)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$ car $0 < a/b < 1$.

Si $a > b$, en permutant a et b dans ce qui précède, $(a^n + b^n)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Si $a = b$, $(a^n + b^n)^{1/n} = 2^{1/n}a \xrightarrow[n\to+\infty]{} a = b$

Bilan : $(a^n + b^n)^{1/n} = \xrightarrow[n\to+\infty]{} max(a, b)$

2. Un raisonnement analogue montre que :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (|a_1|^n + \cdots + |a_k|^n)^{1/n} = max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$.

Exercice 18.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

1. Montrer que u et v convergent vers une même limite.
On note e cette limite.

2. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|e - u_n\right| \leqslant \dfrac{1}{n.n!}$.

Correction n° 18.

1. Montrons que u et v sont adjacentes.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$: u croît.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{n.n!} = \dfrac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$

$= \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$: v décroît.

$v_n - u_n = \dfrac{1}{n.n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

u et v sont adjacentes : elles convergent vers une même limite e (la base de l'exponentielle).

2. Conséquence de suites adjacentes : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant v_n$.

D'où : $0 \leqslant \mathrm{e} - u_n \leqslant v_n - u_n$, donc $\left|e - u_n\right| \leqslant \dfrac{1}{n.n!}$.

Exercice 19.

Soit a, α et β trois réels strictement positifs.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$.
Exprimer u_n en fonction de n et a.

2. Soit $0 < \beta < \alpha$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$x_0 = \alpha,\ y_0 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_n + y_n} \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n^2}{x_n + y_n} \end{cases}.$$

Étudier le comportement de x_n et de y_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction n° 19.

1. On montre (par récurrence par exemple) que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^{(2^n)}$.

2. Par récurrence, x et y sont à valeurs strictement positives.

$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - y_{n+1} = \dfrac{x_n^2 - y_n^2}{x_n + y_n} = x_n - y_n$: la suite $x - y$ est constante, donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n - y_n = \alpha - \beta$, donc $y_n = x_n - \alpha + \beta$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)^2$. Par 1., $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{x_n}{y_n} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n}$.

$x_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} y_n = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} (x_n - \alpha + \beta)$

$\left(\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{2^n} - 1\right) x_n = -\alpha + \beta$ puis $x_n = \dfrac{\alpha - \beta}{1 - \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha - \beta$ car $0 < \beta/\alpha < 1$.

Et $y_n = x_n - \alpha + \beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exercice 20.

Soit $q \in]\,1\,;+\infty\,[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.
Que peut-on dire de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{e^n}$.

Correction n° 20.

1. Soit $\varepsilon = \dfrac{q-1}{2} > 0$. Par définition de la limite,

$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathrm{N}, \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - q\right| \geqslant \varepsilon.$

Alors $\forall n \geqslant \mathrm{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - q \geqslant -\varepsilon, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q-\varepsilon, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{q+1}{2},$

$\forall n \geqslant \mathrm{N}, u_{n+1} \geqslant \dfrac{q+1}{2} u_n$. Par une récurrence, $\forall n \geqslant \mathrm{N}, u_n \geqslant \left(\dfrac{q+1}{2}\right)^{n-\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}$.

Et comme $\dfrac{q+1}{2} > 1$, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. Avec $u_n = \dfrac{n!}{\mathrm{e}^n}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{\mathrm{e}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Un raisonnement analogue montre que $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathrm{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 2$.

Alors $\forall n \geqslant \mathrm{N}, u_n \geqslant 2^{n-\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{\mathrm{e}^n} = +\infty$

Exercice 21.

Vrai ou faux ?

$$u \textit{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \big(u_{n+1} - u_n\big) = 0.$$

Correction n° 21.

Faux : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) - \ln(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 0$... pourtant $(\ln(n))_n$ diverge.

Exercice 22.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par
$u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2. En déduire la variation de u et de v.

3. Établir que $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_0(u_1-u_0)}{u_n}$.

4. u converge-t-elle ?

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Correction n° 22.

1. Récurrence sur n.

2. u et v sont croissante.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{u_n + 1/v_n}{v_n + 1/u_n} = \dfrac{(u_n v_n + 1)/v_n}{(u_n v_n + 1)/u_n} = \dfrac{u_n}{v_n}$... $\dfrac{u}{v}$ est constante.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_0}{v_0} \times \dfrac{1}{u_n} = u_0 \times \dfrac{1}{v_0} \times \dfrac{1}{u_n} = u_0(u_1 - u_0) \times \dfrac{1}{u_n}$

4. Supposons que u converge vers ℓ. Comme u est croissante, $\ell \geqslant u_0 > 0$ donc $\ell \neq 0$.

En passant à la limite dans la relation précédente, $0 = \dfrac{u_0(u_1-u_0)}{\ell}$, ce qui est impossible car le numérateur est non nul.

Donc u diverge.

5. u est croissante et divergente, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1.3 Séries

Exercice 23.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

2. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

et en déduire la somme de la série précédente.

3. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n u_n$?

Correction n° 23.

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n^2$ et $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ est une série de Riemann convergente. Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

2. $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Par télescopage, $\forall n \geqslant 1, \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1 - \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

3. $n u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$ et $\sum_{n\geqslant 1} 1/n$ est une série de Riemann (ou harmonique) divergente. Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum_{n\geqslant 1} n u_n$ diverge.

Exercice 24.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$.

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

2. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{a}{n!} + \frac{b}{(n+1)!}$$
et en déduire la somme de la série précédente.

3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(n+1)u_n$ converge et déterminer sa somme.

4. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(n^2-1)u_n$ converge et déterminer sa somme.

Correction n° 24.

1. $u_n = \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n!}$ et $\sum_{n\geqslant 1} 1/n!$ est une série de exponentielle convergente.
Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

2. $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Par télescopage, $\forall n \geqslant 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

3. $(n+1)u_n = \dfrac{1}{(n-1)!}$ et $\forall n \geqslant 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)u_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$.

4. $(n^2-1)u_n = 0$ pour $n = 1$, et
$\forall n \geqslant 2, (n^2-1)u_n = \dfrac{(n-1)(n+1)n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n-2)!}$.

Donc : $\forall n \geqslant 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)u_k = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$.

Exercice 25.

Pour $n \in [\![2, +\infty[\![$, on pose $u_n = \dfrac{(n-1)}{2^n}$.

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$. et déterminer sa somme.

2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} nu_n$ converge et déterminer sa somme.

Correction n° 25.

1. $\dfrac{(n-1)}{2^n} = (n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \overset{k=n-1}{=} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{4}$, or comme $\dfrac{1}{2} \in \left]-1\,;1\right[$,

la somme géométrique dérivée $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ existe et vaut $\dfrac{1}{(1-1/2)^2} = 4$.

Donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ existe et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4} \times 4 = 1$.

2. $\dfrac{n(n-1)}{2^n} = n(n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} \times \dfrac{1}{4}$, or comme $\dfrac{1}{2} \in \left]-1\,;1\right[$,

la somme géométrique dérivée $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ existe et vaut $\dfrac{2}{(1-1/2)^3} = 16$.

Donc $\sum_{n\geqslant 2} nu_n$ existe et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} nu_n = \frac{1}{4} \times 16 = 4$.

Exercice 26.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, je pose : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n$.

1. Quelle est la nature de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$?

2. Établir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant u_n.$$

3. Pour $n \geqslant 1$, je pose :
$$v_n = \mathrm{S}_n - \ln(n) \text{ et } w_n = v_n - \frac{1}{n}.$$
Étudier les variations des suites v et w.

4. Montrer que v et w sont convergentes vers une même limite.

5. Montrer enfin que : $\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Correction n° 26.

1. La série harmonique $\sum_n u_n$ diverge (et sa limite est $+\infty$ car elle est à termes positifs.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [\,n\,; n+1\,]$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Par croissance de l'intégrale, $u_{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant u_n$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leqslant 0$: v décroît.
$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \geqslant 0$: w croît.

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n - w_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: v et w sont deux suites adjacentes, donc convergent, vers une même limite γ.

5. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \gamma$ avec w croissante et v décroissante :

$\forall n \geqslant 1, w_n \leqslant \gamma \leqslant v_n$ (propriété classique des suites adjacentes). Alors :

$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{S}_n - \ln n - \dfrac{1}{n} \leqslant \gamma \leqslant \mathrm{S}_n - \ln n,$

$\forall n \geqslant 1, \quad \gamma + \ln n \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \gamma + \ln n + \dfrac{1}{n},$

$\forall n \geqslant 2, \quad \dfrac{\gamma}{\ln n} + 1 \leqslant \dfrac{\mathrm{S}_n}{\ln n} \leqslant \dfrac{\gamma}{\ln n} + 1 + \dfrac{1}{n\ln n}.$

Comme le minorant et le majorant tendent vers 1,

par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{S}_n}{\ln n} = 1$, donc $\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 27.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, je pose : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. La série de terme général u_n est-elle absolument convergente ?

2. Je pose pour $n \geqslant 1$: $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Étudier les variations des suites v et w définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \mathrm{S}_{2n} \text{ et } w_n = \mathrm{S}_{2n-1}.$$

b) Montrer que v et w sont convergentes vers une même limite.

c) La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Correction n° 27.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |u_n| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ est une série de Riemann divergente ($\alpha = 1/2 \leqslant 1$), donc $\sum_n u_n$ n'est pas absolument convergente.

2. **a)** $\forall n \geqslant 1, v_{n+1} - v_n = \mathrm{S}_{2n+2} - \mathrm{S}_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} < 0$ car $2n+2 > 2n+1$.

$\forall n \geqslant 1, w_{n+1} - w_n = \mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n-1} = -\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2n}} > 0$ car $2n+1 > 2n$.

v décroît et w croît.

b) $\forall n \geqslant 1, v_n - w_n = 1/\sqrt{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: les suites v et w sont adjacentes donc convergent vers une même limite.

c) Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite, donc la suite (S_n) converge (vers cette limite commune).

1.4 Fonctions usuelles

Exercice 28.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\quad \ln\left(\dfrac{x+3}{4}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln(x) + \ln(3)).$

Correction n° 28.

Le domaine de définition de l'équation (E) est $]\,0\,;\,+\infty\,[$. Soit $x \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[$.

(E) $\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x+3}{4}\right) = \ln(\sqrt{3x}) \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{4} = \sqrt{3x}$ car ln est une bijection.

(E) $\Leftrightarrow (x+3)^2 = 16 \times 3x$ car tout est positif

(E) $\Leftrightarrow x^2 - 42x + 9 = 0$, et si on veut des calculs faisables de tête, $\Delta = 42^2 - 4 \times 9 = (2\times 3\times 7)^2 - (2\times 3)^2 = (2\times 3)^2(7^2-1) = 6^2 \times 48 = 6^2 \times 16 \times 3 = 24^2 \times 3$ donc

(E) $\Leftrightarrow x = \dfrac{42 \pm 24\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 21 \pm 12\sqrt{3}$

Comme $(12\sqrt{3})^2 = 3^2 \times 4^2 \times 3 = 3^2 \times 48$ et $21^2 = 3^2 \times 7^2 = 3^2 \times 49$, $21 > 12\sqrt{3}$ et les deux racines sont strictement positives, donc sont dans le domaine $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

$$\mathcal{S} = \{21 - 12\sqrt{3}, 21 + 12\sqrt{3}\}$$

Exercice 29.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\quad \ln\left|2x+1\right| + \ln\left|x+3\right| < \ln(3).$

Correction n° 29.

Le domaine de définition de l'inéquation est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1/2\}$ Soit $x \in \mathcal{D}$

(I) $\Leftrightarrow \ln|(2x+1)(x+3)| < \ln(3) \Leftrightarrow \left|2x^2 + 7x + 3\right| < 3$ car exp est strictement croissante.

(I) $\Leftrightarrow -3 < 2x^2 + 7x + 3 < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 7x < 0 \\ 2x^2 + 7x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x+7) < 0 \\ (2x+3)(x+2) > 0 \end{cases}$ (I) $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \in\,]-7/2\,;\,0\,[\\ x \in\,]-\infty\,;\,-2\,[\, \cup\,]-3/2\,;\,+\infty\,[\end{cases} \Leftrightarrow x \in\,]-7/2\,;\,-2\,[\, \cup\,]-3/2\,;\,0\,[$

En tenant compte de $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{S} = \,]-7/2\,;\,-3\,[\, \cup\,]-3\,;\,-2\,[\, \cup\,]-3/2\,;\,-1/2\,[\, \cup\,]-1/2\,;\,0\,[$$

Exercice 30.

1. Vérifier que $\cos^2 = \dfrac{1}{1 + \tan^2}$, puis montrer que

$$\cos(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

en précisant le domaine de validité de cette identité.

2. Démontrer que $\sin(\text{Arctan}x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ en précisant le domaine de validité de cette égalité.

Correction n° 30.

1. Pour x tel que $\cos(x) \neq 0$, $1+\tan^2(x) = \dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ d'où $\cos^2(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(x)}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}(x) \in \left]-\pi/2\,;\,\pi/2\right[$ donc $\cos(\text{Arctan}(x)) > 0$ (du coup $\neq 0$!).
Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\text{Arctan}(x)) = \sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2. De $\cos^2+\sin^2 = 1$ on déduit :
$\sin^2(\text{Arctan}(x)) = 1-\cos^2(\text{Arctan}(x)) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, puis
$|\sin(\text{Arctan}(x))| = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$, et comme $\sin(\text{Arctan}(x))$ est du signe de x,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

EXERCICE 31.

Montrer que : $\quad \forall x \in \left]0\,;\,1\right[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Correction n° 31.

Soit $\mathrm{I} = \left]0\,;\,1\right[$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^x(1-x)^{1-x}$.
$g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur I par composition, avec $g' : x \mapsto (1+\ln(x))x^x$.
Et par composition, $x \mapsto (1-x)^{1-x} = g(1-x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur I de dérivée
$$x \mapsto -g'(1-x) = -(1+\ln(1-x))(1-x)^{1-x}.$$
Comme produit, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I avec
$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) = [1+\ln(x)-(1+\ln(1-x))]\,f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) f(x)$$
Comme f est strictement positive sur I, le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} < 1 \Leftrightarrow x < 1-x \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < 1/2$
f est strictement décroissante sur $\left]0\,;\,1/2\right]$ et strictement croissante sur $\left[1/2\,;\,1\right[$. Son minimum est $f(1/2) = 1/2$, d'où
$$\forall x \in \left]0\,;\,1\right[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 32.

1. Démontrer que : $\forall x \in [0\,;\,\pi]\,,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

3. Donner une valeur approchée de $\sin(0,1)$ à 10^{-3} prés.

Correction n° 32.

1. Soit $\mathrm{I} = [0\,;\,\pi]$ et $f : x \mapsto x - \sin x$.
$\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) = 1-\cos(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur I. Comme $f(0) = 0$, f est positive sur I. Donc : $\forall x \in \mathrm{I}, \sin(x) \leqslant x$.
Soit $g : x \mapsto \sin(x) - x + x^3/6$.
$\forall x \in \mathrm{I}, g'(x) = \cos(x) - 1 + x^2/2$.
$\forall x \in \mathrm{I}, g''(x) = -\sin(x) + x = f(x) \geqslant 0$, donc g' est croissante sur I. Comme $g'(0) = 0$, g' est positive sur I. Donc g est croissante sur I, et comme $g(0) = 0$, g est positive sur I. Donc : $\forall x \in \mathrm{I}, x - x^3/6 \leqslant \sin(x)$.

2. $\forall x \int]0\,;\,\pi]\,, 1 - \dfrac{x^2}{6} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$ Par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
$\forall x \in \left]-\infty\,;\,0\right[, \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{-\sin(-x)}{-(-x)} = \dfrac{\sin(-x)}{-x}$ donc en posant $y = -x$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\sin y}{y} = 1$.
Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

3. Appliquons 1. avec $x = 0,1$:
$0,1 - \dfrac{0,1^3}{6} \leqslant \sin(0,1) \leqslant 0,1$, donc $-\dfrac{0,1^3}{6} \leqslant \sin(0,1) - 0,1 \leqslant 0$, donc $|\sin(0,1) - 0,1| \leqslant \dfrac{0,1^3}{6} \leqslant 0,001$: $\sin(0,1) \simeq 0,1$ à moins de $0,001$ près.

EXERCICE 33.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $\mathrm{e}^x - x = n$.

1. Montrer que (E_n) a une unique solution x_n dans $[0\,;\,+\infty[$.

2. Montrer que $x_n \geqslant \ln n$. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$?

3. Montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^y \geqslant 2y$. En déduire $x_n \leqslant n$.

Correction n° 33.

1. Soit $f : [0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x - x$.
$\forall x > 0, f'(x) = \mathrm{e}^x - 1 > 0$ car $\mathrm{e}^x > 1$. f est continue et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, donc f est une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ dans $f([0\,;\,+\infty[) = [0\,;\,+\infty[$. Donc tout n de $[0\,;\,+\infty[$ possède un unique antécédent par f dans $[0\,;\,+\infty[$. Autrement dit, pour tout $n \geqslant 0$, l'équation (E_n) possède une unique solution.

2. $f(x_n) = n$ et $f(\ln n) = n - \ln(n) \leqslant n$. Comme f est strictement croissante, $f(x_n) \geqslant f(\ln n)$ entraîne $x_n \geqslant \ln n$ (... f^{-1} est aussi strictement croissante).
Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

3. Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, y \mapsto \mathrm{e}^y - 2y$. $g'(y) = \mathrm{e}^y - 2$ donc g est décroissante sur $[\,0\,;\,\ln 2\,]$ et croissante sur $[\,\ln 2\,;\,+\infty\,[$. Son minimum est $g(\ln 2) = 2 - 2\ln(2) > 0$ car $2 < e \Rightarrow \ln 2 < 1$. Donc g est positive.
$f(n) - f(x_n) = \mathrm{e}^n - 2n > 0$, donc $f(n) > f(x_n)$, donc $n > x_n$ car f strictement croissante.

Exercice 34.
Montrer que : $\forall (a,b) \in \,]\,0\,;\,+\infty\,[^2$,
$\ln\left(\dfrac{a+b}{4}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) \iff a^2 + b^2 = 14ab$.

Correction n° 34.
$\ln\left(\dfrac{a+b}{4}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) \Leftrightarrow 2\ln\left(\dfrac{a+b}{4}\right) = \ln a + \ln b \Leftrightarrow \left(\dfrac{a+b}{4}\right)^2 = ab$
$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 16ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 14ab$.

Exercice 35.
Résoudre dans $[\,0\,;\,\pi\,]$ l'inéquation (I) : $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leqslant 1$.

Correction n° 35.
Faisons apparaître une formule d'addition :
$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x\right) = 2(\cos(\pi/6)\cos x - \sin(\pi/6)\sin x) =$
$2\cos(x+\pi/6)$ et (I) $\Leftrightarrow \cos(x+\pi/6) \leqslant \cos(\pi/3)$
Comme $x \in [\,0\,;\,\pi\,]$, $x + \pi/6 \in [\,\pi/6\,;\,13\pi/6\,]$.
(I) $\Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{6} \in [\,\pi/3\,;\,5\pi/3\,] \Leftrightarrow x \in [\,\pi/6\,;\,3\pi/2\,]$

1.5 Intégration, primitives

Exercice 36.
Déterminer les primitives de $x \longmapsto \tan^2 x$ sur $]\,-\pi/2\,;\,\pi/2\,[$.

Correction n° 36.
$x \mapsto (1 + \tan^2 x) - 1$ se primitive en $x \mapsto \tan x - x + constante$

Exercice 37.
1. Déterminer les primitives de $x \longmapsto \cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les primitives de $x \longmapsto \sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$.

Correction n° 37.
1. $\cos^2 x = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$, primitives : $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{4} + \dfrac{x}{2} + constante$
2. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, primitives : $x \mapsto \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin(2x)}{4} + constante$

Exercice 38.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^n \cos x \mathrm{d}x$.
1. Établir une relation entre J_{n+2} et J_n.
2. Calculer J_n pour n allant de 0 à 3.

Correction n° 38.
1. Par deux IPP : $\mathrm{J}_{n+2} = (\pi/2)^{n+2} - (n+2)\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^{n+1}\sin x \mathrm{d}x$
$= (\pi/2)^{n+1} - (n+2)(n+1)\mathrm{J}_n$
2. $\mathrm{J}_0 = 1$, par IPP $\mathrm{J}_1 = \pi/2 - \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \mathrm{d}x = \pi/2 - 1$,
puis $\mathrm{J}_2 = (\pi/2)^2 - 2\mathrm{J}_0 = \dfrac{\pi^2}{4} - 2$ et $\mathrm{J}_3 = (\pi/2)^3 - 6\mathrm{J}_1 = \dfrac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6$.

Exercice 39.
Et si on posait $x = \ln t$ pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$?

Correction n° 39.
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x \overset{x=\ln t}{=} \int_1^e \frac{1}{(1+t)t}\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{1+t-t}{(1+t)t}\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t =$
$\ln(e) - \ln(1) - \ln(e+1) + \ln(2) = \ln \dfrac{2e}{e+1}$.
On pouvait aussi tenter : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_0^1 1 - \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x = [x - \ln(1+e^x)]_0^1$...

Exercice 40.

Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est décroissante, et est convergente, de limite nulle.

Correction n° 40.

$\forall t \in [0\,;\,1]\,, 0 \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$ car $1+t^2 \geqslant 1$.

Par croissance de l'intégrale : $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

Par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

EXERCICE 41.

Vrai ou faux : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \cos t.\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t = 0$?

Correction n° 41.

VRAI !

$\forall t \in [0\,;\,\pi/2]\,, 0 \leqslant \cos t\mathrm{e}^{-nt} \leqslant \mathrm{e}^{-nt}$ car $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$.

Par croissance de l'intégrale : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t.\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-nt}}{n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi/2}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \cos t.\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t = 0$.

EXERCICE 42.

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathrm{I}_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\mathrm{d}x$.

1. En posant $t = 1-x$, montrer que $\mathrm{I}_{p,q} = \mathrm{I}_{q,p}$.
2. Établir une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_{p,q}$ et $\mathrm{I}_{p+1,q-1}$.
3. Calculer $\mathrm{I}_{p,0}$.
4. En déduire la valeur de $\mathrm{I}_{p,q}$ en fonction de p et q.

Correction n° 42.

1. $\mathrm{I}_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\mathrm{d}x \overset{t=1-x}{=} \int_1^0 (1-t)^p t^q \times (-1)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^p t^q \mathrm{d}t = \mathrm{I}_{q,p}$.
2. En intégrant par parties sur $[0\,;\,1]$ avec les fonctions $\mathcal{C}^1$ $u : x \mapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$ et $v : x \mapsto (1-x)^q$, $\mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p+1,q-1}$.
3. $\mathrm{I}_{p,0} = \dfrac{1}{p+1}$.
4. $\mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p+1,q-1} = \dfrac{q}{p+1}\dfrac{q-1}{p+2}\mathrm{I}_{p+2,q-2} = \cdots = \dfrac{q(q-1)\ldots(1)}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}\mathrm{I}_{p+q,0}$

   $\mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{q!p!}{(p+q+1)!}$, qu'on peut aussi démontrer par récurrence avec par exemple les propriétés :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{H}(p) : « \forall q \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_{p,q} = \frac{q!p!}{(p+q+1)!} ».$$

EXERCICE 43.

1. Établir que, pour tout x de $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant x$.
2. Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de l'intégrale $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \sin^n x\mathrm{d}x$.

Correction n° 43.

1. $[0\,;\,1] \subset [0\,;\,\pi]$ donc $\forall x \in [0\,;\,1]\,, \sin(x) \geqslant 0$.
   $\sin'' = -\sin \leqslant 0$ sur $[0\,;\,1]$ donc sin est concave, or $y = x$ est l'équation de la tangente à sa courbe en 0, donc : $\forall x \in [0\,;\,1]\,, \sin x \leqslant x$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0\,;\,1]\,, 0 \leqslant \sin^n(x) \leqslant x^n$.
   Par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$.
   Comme $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$ existe et vaut 0.

EXERCICE 44.

1. Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de l'intégrale $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n}\mathrm{d}x$.
2. En majorant $\left|\dfrac{n\sin x}{x+n} - \sin x\right|$ pour $x \in [0\,;\,\pi]$, calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}\mathrm{d}x\right).$$

Correction n° 44.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;\,\pi]\,, 0 \leqslant \dfrac{\sin x}{x+n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   Par croissance de l'intégrale, $\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \dfrac{\pi}{n}$.
   Par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;\,\pi]\,, \left|\dfrac{n\sin x}{x+n} - \sin x\right| = \left|\dfrac{-x\sin x}{x+n}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{n}$

Par l'inégalité triangulaire pour les intégrales :
$$\left|\int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}\mathrm{d}x - \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^\pi \left(\frac{n\sin x}{x+n} - \sin x\mathrm{d}x\right)\right| \leqslant \int_0^\pi \left|\frac{n\sin x}{x+n} - \sin x\right|\mathrm{d}x$$
$$\left|\int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}\mathrm{d}x - 2\right| \leqslant \int_0^\pi \frac{\pi}{n}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}\mathrm{d}x\right) = 2$

Exercice 45.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8k^3+n^3}$.

Correction n° 45.
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8k^3+n^3} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n^2(k/n)^2}{n^2(8(k/n)^3+1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k/n)^2}{8(k/n)^3+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k/n)$$
où $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{8x^3+1}$.
Comme f est continue, cette somme de Riemann converge vers :
$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{24}\int_0^1 \frac{24x^2}{8x^3+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{24}\left[\ln\left|8t^3+1\right|\right]_0^1 = \frac{1}{24}\ln 9 = \frac{\ln 3}{12}$$

Exercice 46.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$.

Correction n° 46.
Soit $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$. Comme $u_n > 0$, posons $v_n = \ln(u_n)$.
$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k/n) \text{ où } f : [0\,;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x^2).$$
Comme f est continue, la somme de Riemann v_n converge vers :
$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \overset{\text{IPP.}}{=} \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \ln 2 - \int_0^1 2 - \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$= \ln 2 - 2 + 2\mathrm{Arctan}(1) - 2\mathrm{Arctan}(0) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n} = \exp\left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\mathrm{e}^{\pi/2}}{\mathrm{e}^2}$

Exercice 47.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_x^1 \ln t\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0^+ et donner cette limite.
2. Établir : $\forall k \in [\![1\,;n]\!]$,
$$\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln x\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}.$$
3. Montrer alors que
$$u_n \leqslant \int_{1/n}^{(n+1)/n}\ln x\mathrm{d}x \leqslant u_n - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\ln\frac{n+1}{n}.$$
4. En déduire un encadrement de u_n et montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers -1.
5. En déduire
$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n),$$
puis
$$\ln(n!) = n\ln n - n + \underset{n\to+\infty}{o}(n).$$

Correction n° 47.

1. $\int_x^1 \ln t\mathrm{d}t = [t\ln t - t]_x^1 = -1 - x\ln x + x \xrightarrow[x\to 0]{} -1$.
2. Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. $\forall x \in \left[\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}\right], \ln\frac{k}{n} \leqslant \ln x \leqslant \ln\frac{k+1}{n}$.
   Par croissance de l'intégrale : $\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\ln x\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}$.
3. Sommons ces inégalités pour k parcourant $[\![1\,;n]\!]$:
   $u_n \leqslant \int_{1/n}^{(n+1)/n}\ln x\mathrm{d}x \leqslant u_n - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\ln\frac{n+1}{n}$.
4. Encadrons alors u_n :
   $\int_{1/n}^{(n+1)/n}\ln x\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant u_n \leqslant \int_{1/n}^{(n+1)/n}\ln x\mathrm{d}x$.
   Calculons l'intégrale :
   $\int_{1/n}^{(n+1)/n}\ln x\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_{1/n}^{(n+1)/n}$
   $= \left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$
   Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = -1$.

5. $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k - \ln n) = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln k - n\ln n\right) = \dfrac{1}{n}\ln(n!) - \ln n$,
d'où $\ln(n!) = n(u_n + \ln n)$. Comme $u_n = o(\ln n)$, $u_n + \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
Donc $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$.
Enfin : $\dfrac{\ln(n!) - n\ln n + n}{n} = \dfrac{nu_n + n}{n} = u_n + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
donc $\ln(n!) - n\ln n + n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$, $\ln(n!) = n\ln n - n + \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.

EXERCICE 48.

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x e^{t^2}dt \text{ et } g(x) = \int_x^{2x} e^{t^2}dt.$$

1. Déterminer la classe de dérivabilité de f et de g sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f et g sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}$.

Correction n° 48.

1. Soit H une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ $h : t \mapsto e^{t^2}$. H est dérivable, de dérivée $\mathcal{C}^\infty$ h, donc H est $\mathcal{C}^\infty$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(0)$ et $g(x) = \mathrm{H}(2x) - \mathrm{H}(x)$, donc f et g sont aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On peut aussi remarquer que f est la primitive de h nulle en 0.
2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{H}'(x) = h(x) = e^{x^2} > 0$, donc f est strictement croissante.
Et : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2\mathrm{H}'(2x) - \mathrm{H}'(x) = 2e^{4x^2} - e^{x^2} = e^{x^2}\left(2e^{3x^2} - 1\right)$.
Or : $x^2 \geqslant 0 \Rightarrow e^{3x^2} \geqslant 1 \Rightarrow 2e^{3x^2} - 1 \geqslant 1$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$ et g est strictement croissante.
3. $\forall t \geqslant 0, e^{t^2} \geqslant 1$ donc par croissance de l'intégrale,
$\forall x \geqslant 0, f(x) \geqslant \int_0^x 1dt = x$ et $g(x) \geqslant \int_x^{2x} 1dt = x$.
Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$,
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 1$.
Ainsi : $f(x) \underset{x\to0}{\sim} g(x) \underset{x\to0}{\sim} x$.

EXERCICE 49.

Soit $f :]-1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+xt}dt$. À l'aide du changement de variable $u = xt$, montrer que f est continue sur $]-1\,;+\infty[$.

Correction n° 49.

$u : t \mapsto xt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$.
$du = xdt$ donc pour $x \neq 0$, $dt = \dfrac{1}{x}du$. Ainsi, pour $x \neq 0$,
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{u}{1+u}du = \frac{1}{x^2}\int_0^x 1 - \frac{1}{1+u}du = \frac{1}{x^2}\left[u - \ln(1+u)\right]_0^x = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$
Ceci montrer déjà que f est continue sur $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.
De plus, $f(0) = \displaystyle\int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et au voisinage de 0 :
$f(x) = \dfrac{x - \left(x - x^2/2 + o(x^2)\right)}{x^2} = \dfrac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^2/2}{x^2} \xrightarrow[x\to0]{} \dfrac{1}{2}$.
Donc f est continue en 0 aussi.

1.6 Limites, continuité, dérivabilité

EXERCICE 50.

Déterminer l'existence des limites des fonctions suivantes au(x) point(s) indiqué(s). Donner leur valeur lorsqu'elles existent.

1. $h : x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{x^2}$ en 0, en $+\infty$.
2. $j : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$ en 0, en $+\infty$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\ln^2(\cos x)}{x^2}$ en 0.
4. $g : x \mapsto \dfrac{\cos x - e^x}{x^2}$ en 0, en $+\infty$.

Correction n° 50.

1.
   - $\sin x \underset{x\to0}{\sim} x$ donc $\sin^3 x \underset{x\to0}{\sim} x^3$ donc $h(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ donc $\lim\limits_{x\to0} h(x) = 0$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|\dfrac{\sin^3 x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.
2.
   - $\sqrt{1+x^2} - 1 \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{2}x^2$ donc $\lim\limits_{x\to0} j(x) = \dfrac{1}{2}$.

- $1+x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} x \Rightarrow \sqrt{1+x^2}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ car $1 = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$.

Donc $j(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1/x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} j(x) = 0$.

3. $\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc $\ln(\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x^2/2$,
donc $\ln^2(\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} x^4/4$, donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2/4$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

4.
- $\cos x - e^x = (\cos x - 1) - (e^x - 1)$, or $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x^2/2$ et $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\cos x - 1 = \underset{x\to 0}{o}(e^x - 1)$. Du coup : $(\cos x - 1) - (e^x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} -(e^x-1) \underset{x\to 0}{\sim} -x$.
$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} -1/x$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}$ donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2} = 0$.
$x^2 = \underset{x\to+\infty}{o}(e^x)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$.
Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

Exercice 51.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur une partie I de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
3. Expliciter $f^{-1}(y)$ pour $y \in$ I.
4. f^{-1} est-elle continue ?

Correction n° 51.

1. f est le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Notons que f est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$.
$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[, f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ donc f est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et
$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[, f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Par imparité, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et comme elle est continue, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{I} = f(\mathbb{R}) = \left]-1\,;1\right[$.

3. Remarque : comme $1+|x| > 0$, x et $f(x)$ sont toujours du même signe.
- Soit $y \in \left[0\,;1\right[$ et $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = f(x)$.
$y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{1+x} \Leftrightarrow y(1+x) = x \Leftrightarrow y = x(1-y) \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{1-y}$
- Soit $y \in \left]-1\,;0\right[$ et $x \in \mathbb{R}^-$ tel que $y = f(x)$.
$y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{1-x} \Leftrightarrow y(1-x) = x \Leftrightarrow y = x(1+y) \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{1+y}$
- Donc : $f^{-1} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, y \mapsto \dfrac{y}{1-|y|}$.

4. f^{-1} est le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur I : f^{-1} est continue.

Exercice 52.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$. *Indication :* on pourra étudier le comportement en $\pm\infty$ de $g : x \mapsto f(x) - x$.

Correction n° 52.

Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. g est continue sur $\mathbb{R}$.
Comme f est décroissante, elle admet une limite en $+\infty$ qui est soit finie, soit $-\infty$. Du coup, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
De même, f étant décroissante, elle admet une limite en $-\infty$ qui est soit finie, soit $+\infty$. Du coup, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Le théorème de la valeur intermédiaire appliqué à g (continue) montre que g s'annule au moins une fois, donc f admet au moins un point fixe.

Supposons que f possède deux points fixes distincts a et b avec $a < b$. Alors : $f(a) = a < b = f(b)$, donc $f(a) < f(b)$ avec $a < b$, ce qui contredit que f est décroissante. Donc f n'a qu'un point fixe.

Exercice 53.

Soit $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2(1+x)^n$.

1. Quelle est la classe de dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$?
2. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Correction n° 53.

1. f est une fonction polynomiale donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Par la formule de Leibniz,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} \big((1+x)^n)\big)^{(n-k)}$$
$$= \binom{n}{0} x^2 \big((1+x)^n\big)^{(n)} + \binom{n}{1} 2x\big((1+x)^n\big)^{(n-1)} + \binom{n}{2} 2\big((1+x)^n)\big)^{(n-2)}$$
$$= 1 \times x^2 \times (n!) + n \times 2x \times (n!)(1+x) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \times \frac{n!}{2}(1+x)^2$$
$$= n!\left[\big(1 + 2n + \frac{n(n-1)}{2}\big)x^2 + \big(2n + n(n-1)\big)x + \frac{n(n-1)}{2}\right]$$
$$= n!\left[\big(\frac{5}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1\big)x^2 + \big(3n^2 - n\big)x + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\right]$$

EXERCICE 54.

On considère la fonction définie sur $[\,0\,;\,1\,]$ par :
$\forall x \in [\,0\,;\,1\,], \quad f(x) = x^n(x-1)^n$.

1. Justifier que :
$\forall k \in [\![0\,;\,n-1]\!], \quad f^{(k)}(0) = 0$.

2. Justifier de même que :
$\forall k \in [\![0\,;\,n-1]\!], \quad f^{(k)}(1) = 0$.

3. Montrer que, pour tout k de $[\![1\,;\,n]\!]$, $f^{(k)}$ possède au moins k racines distinctes dans l'intervalle $]\,0\,;\,1\,[$.
Conseil : On pourra commencer par étudier précisément les cas $k = 1$, puis $k = 2$, ...

Correction n° 54.

1. C'est une conséquence directe du cours sur les polynômes car 0 est une racine d'ordre de multiplicité n de f.

2. C'est une conséquence directe du cours sur les polynômes car 1 est une racine d'ordre de multiplicité n de f.

3. Comme f est dérivable sur $[\,0\,;\,1\,]$ et $f(0) = f(1)$, d'après de le théorème de Rolle, il existe $a_1 \in\,]\,0\,;\,1\,[$ tel que $f'(a_1) = 0$.
Comme f' est dérivable sur $[\,0\,;\,1\,]$ et $f'(0) = f'(a_1) = f'(1) = 0$, d'après de le théorème de Rolle, il existe $b_1 \in\,]\,0\,;\,a_1\,[$ et $b_2 \in\,]\,a_1\,;\,1\,[$ tels que $f''(b_1) = f''(b_2) = 0$.
Comme f'' est dérivable sur $[\,0\,;\,1\,]$ et $f''(0) = f''(b_1) = f''(b_2) = f''(1) = 0$, d'après de le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in\,]\,0\,;\,b_1\,[$, $c_2 \in\,]\,b_1\,;\,b_2\,[$ et $c_3 \in\,]\,b_2\,;\,1\,[$ tels que $f^{(3)}(c_1) = f^{(3)}(c_2) = f^{(3)}(c_3) = 0$.
Et on peut poursuivre ce raisonnement par récurrence tant que $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ sont nulles...

EXERCICE 55.

Étudier la dérivabilité de $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cos\sqrt{x}$.

Correction n° 55.

- $\sqrt{.}$ est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et prend ses valeurs dans $]\,0\,;\,+\infty\,[$. cos est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, donc par composition f est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
- $\forall x > 0, \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x}$.

Comme $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $\cos(\sqrt{x}) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\sqrt{x}^2/2$, donc $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\sim} -1/2$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}$, f est dérivable en 0.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

EXERCICE 56.

Soit $f :]\,0\,;\,+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^x$.

1. Dresser le tableau de variation de f.

2. Déterminer la classe de dérivabilité de la fonction f.

3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
On notera encore f le prolongement par continuité de f en 0.

4. Étudier si le prolongement obtenu est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

5. Quel est le plus grand réel α tel que f réalise une bijection de $[\,0\,;\,\alpha\,]$ sur $f([\,0\,;\,\alpha\,])$?

6. Soit $\mathrm{I} = [\,0\,;\,\alpha\,]$ et $\mathrm{J} = f([\,0\,;\,\alpha\,])$.
On note $g : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ la bijection réciproque de f. Justifier que g est dérivable sur $\mathrm{K} = f(]\,0\,;\,\alpha\,[)$, et donner une expression de sa dérivée.

Correction n° 56.

1. $\forall x > 0, f(x) = \exp(x \ln x)$ est dérivable avec
$\forall x > 0, f'(x) = (\ln x + 1)\exp(x \ln x)$, qui est du signe de $\ln x + 1$ c'est-à-dire strictement négative sur $\left]\,0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\,\right[$ et strictement positive sur $\left]\,\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\,\right[$.
f est strictement décroissante sur $\left]\,0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\,\right]$ et strictement croissante sur $\left[\,\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\,\right[$.

2. Comme $x \mapsto x \ln x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par composition.

3. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

4. Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\exp(x \ln x) - 1}{x}$,
et comme $x \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $\exp(x \ln x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \ln x$
Donc $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\sim} \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$: f n'est pas dérivable en 0.

5. Sur $\left[\,0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\,\right]$, f est continue et strictement décroissante, donc est une bijection. Mais si $\alpha > \mathrm{e}^{-1}$, f n'est plus strictement monotone au voisinage de e^{-1} et certains réels ont la même image : f n'est plus injective. Le plus grand α possible est e^{-1}.

6. Comme f est dérivable sur $\left]\,0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\,\right[$ et comme sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle, g est dérivable sur K.
Soit $y \in \mathrm{K}$ et $x \in \left]\,0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\,\right[$ tels que $y = f(x)$.
$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y)} = \frac{1}{(\ln(g(y)) + 1)\exp(g(y)\ln(g(y))} = \frac{1}{(\ln(x) + 1)\exp(x\ln(x))}$$

EXERCICE 57.

Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}.$$

Soit $f : [1\,;2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que : $f([1\,;2]) \subset [1\,;2]$.

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1\,;2]$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1\,;2]$. On note φ cette solution.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \varphi| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \varphi|$.

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \varphi| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

6. Justifier que u converge et préciser sa limite.

7. Montrer que u_{10} est une valeur approchée de φ à moins de 10^{-3} près.

8. Montrer qu'on obtient les mêmes conclusions en prenant $u_0 = 2$ à la place de $u_0 = 1$.

9. Étudier la variation de u lorsque $u_0 = 1$ puis lorsque $u_0 = 2$. La variation de u est-elle systématiquement la même que celle de f ?

Correction n° 57.

1. f est dérivable et : $\forall x \in [1\,;2], f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$. Donc f est strictement croissante. Comme $f(1) = \sqrt{2} \geqslant 1$ et $f(2) = \sqrt{3} \leqslant 2$, $f([1\,;2]) \subset [1\,;2]$.

2. Par une récurrence sur n, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1\,;2]$.

3. $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow 1+x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.
Les deux solutions de cette équation sont $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.
$2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 3 < 1+\sqrt{5} < 4 \Rightarrow \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \in [1\,;2] : \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'unique solution de $f(x) = x$ dans $[1\,;2]$.

4. f est dérivable sur $[1\,;2]$ avec : $\forall x \in [1\,;2], |f'(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x,y) \in [1\,;2]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|.$$

En appliquant ceci à $x = u_n$ et $y = \varphi$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \varphi|.$$

5. Par récurrence sur n, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \varphi| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

6. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \varphi$.

7. Avec $n = 10$: $2^{10} = 1024 > 1000$ donc $\dfrac{1}{2^{10}} < 10^{-3}$, d'où $|u_{10} - \varphi| \leqslant 10^{-3}$: u_{10} est une valeur approchée de φ à moins de 10^{-3} près.

8. Puisque $u_0 = 2 \in [1\,;2]$, tous les arguments (et toutes les conclusions) des questions 1 à 7 demeurent.

9. • Si $u_0 = 1$, alors $u_1 = \sqrt{2} > u_0$.
Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$, l'hérédité provenant de la stricte croissance de f ($u_{n+1} > u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) > f(u_n) \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$).
u est strictement croissante.
• Si $u_0 = 2$, alors $u_1 = \sqrt{3} < u_0$.
Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$, l'hérédité provenant de la stricte croissance de f ($u_{n+1} < u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) < f(u_n) \Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$).
u est strictement décroissante.
Moralité : la variation de u n'est pas nécessairement celle de f.

1.7 Formules de Taylor

EXERCICE 58.

1. Établir à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral que :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \left|\sin u - u\right| \leqslant \frac{u^2}{2}.$$

2. Que vaut, pour $u > 0$, $\displaystyle\int_u^{2u} \frac{\mathrm{d}x}{x}$?

3. Montrer que : $\displaystyle\lim_{u\to0^+} \int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x = \ln 2$.

Correction n° 58.

1. sin est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, $\sin(0) = 0$, $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin''(x)| = |-\sin(x)| \leqslant 1$.
Écrivons la formule de Taylor avec reste intégral :
$\forall u \in \mathbb{R},\quad \sin(u) = 0 + 1.\sin(u) + \displaystyle\int_0^u \frac{u-t}{1!}\sin^{(2)}(t)\mathrm{d}t$,
d'où $|\sin(u) - u| = \left|\displaystyle\int_0^u \frac{u-t}{1!}\sin^{(2)}(t)\mathrm{d}t\right|$
Prudence ! La comparaison d'intégrales exige $a \leqslant b$...
• pour $u \geqslant 0$:
$\left|\displaystyle\int_0^u \frac{u-t}{1!}\sin^{(2)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^u \left|(u-t)\sin^{(2)}(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_0^u (u-t)\mathrm{d}t$,
et $\displaystyle\int_0^u (u-t)\mathrm{d}t \overset{x=u-t}{=} \int_0^u x\mathrm{d}x = \frac{u^2}{2}$.

- pour $u < 0$:
$\left|\int_0^u \frac{u-t}{1!}\sin^{(2)}(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_u^0 \frac{u-t}{1!}\sin^{(2)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_u^0 \left|(u-t)\sin^{(2)}(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_u^0 (t-u)\mathrm{d}t$,
et $\int_0^u (u-t)\mathrm{d}t \overset{x=t-u}{=} \int_{-u}^0 x\mathrm{d}x = \frac{u^2}{2}$.
- Bon bin voilà, on peut affirmer que :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \left|\sin u - u\right| \leqslant \frac{u^2}{2}.$$

2. Pour $u > 0$, $\int_u^{2u} \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln|x|]_u^{2u} = \ln(2u) - \ln(u) = \ln(2) + \ln(u) - \ln(u) = \ln 2$

3. Pour $u > 0$:
$\left|\int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x - \ln 2\right| = \left|\int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right| = \left|\int_u^{2u} \frac{\sin x - x}{x^2}\mathrm{d}x\right|$
Par l'inégalité triangulaire et par 1. :
$\left|\int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x - \ln 2\right| \leqslant \int_u^{2u} \frac{|\sin x - x|}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_u^{2u} \frac{1}{2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{u}{2}$
Par encadrement : $\left|\int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x - \ln 2\right| \xrightarrow[u\to 0^+]{} 0$
$\lim_{u\to 0^+} \int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x = \ln 2$.

Exercice 59.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Justifier que $\mathcal{B} = \left(1, \mathrm{X}+1, (\mathrm{X}+1)^2, \dots, (\mathrm{X}+1)^n\right)$ est une base de E.

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. Justifier que les coordonnées de P dans $\mathcal{B}$ sont $\left(\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}'(-1), \frac{\mathrm{P}''(-1)}{2!}, \dots, \frac{\mathrm{P}^{(n)}(-1)}{n!}\right)$.

3. Déterminer les coordonnées de $\mathrm{P} = 4\mathrm{X}^3 + 15\mathrm{X}^2 + 20\mathrm{X} + 10$ dans la base $\left(1, \mathrm{X}+1, (\mathrm{X}+1)^2, (\mathrm{X}+1)^3\right)$.

Correction n° 59.

1. La famille $\mathcal{B}$ est constituée de $n+1$ vecteurs échelonnés en degré de 1 à n : c'est une base de E.

2. En appliquant la formule de Taylor en -1 avec reste intégral à l'ordre n à P qui est $\mathcal{C}^\infty$, le reste intégral est nul car $\mathrm{P}^{(n+1)} = 0$, d'où :
$\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k$.

3. Les coordonnées de P dans $\left(1, \mathrm{X}+1, (\mathrm{X}+1)^2, (\mathrm{X}+1)^3\right)$ sont $\left(\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}'(-1), \frac{\mathrm{P}''(-1)}{2}, \frac{\mathrm{P}^{(3)}(-1)}{6}\right) = \left(1, 2, 3, 4\right)$.

Exercice 60.

Déterminer le développement limité de $f : x \mapsto \exp(x^2)$ en 0 à l'ordre 3

1. à l'aide de la formule de Taylor-Young ;

2. à l'aide du développement limité de exp.

Correction n° 60.

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composition.
$f(0) = 1$, $f'(x) = 2x\exp(x^2)$ donc $f'(0) = 0$, $f''(x) = (2+4x^2)\exp(x^2)$ donc $f''(0) = 2$ et $f^{(3)}(x) = (12x + 8x^2)\exp(x^2)$ donc $f^{(3)}(0) = 0$.
Par la formule de Taylor-Young : $f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

2. $\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$.
Posons $u = x^2$, on a bien $u \to 0$ quand $x \to 0$.
Alors $\exp(x^2) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$.
Et comme $\frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) = \underset{x\to 0}{o}(x^3)$,
$f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
Cette méthode est bien plus rapide, mais attention, un développement limité à l'ordre 1 de exp aurait été insuffisant. Il aurait donné : $f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

2 Algèbre

2.1 Dénombrements, applications et ensembles

Exercice 61.

Dans chacun des cas suivants, on donne un ensemble E et des parties A et B de E : déterminer $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$, $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$, $\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}$ et $\mathrm{B}\setminus\mathrm{A}$.

1. $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, $\mathrm{A} = [0; 2]$ et $\mathrm{B} =]-1; 1[$.

2. $\mathrm{E} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $\mathrm{A} = \{1; 3; 4\}$ et $\mathrm{B} = \{3; 5\}$.

3. $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, $\mathrm{A} = \mathbb{Z}$ et $\mathrm{B} = [0; 12]$.

Correction n° 61.

1. $\mathrm{A}\cup\mathrm{B} =]-1\,;\,2]$, $\mathrm{A}\cap\mathrm{B} = [0\,;\,1[$, $\mathrm{A}\setminus\mathrm{B} = [1\,;\,2]$, $\mathrm{B}\setminus\mathrm{A} =]-1\,;\,0[$.

2. $\mathrm{A}\cup\mathrm{B} = \{1; 3; 4; 5\}$, $\mathrm{A}\cap\mathrm{B} = \{3\}$, $\mathrm{A}\setminus\mathrm{B} = \{1; 4\}$, $\mathrm{B}\setminus\mathrm{A} = \{5\}$.

3. $\mathrm{A}\cup\mathrm{B} = \mathbb{Z}^- \cup]0\,;\,12[\cup [\![12; +\infty[\![$ (par exemple), $\mathrm{A}\cap\mathrm{B} = [\![1\,;\,12]\!]$,

$A \setminus B =]] -\infty; -1]] \cup [[13; +\infty[[$, $B \setminus A = \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant 11}]\, k\,;\, k+1\,[$.

Exercice 62. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = [1; n]$. Déterminer

1. $\bigcup_{1 \leqslant n \leqslant 5} A_n$.

2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

3. $\bigcap_{1 \leqslant n \leqslant 5} A_n$.

4. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

Correction n° 62.

1. $\bigcup_{1 \leqslant n \leqslant 5} A_n = [\,1\,;\,5\,]$.

2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = [\,1\,;\,+\infty\,[$.

3. $\bigcap_{1 \leqslant n \leqslant 5} A_n = A_1 = \{1\}$.

4. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = A_1 = \{1\}$.

Exercice 63.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$.

2. $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$.

3. $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Correction n° 63.

1.
- Si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$ par définition de $\cup$.
- Si $A \cup B = B$, supposons qu'il existe $x \in A$ tel que $x \notin B$. Alors $x \in A \cup B$ puisque $x \in A$. Donc $x \in B$ puisque $A \cup B = B$, ce qui est contradictoire. Donc tout x de A appartient à B : $A \subset B$.

2.
- Si $B \subset A$ alors $A \cap B = B$ par définition de $\cap$.
- Si $A \cap B = B$, comme par définition de $\cap$, $A \cap B \subset A$, on a bien $B \subset A$.

3.
- Si $A = B$ alors par définition de $\cap$ et $\cup$, $A \cup B = A \cap B$.
- Si $A \cup B = A \cap B$, alors pour tout x de E,
  $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$.
  On montre de même que : $x \in B \Rightarrow x \in A$.
  Donc $A \subset B$ et $B \subset A$, donc $A = B$.

Exercice 64.

Sur une étagère d'une bibliothèque sont disposés 20 livres deux à deux distincts.

1. Combien y a-t-il de rangements possibles ?

2. Deux de ces vingt livres sont signés par Monsieur $\mathcal{F}$. Combien y a-t-il de rangements possibles tels que ces deux livres soient côte à côte ?

3. On range les livres complétement au hasard. Quelle est la probabilité que les deux livres de M. $\mathcal{F}$ ne soient pas côte à côte ?

Correction n° 64.

1. Il y a 20! permutations possibles des 20 livres (et l'on comprend sur cet exemple pourquoi on appelle cela une permutation.

2. Organisons les permutations satisfaisantes. Choisissons la place du livre le plus à gauche de M. $\mathcal{F}$ (19 places possibles, le livre le plus à gauche ne pouvant se situer en $20^{\text{ème}}$ position), puis choisissons l'ordre ces deux livres (2 possibilités), puis rangeons les 18 livres restants dans les 18 places vacantes (18! possibilités).
Au total $19 \times 2 \times 18! = 19! \times 2$ possibilités.

3. La probabilité cherchée est, par passage au contraire et équiprobabilité :
$p = 1 - \dfrac{19! \times 2}{20!} = 1 - \dfrac{2}{20} = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10}$.

Exercice 65.

Soient $a_1, \ldots, a_n$ n entiers naturels non nuls. On considère un mot contenant a_1 fois la lettre L_1, a_2 fois la lettre L_2, ... et a_n fois la lettre L_n. Trouver le nombre d'anagrammes de ce mot (on ne se préoccupe pas de savoir si elles ont un sens ...).

Correction n° 65.

Il y a au total $A = a_1 + \cdots + a_n$ lettres dans le mot.

Je choisis la place des a_1 lettres L_1 : $\dbinom{A}{a_1}$ possibilités.

Je choisis la place des a_2 lettres L_2 : $\dbinom{A - a_1}{a_2}$ possibilités.

$\vdots$

Je choisis la place des a_n lettres L_n : $\dbinom{A - (a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1})}{a_n} = 1$ possibilité.

Le nombre d'anagrammes est :

$N = \dbinom{A}{a_1}\dbinom{A - a_1}{a_2} \ldots \dbinom{A - (a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1})}{a_n}$ qui se simplifie :

$N = \dfrac{A!}{a_1!(A - a_1)!} \times \dfrac{(A - a_1)!}{a_2!(A - a_1 - a_2)!} \times \cdots \times \dfrac{(A - a_1 - \cdots - a_{n-1})!}{a_n!0!}$

$N = \dfrac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)!}{a_1!a_2!\ldots a_n!}$, coefficient appelé coefficient multinomial de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Exercice 66.

Calculer $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}$, puis $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}2k\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}(2k+1)\binom{n}{2k+1}$.

Correction n° 66.

Notons $\mathrm{P}_n=\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}$ et $\mathrm{I}_n=\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}$.

$\mathrm{P}_n+\mathrm{I}_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\overset{binme}{=\!=}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i1^{n-i}=(1+1)^n=2^n\quad(1).$

$\mathrm{P}_n-\mathrm{I}_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\overset{binme}{=\!=}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i(-1)^{n-i}=(1-1)^n=0^n=0\text{ si }n\geqslant 1\quad(2).$

$(1)+(2)$ donne $\mathrm{P}_n=2^{n-1}$ et $(1)-(2)$ donne $\mathrm{I}_n=2^{n-1}$.

Cas particulier : $n=0\Rightarrow \mathrm{P}_0=1$ et $\mathrm{I}_0=0$.

Pour les deux autres sommes, on peut utiliser $p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}$:

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}2k\binom{n}{2k}=\sum_{1\leqslant 2k\leqslant n}2k\binom{n}{2k}=\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}n\binom{n-1}{2k-1}=n\mathrm{I}_{n-1}=n2^{n-2}$$

$$\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}(2k+1)\binom{n}{2k+1}=\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}n\binom{n-1}{2k}=n\mathrm{P}_{n-1}=n2^{n-2}$$

Cas particuliers pour $n=0$ et $n=1$...

Exercice 67.

Montrer que :

$\forall p\in\mathbb{N},\ \forall n\in[\![0\,;\,p]\!]\,,\ \displaystyle\sum_{k=n}^{p}\binom{k}{n}=\binom{p+1}{n+1}$.

On pourra exprimer $\binom{k}{n}$ à l'aide de $\binom{k+1}{n+1}$ et $\binom{k}{n+1}$.

Correction n° 67.

Pascal : $\binom{k}{n}=\binom{k+1}{n+1}-\binom{k}{n+1}$. Puis par télescopage :

$$\sum_{k=n}^{p}\binom{k}{n}=\sum_{k=n}^{p}\left(\binom{k+1}{n+1}-\binom{k}{n+1}\right)=\binom{p+1}{n+1}-\binom{n}{n+1}=\binom{p+1}{n+1}.$$

Exercice 68.

On considère un jeu de dominos dont chaque moitié est frappée de 0 à 9 points.

1. De combien de dominos est constitué un tel jeu ?

2. Que vaut la somme de tous les points marqués sur ces dominos ?

Correction n° 68.

1. L'ensemble de dominos peut-être représenté par $\{(i,j)\in[\![0\,;\,9]\!]^2\,/i\leqslant j\}$. On impose $i\leqslant j$ pour éviter de compter des dominos en double.

Il y exactement 10 dominos du type $(0,j)$, puis 9 dominos du type $(1,j)$, etc.... et 1 domino $(9,9)$. Soit au total $10+9+\cdots+2+1=10\times 11/2=55$ dominos.

2. Le chiffre i apparaît exactement 11 fois : 2 fois sur le domino (i,i) et 9 fois en “simple”. La somme totale vaut donc $11\times 0+11\times 1+\cdots+11\times 9=11\times(0+1+\cdots+9)=11\times 9\times 10/2=495$.

Exercice 69.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On cherche le nombre de façons F_n de payer une somme de n euros à l'aide exclusivement de pièces de 1 ou 2 euros, d'abord sans tenir compte de l'ordre dans lequel on débourse les pièces, puis en en tenant compte.

1. Lorsque l'on ne tient pas compte de l'ordre, déterminer F_n pour $n=0,1,2,3$ et 4 puis montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{F}_n=1+\lfloor n/2\rfloor$.

Jusqu'à la fin de l'exercice, on tient compte de l'ordre dans lequel on débourse les pièces.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0=1,\quad u_1=1\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1}-\left(-\varphi^{-1}\right)^{n+1}\right),$$

où $-\varphi^{-1}<\varphi$ sont les deux racines de x^2-x-1.

3. *Première méthode*

a) En notant k le nombre de pièces de 2 euros utilisées, montrer que $\mathrm{F}_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-k}{k}$.

b) Montrer à l'aide de la formule de Pascal que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{F}_{n+2}=\mathrm{F}_{n+1}+\mathrm{F}_n$.

c) En déduire F_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

4. *Seconde méthode*

Soit P_n l'ensemble des façons de payer n euros, Q_n l'ensemble des façons de payer n euros *en commençant par une pièce d'un euro* et R_n l'ensemble des façons de payer n euros *en commençant par une pièce de deux euros.*

a) Justifier que, pour $n \geqslant 1$, $Card(Q_n) = F_{n-1}$, et pour $n \geqslant 2$, $Card(R_n) = F_{n-2}$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

c) En déduire F_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Correction n° 69.

1. Il y a une façon de payer 0 euro : ne rien donner ! Puis
$1 = 1 \times 1$ donc $F_1 = 1$,
$2 = 2 \times 1 = 1 \times 2$ donc $F_2 = 2$,
$3 = 3 \times 1 = 1 \times 2 + 1 \times 1$ donc $F_3 = 2$,
$4 = 4 \times 1 = 1 \times 2 + 2 \times 1 = 2 \times 2$ donc $F_4 = 3$...
Pour payer n euros, on peut utiliser de 0 à $\lfloor n/2 \rfloor$ pièce(s) de 2 euros, ce qui donne exactement $1 + \lfloor n/2 \rfloor$ possibilités : $F_n = 1 + \lfloor n/2 \rfloor$.

2. u est une suite (dite de Fibonacci) vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique $x^2 = x + 1$ donc les racines sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre de d'or !) et $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
De plus, $x^2 - x - 1 = (x - \varphi)(x - \varphi') = x^2 - (\varphi + \varphi')x + \varphi\varphi'$ entraîne les relations $\varphi + \varphi' = 1$ et $\varphi\varphi' = -1$, soit $\varphi' = -\varphi^{-1}$, ainsi que $\varphi^2 = \varphi + 1$.
Le cours indique que : $\exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a\varphi^n + b\varphi'^n$.
On vérifie sans peine que, avec $u_0 = u_1 = 1$, que $a = \dfrac{\varphi}{\sqrt{5}}$ et $b = -\dfrac{\varphi'}{\sqrt{5}}$.

3. a) Soit $k \in [\![0\,;\lfloor n/2 \rfloor]\!]$. Le nombre de façons de payer n euros avec k pièces de 2 euros est le nombre de façons de choisir les places de ces pièces lors du paiement. Il y a k pièces de 2 euros et $n - 2k$ pièces de 1, soit au total $n - k$ pièces à débourser, et $\dbinom{n-k}{k}$ choix possibles des k places des pièces de 2. D'où : $F_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}$.

b) $F_n + F_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n+1-k}{k} =$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n-(k-1)}{k} =$$

$$\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j} + 1 + \sum_{j=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1} \binom{n-j}{j+1}$$

Or $\dbinom{n-j}{j} + \dbinom{n-j}{j+1} \overset{\text{Pascal}}{=} \dbinom{n+1-j}{j+1}$. Il reste à gérer proprement les bornes.
Si n est pair, disons $n = 2p$, $\lfloor n/2 \rfloor = p$ et $\lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1 = p - 1$:

$$F_n + F_{n+1} = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{n+1-j}{j+1} + 1 + 1 = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{n+2-(j+1)}{j+1} + 1 + 1$$

$$= \sum_{j=0}^{p+1} \binom{n+2-k}{k} = \sum_{j=0}^{\lfloor (n+2)/2 \rfloor} \binom{n+2-k}{k} = F_{n+2}$$

Si n est impair, disons $n = 2p+1$, $\lfloor n/2 \rfloor = p$ et $\lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1 = p$: et une analyse analogue donne aussi $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$.

c) Comme $F_0 = F_1 = 1$, (u_n) et (F_n) coïncident : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = u_n$.

4. a) • Si on commence par une pièce d'un euro, il reste $n - 1$ euros à payer, et pour cela il y a F_{n-1} façons de procéder, donc $Card(Q_n) = F_{n-1}$.
• Si on commence par une pièce de deux euros, il reste $n - 2$ euros à payer, et pour cela il y a F_{n-2} façons de procéder, donc $Card(R_n) = F_{n-2}$.

b) On a $P_n = Q_n \cup R_n$ et $Q_n \cap R_n = \emptyset$, donc $Card(P_n) = Card(Q_n) + Card(R_n)$, or $Card P_n = F_n$.
Ainsi : $\forall n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, soit encore $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

c) Comme $F_0 = F_1 = 1$, (u_n) et (F_n) coïncident : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = u_n$.

Exercice 70.

1. Soit E un ensemble non vide et $f : E \to E$ une application. On suppose qu'il existe un entier naturel n non nul tel que $f^n = \mathrm{Id}_E$, où $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois). Montrer que f est une bijection de E sur lui-même.

2. Soit $\mathcal{P}$ un plan, A un point de $\mathcal{P}$ et r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2016}$. Montrer *trés rapidement* que r est une bijection de $\mathcal{P}$ sur lui-même.

Correction n° 70.

1. On a : $f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ ce qui montre que f est bijective, de bijection réciproque f^{n-1}.

2. En appliquant 4032 fois r, on a une rotation d'angle $4032 \times \dfrac{\pi}{2016} = 2\pi$... c'est-à-dire l'identité.
Donc $r^{4032} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ donc r est une bijection.

Exercice 71.

Dans un ensemble E de cardinal n, on considère une partie A de cardinal a et on note $b = n - a$. Soit enfin m un entier naturel.

1. Combien E a-t-il de partie(s) à m éléments ?

2. Soit k un entier de $[\![0\,;\,m]\!]$. Combien de ces parties ont exactement k éléments dans A ?

3. Justifier que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{a}{k}\binom{b}{m-k}=\binom{a+b}{m}$.

4. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ et montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\leqslant 4^n$.

Correction n° 71.

1. Il y en a $\binom{a+b}{m}=\binom{n}{m}$, c'est dans le cours.

2. Recensons les parties à m éléments dont exactement k sont dans A. On choisit k éléments de A - il y a $\binom{a}{k}$ possibilités -, puis à chaque fois $m-k$ éléments dans le complémentaire de A - soit $\binom{b}{m-k}$. Au total, il y a $\binom{a}{k}\binom{b}{m-k}$ parties de ce type.

3. Parmi les parties $\binom{a+b}{m}$ à m éléments, il y en a exactement $\binom{a}{0}\binom{b}{m-0}$ sans élément dans A, $\binom{a}{1}\binom{b}{m-1}$ avec 1 élément dans A, $\binom{a}{2}\binom{b}{m-2}$ avec 2 éléments dans A, etc.

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{a}{k}\binom{b}{m-k}=\binom{a+b}{m}$.

4. Prenons la formule précédente avec $a=b=m=n$:

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}$, or $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$,

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

Et comme $\binom{2n}{n}$ est le nombre de parties à n éléments d'une ensemble à $2n$ éléments alors que 2^{2n} est le nombre total de parties d'un ensemble à $2n$ éléments (et pas seulement celles à n éléments),

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}\leqslant 2^{2n}=4^n$.

EXERCICE 72.

Montrer que l'application suivante est bijective :

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z},n\mapsto\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair}\\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}.$$

Correction n° 72.

Il est conseillé de calculer les premières valeurs de f pour comprendre ... $f(0)=?$, $f(1)=?$, $f(2)=?$, $f(3)=?$,...

- Si n et m sont pairs, $f(n)=f(m)\Rightarrow\dfrac{n}{2}=\dfrac{m}{2}\Rightarrow n=m$.

Si n et m sont impairs, $f(n)=f(m)\Rightarrow-\dfrac{n+1}{2}=-\dfrac{m+1}{2}\Rightarrow n=m$.
Si n est pair et m est impair, alors $f(n)\geqslant 0>f(m)$ donc $f(n)\neq f(m)$.
Bilan : f est injective.

- Soit $m\in\mathbb{Z}$.

Si $m\geqslant 0$, alors $m=f(2n)$.
Si $m<0$, alors $m=f(-2n-1)$.
Bilan : f est surjective.
Sur-bilan : f est bijective.

EXERCICE 73.

Soit E un ensemble. On rappelle qu'une *partition de* E est un ensemble $\{A_1,A_2,\dots,A_p\}$ de parties non vides de E, deux à deux disjointes, dont la réunion vaut E. Lorsque que $E=[\![1\,;\,n]\!]$ (où $n\in\mathbb{N}^*$), on note π_n le nombre de partitions possibles de E. On convient que $\pi_0=1$.

1. Que valent π_1, π_2 et π_3 ?

2. En considérant le cardinal de la partie qui contient l'élément 1, montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \pi_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\pi_k.$$

3. En déduire π_4 et π_5.

Correction n° 73.

1.
- Il n'y a qu'une partition de $E_1=\{1\}$, celle formée du singleton $\{1\}$: $\pi_1=1$.
- Il y a deux partitions de $E_2=\{1;2\}$, $E_2=\{1\}\cup\{2\}=\{1;2\}$: $\pi_2=2$.
- Il y a cinq partitions de $E_3=\{1;2;3\}$,

$E_3=\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}=\{1;2\}\cup\{3\}=\{1;3\}\cup\{2\}=\{2;3\}\cup\{1\}=\{1;2;3\}$: $\pi_3=5$.

2. Classons les différentes partitions de E_{n+1} suivant le cardinal de la partie U qui contient 1. Soit k le nombre d'éléments de U autres que 1, de sorte que $0\leqslant k\leqslant n$.
Pour $k=0$, $U=\{1\}$, et il reste n éléments à partitionner, soit π_n possibilités.

Pour $k=1$, U contient 2 éléments, il faut choisir le second éléments de U, il y a $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}=n$ possibilités, et il reste $n-1$ éléments à partitionner, soit π_{n-1} possibilités.

$\vdots$

Pour k quelconque, il faut choisir les k éléments à associer à 1 dans U, soit $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ possibilités, puis il reste $n-k$ éléments à partitionner, soit π_{n-k} possibilités.

$\vdots$

Pour $k=n$, $\mathrm{U}=\mathrm{E}_{n+1}$ constitue une partition à elle-seule, soit $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}\pi_0=1$ possibilité.

Ainsi : $\pi_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\pi_{n-k}$, et en posant $j=n-k$,

$\pi_{n+1}=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ n-j \end{pmatrix}\pi_j=\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}\pi_j$.

3. $\pi_4=\displaystyle\sum_{j=0}^{3}\begin{pmatrix} 3 \\ j \end{pmatrix}\pi_j=\pi_0+3\pi_1+3\pi_2+\pi_3=1+3+6+5=15$

$\pi_5=\displaystyle\sum_{j=0}^{4}\begin{pmatrix} 4 \\ j \end{pmatrix}\pi_j=\pi_0+4\pi_1+6\pi_2+4\pi_3+\pi_4=1+4+12+20+15=52$

2.2 Complexes

EXERCICE 74.

Donner la forme trigonométrique des nombres suivants :

$\mathrm{A}=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ et $\mathrm{B}=\dfrac{1+\mathrm{e}^{i\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}$ (pour $\mathrm{e}^{i\theta}\neq 1$).

Correction n° 74.

$1+i\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{i\pi/3}$ et $1-i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\pi/4}$, donc $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/12}$.

Alors : $\mathrm{A}=\sqrt{2}^{20}\mathrm{e}^{i20\pi/12}=2^{10}\mathrm{e}^{i5\pi/4}$.

Ensuite : $1+\mathrm{e}^{i\theta}=\mathrm{e}^{i\theta/2}(\mathrm{e}^{-i\theta/2}+\mathrm{e}^{i\theta/2})=2\mathrm{e}^{i\theta/2}\cos(\theta/2)$

$1-\mathrm{e}^{i\theta}=\mathrm{e}^{i\theta/2}(\mathrm{e}^{-i\theta/2}-\mathrm{e}^{i\theta/2})=-2i\mathrm{e}^{i\theta/2}\sin(\theta/2)$

$\mathrm{B}=-\dfrac{1}{\tan(\theta/2)}=\left|\dfrac{1}{\tan(\theta/2)}\right|\times\begin{cases}\mathrm{e}^{i0} & \text{si } \tan(\theta/2)<0\\ \mathrm{e}^{i\pi} & \text{si } \tan(\theta/2)>0\end{cases}$

EXERCICE 75.

Soit $\beta=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$.

L'objectif de l'exercice est de calculer $\mathrm{A}=\beta+\beta^2+\beta^4$ et $\mathrm{B}=\beta^3+\beta^5+\beta^6$.

1. Calculer $1+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5+\beta^6$.

2. Calculer $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ et AB.

3. Former une équation du second degré dont A et B sont les racines.

4. Conclure.

Correction n° 75.

1. $1+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5+\beta^6=\dfrac{1-\beta^7}{1-\beta}=\dfrac{1-\mathrm{e}^{i2\pi}}{1-\beta}=0$

2. $\mathrm{A}+\mathrm{B}=1+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5+\beta^6-1=-1$.

$\mathrm{AB}=\beta^4+\beta^6+\beta^7+\beta^5+\beta^7+\beta^8+\beta^7+\beta^9+\beta^{10}=3+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5+\beta^6=2$ car $\beta^7=1$.

3. $(x-\mathrm{A})(x-\mathrm{B})=x^2-(\mathrm{A}+\mathrm{B})x+\mathrm{AB}=x^2+x+2$, donc (E) $x^2+x+2=0$ est une équation dont A et B sont solutions.

4. $\Delta=-7=(i\sqrt{7})^2$ donc les solutions de (E) sont $\dfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$.

Reste à savoir qui de A ou B une partie imaginaire positive.

$\mathrm{Im}(\mathrm{A})=\sin(2\pi/7)+\sin(4\pi/7)+\sin(8\pi/7)$

or $\sin(8\pi/7)=\sin(\pi-(-\pi/7))=\sin(-\pi/7)=-\sin(\pi/7)$, donc $\sin(2\pi/7)+\sin(8\pi/7)=\sin(2\pi/7)-\sin(\pi/7)>0$ car $0<\pi/7<2\pi/7<\pi/2$.

Donc $\mathrm{Im}(\mathrm{A})>0$, et $\mathrm{A}=\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\mathrm{B}=\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

EXERCICE 76.

Déterminer les racines carrées de $3-4i$ et $-9\mathrm{e}^{i\pi/5}$.

Correction n° 76.

- Soit a et b deux réels.

$(a+ib)^2=3-4i\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=3 & (\textit{réelle})\\ 2ab=-4 & (\textit{imaginaire})\\ a^2+b^2=5 & (\textit{module})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=4\\ b^2=1\\ ab<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b)=(2,-1)\\ \text{ou}\\ (a,b)=(-2,1)\end{cases}$

- $-9\mathrm{e}^{i\pi/5}=9\mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{i\pi/5}=\left(3\mathrm{e}^{i3\pi/5}\right)^2$

EXERCICE 77.

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2-(6-i)z+9-3i=0$.

Correction n° 77.
$\Delta = -1 = i^2$, les solutions sont $z_1 = 3$ et $z_2 = 3 - i$.

EXERCICE 78.
Exprimer $\sin^3(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'aide de $\sin(3\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

Correction n° 78.
$\sin^3\alpha = \left(\dfrac{e^{i\alpha} - e^{i-\alpha}}{2i}\right)^3 = \dfrac{1}{(2i)^3}(e^{i3\alpha} - 3e^{i\alpha} + 3e^{i-\alpha} - e^{i-3\alpha})$
$= \dfrac{-1}{4\times 2i}\left((e^{i3\alpha} - e^{i-3\alpha}) - (3e^{i\alpha} - 3e^{i-\alpha})\right) = \dfrac{-1}{4}(\sin(3\alpha) - 3\sin\alpha)$
$\sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin(3\alpha)}{4}$

EXERCICE 79.
Exprimer $\cos(3\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'aide de $\cos^3(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$.

Correction n° 79.
$\cos^3\alpha = \left(\dfrac{e^{i\alpha} + e^{i-\alpha}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{2^3}(e^{i3\alpha} + 3e^{i\alpha} + 3e^{i-\alpha} + e^{i-3\alpha})$
$= \dfrac{1}{4\times 2}\left((e^{i3\alpha} + e^{i-3\alpha}) + 3e^{i\alpha} + 3e^{i-\alpha}\right) = \dfrac{1}{4}(\cos(3\alpha) + 3\cos\alpha)$
$\cos^3\alpha = \dfrac{\sin(3\alpha) + 3\sin(\alpha)}{4}$

2.3 Polynômes

EXERCICE 80.
Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 1$.

Correction n° 80.
Soit R le reste. Puisque $\deg(X^2 - 1) = 2$, $\deg R \leqslant 1$ donc $\exists a_n, b_n \in \mathbb{R}, R = a_nX + b_n$.
On évalue $X^n = (X^2 - 1)Q + a_nX + b_n$ en $X = 1$ puis $X = -1$:
$$\begin{cases} 1 = a_n + b_n \\ (-1)^n = -a_n + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = (1 - (-1)^n)/2 \\ b_n = (1 + (-1)^n)/2 \end{cases}, \ R = \frac{1-(-1)^n}{2}X + \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

EXERCICE 81.
Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 1$.

Correction n° 81.
Soit R le reste. Puisque $\deg(X^2 + 1) = 2$, $\deg R \leqslant 1$ donc $\exists a_n, b_n \in \mathbb{R}, R = a_nX + b_n$.
On évalue $X^n = (X^2 + 1)Q + a_nX + b_n$ en $X = i$ puis $X = -i$:
$$\begin{cases} i^n = a_ni + b_n \\ (-i)^n = -a_ni + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = (i^n - (-i)^n)/(2i) \\ b_n = (i^n + (-i)^n)/2 \end{cases},$$
Si n est pair : $R = (-1)^{n/2}$.
Si n est impair : $R = (-1)^{(n-1)/2}X$

EXERCICE 82.
L'objectif est de résoudre le système (S) d'inconnues a, b et c :
$$(S)\begin{cases} a < b < c \\ a + b + c = 9 \\ abc = 15 \\ ab + ac + bc = 23 \end{cases}$$
1. Déterminer un polynôme P dont a, b et c sont les racines.
2. En déduire toutes les solutions de (S).

Correction n° 82.
1. $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$ admet exactement a, b et c pour racines. En développant : $P(X) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$, donc $P(X) = X^3 - 9X^2 + 23X - 15$.
2. Puisque P est de degré 3, on essaie des racines "évidentes". $P(1) = 1 - 9 + 23 - 15 = 0$ donc P est factorisable par $X - 1$. Par division euclidienne (ou par toute autre méthode),
$P(X) = (X-1)(X^2 - 8X + 15) = (X-1)(X-3)(X-5)$: les racines de P sont 1, 3 et 5, et la première condition de (S) impose $a = 1$, $b = 3$ et $c = 5$.

EXERCICE 83.
Factoriser $P = X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction n° 83.
Cherchons les racines de P.
$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1 \Leftrightarrow (z^2 = i \text{ ou } z^2 = -i)$.
Comme $i = e^{i\pi/2}$, $e^{i\pi/4}$ et $-e^{i\pi/4} = e^{i5\pi/4} = e^{-3i\pi/4}$ sont les racines carrées de i.
Les racines carrées de $-i$ sont alors :
$ie^{i\pi/4} = e^{i3\pi/4}$ et $-ie^{i\pi/4} = e^{i7\pi/4} = e^{-i\pi/4}$.
La factorisation de R sur $\mathbb{C}$ est alors :
$P = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4})(X - e^{i3\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})$.
La factorisation sur $\mathbb{R}$ s'obtient en regroupant les racines complexes conjuguées car
$(X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha}) = X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1$.

$\mathrm{P} = (\mathrm{X}-e^{i\pi/4})(\mathrm{X}-e^{-i\pi/4})(\mathrm{X}-e^{i3\pi/4})(\mathrm{X}-e^{-3i\pi/4})$
$\mathrm{P} = (\mathrm{X}^2-2\cos(\pi/4)\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2-2\cos(3\pi/4)\mathrm{X}+1)$
$\mathrm{P} = (\mathrm{X}^2-\sqrt{2}\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+\sqrt{2}\mathrm{X}+1)$.
On remarquera que, bien que P ne possède aucune racine réelle, il est factorisable sur $\mathbb{R}$.

2.4 Espaces vectoriels

Exercice 84.
Soit, dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$,
$$\mathrm{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-2y+z=0\} \text{ et } \mathrm{G} = \mathrm{Vect}((1,1,0)).$$
1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Donner une base de F et une base de G.
3. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires.

Correction n° 84.
$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow x = 2y-z$ donc
$\mathrm{F} = \{(2y-z,y,z)/(y,z)\in\mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\big((2,1,0);(-1,0,1)\big)$, donc F est un sous-espace vectoriel de E et $\big((2,1,0);(-1,0,1)\big)$ est une base de F.
G est par définition un sous-espace vectoriel de E et $\big((1,1,0)\big)$ étant une famille génératrice et libre de G, c'est une base de G.
Plusieurs méthodes pour la supplémentarité :
• puisqu'on dispose de bases, on peut montrer que la concaténée des bases de F et G $\big((2,1,0);(-1,0,1);(1,1,0)\big)$ est libre. Et comme elle compte 3 vecteurs dans E lui-même de dimension 3, Cette concaténée est une base de E, donc F et G sont supplémentaires (caractérisation par les bases).
• puisqu'on connaît les dimensions : $\dim\mathrm{F}+\dim\mathrm{G} = 2+1 = 3 = \dim\mathrm{E}$, il suffit de vérifier que $\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0\}$.
Si $\vec{u} \in \mathrm{F}\cap\mathrm{G}$, alors comme $\vec{u}\in\mathrm{G}$, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = (\alpha,\alpha,0)$. Et comme $\vec{u}\in\mathrm{F}$, $\alpha-2\alpha+0=0$, donc $\alpha=0$, donc $\vec{u} = (0,0,0) = \vec{0}$.
$\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{\vec{0}\}$ et $\dim\mathrm{F}+\dim\mathrm{G} = \dim\mathrm{E}$, donc F et G sont supplémentaires.

Exercice 85.
Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$,
$$\mathrm{F} = \{\mathrm{P}\in\mathrm{E}, \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t = 0\} \text{ et } \mathrm{G} = \{\mathrm{P}\in\mathrm{E}, \mathrm{P}' = 0\}.$$
1. Justifier que $\mathrm{G} = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
3. Soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Déterminer la constante réelle a telle que $\mathrm{X}^k - a \in \mathrm{F}$.
4. En déduire une base et la dimension de F.
5. Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 86.
Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}_0 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$, $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}(\mathrm{X}-2)$ et $\mathrm{P}_2 = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)$.
Soit $\mathcal{B}$ la famille $(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)$.
1. Soit (a,b,c) trois réels. En évaluant $a\mathrm{P}_0+b\mathrm{P}_1+c\mathrm{P}_2$ en 0, 1 puis 2, montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre.
2. Soit $\mathrm{Q}\in\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. Justifier $\frac{1}{2}\mathrm{Q}(0)\mathrm{P}_0 - \mathrm{Q}(1)\mathrm{P}_1 + \frac{1}{2}\mathrm{Q}(2)\mathrm{P}_2 = \mathrm{Q}$.
3. Que peut-on en déduire pour la famille $\mathcal{B}$?

Correction n° 86.
1. Supposons que $a\mathrm{P}_0+b\mathrm{P}_1+c\mathrm{P}_2 = 0$.
$(a\mathrm{P}_0+b\mathrm{P}_1+c\mathrm{P}_2)(0) = 2a$ donc $a=0$.
$(a\mathrm{P}_0+b\mathrm{P}_1+c\mathrm{P}_2)(1) = -b$ donc $b=0$.
$(a\mathrm{P}_0+b\mathrm{P}_1+c\mathrm{P}_2)(0) = 2c$ donc $c=0$.
La famille est $\mathcal{B}$ est libre.
2. Soit $\mathrm{Q}\in\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et soit R le polynôme $\frac{1}{2}\mathrm{Q}(0)\mathrm{P}_0 - \mathrm{Q}(1)\mathrm{P}_1 + \frac{1}{2}\mathrm{Q}(2)\mathrm{P}_2$.
$\mathrm{R}(0) = \frac{1}{2}\mathrm{Q}(0)\times 2 = \mathrm{Q}(0)$,
$\mathrm{R}(1) = -\mathrm{Q}(1)\times(-1) = \mathrm{Q}(1)$ et
$\mathrm{R}(2) = \frac{1}{2}\mathrm{Q}(2)\times 2 = \mathrm{Q}(2)$.
Le polynôme $\mathrm{Q}-\mathrm{R}$ est de degré au plus 2 et admet au moins trois racines : 0, 1 et 2. Donc $\mathrm{Q}-\mathrm{R}$ est le polynôme nul et $\mathrm{R} = \mathrm{Q}$.
On peut aussi raisonner sur les coefficients de Q, mais c'est plus long.
3. Par 1., $\mathcal{B}$ est libre. Par 2., $\mathcal{B}$ est génératrice puisque tout polynôme de E est combinaison linéaire des polynômes de $\mathcal{B}$. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Exercice 87.
Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ et admettant une limite finie en $+\infty$.
1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On considère l'ensemble C des fonctions constantes de E et E_0 l'ensemble des fonctions de E admettant une limite nulle en $+\infty$. Montrer que C et E_0 sont des sous-espaces vectoriels de E.
3. Montrer que toute fonction de E est la somme d'une fonction de C et d'une fonction de E_0. Cette décomposition est-elle unique ?

Correction n° 87.
1. La fonction nulle est dans E, et si f et g sont dans E, alors pour tout λ de $\mathbb{R}$, $\lim_{+\infty}(\lambda f+g)$ existe et est finie (elle vaut $\lambda\lim_{+\infty} f + \lim_{+\infty} g$).

Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$.

2. La fonction nulle est dans C et dans E_0. Toute combinaison linéaire de fonctions constantes (respectivement de fonctions tendant vers 0 en $+\infty$) est une fonction constante (respectivement une fonction tendant vers 0 en $+\infty$).
Donc C et E_0 sont deux sous-espaces vectoriels de E.

3. Soit $f \in \mathbb{E}$. Soit $\ell = \lim\limits_{+\infty} f$, g la fonction constante égale à ℓ et $h = f - g = f - \ell$.
Alors : $f = g + h$, $g \in C$ et $h \in E_0$.
Toute fonction de E est la somme d'une fonction de C et d'une fonction de E_0.
Supposons $f = g + h = g_1 + h_1$, $g, g_1 \in C$ et $h, h_1 \in E_0$.
Alors $g - g_1 = h_1 - h$ est constante et tend vers 0, donc est nulle. D'où $g = g_1$ et $h = h_1$: la décomposition est bien unique.

2.5 Matrices et systèmes linéaires

Exercice 88.

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si

$$ {}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}. $$

1. Donner un exemple de matrice antisymétrique non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Montrer que la somme de deux matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique.

3. Que peut-on dire du produit de deux matrices antisymétriques ?

4. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire, de manière unique, comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Correction n° 88.

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

2. Soit A et B antisymétriques. ${}^t(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = {}^t\mathrm{A} + {}^t\mathrm{B} = -\mathrm{A} - \mathrm{B} = -(\mathrm{A}+\mathrm{B})$: $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ est antisymétrique.

3. Soit A et B antisymétriques. ${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A} = (-\mathrm{B})(-\mathrm{A}) = \mathrm{BA}$: le produit de deux matrices antisymétriques n'est a priori pas antisymétrique.

4. *Analyse* - Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe S symétrique et A antisymétrique telles que $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$.
${}^t\mathrm{M} = {}^t\mathrm{S} + {}^t\mathrm{A} = \mathrm{S} - \mathrm{A}$. Ainsi :

$$\begin{cases} \mathrm{S}+\mathrm{A} = \mathrm{M} \\ \mathrm{S}-\mathrm{A} = {}^t\mathrm{M} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{S} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}) \\ \mathrm{A} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M}) \end{cases}$$

Ceci montre que s'il y a une solution, celle-ci est **unique**.
Synthèse - Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Soit : $\begin{cases} \mathrm{S} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}) \\ \mathrm{A} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M}) \end{cases}$

Alors :
- $\mathrm{S} + \mathrm{A} = \mathrm{M}$;
- ${}^t\mathrm{S} = \dfrac{1}{2}({}^t\mathrm{M} + {}^t({}^t\mathrm{M})) = \dfrac{1}{2}({}^t\mathrm{M} + \mathrm{M}) = \mathrm{S}$: S est symétrique ;
- ${}^t\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}({}^t\mathrm{M} - {}^t({}^t\mathrm{M})) = \dfrac{1}{2}({}^t\mathrm{M} - \mathrm{M}) = -\mathrm{A}$: A est antisymétrique.

M est bien la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 89.

1. Justifier que $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

2. Calculer ${}^t\mathrm{MM}$ et retrouver M^{-1} grâce à ce calcul.

Correction n° 89.

1. $\mathrm{M}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on n'oubliera pas de signaler au bon moment que M est inversible car $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 3$ et $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. ${}^t\mathrm{MM} = 2\mathrm{I}_3$ donc $\left(\dfrac{1}{2}\,{}^t\mathrm{M}\right)\mathrm{M} = \mathrm{I}_3$ ce qui prouve que M est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2}\,{}^t\mathrm{M}$, ce que l'on peut remarquer sur l'expression de 1..

Exercice 90.

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^3.

2. En déduire M^n pour tout entier naturel n.

3. Justifier que M est inversible et déterminer M^{-1}.

Correction n° 90.

1. $\mathrm{M}^3 = \mathrm{I}_3$.

2. Si $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{M}^n = (\mathrm{M}^3)^k = \mathrm{I}_3$.

Si $n = 3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{M}^n = \mathrm{M}^{3k}\mathrm{M} = \mathrm{I}_3\mathrm{M} = \mathrm{M}$.

Si $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{M}^n = \mathrm{M}^{3k}\mathrm{M}^2 = \mathrm{I}_3\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\mathrm{M}^3 = \mathrm{M}^2\mathrm{M} = \mathrm{I}_2$ donc M est inversible et $\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{M}^2$.

Exercice 91.

Résoudre le système $\begin{cases} 3x+5y+2z = 1 \\ x+2y+3z = 5 \\ 4x+7y+5z = 8 \end{cases}$.

Correction n° 91.

$\mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2$ donne $0 = 2$: ce système n'a pas de solutions.

Exercice 92.

Résoudre le système $\begin{cases} x-y-2z = 1 \\ y-z = -1 \\ x+y-4z = -1 \end{cases}$.

Correction n° 92.

Ce système a un infinité de solutions : tous les triplets $(3z, z-1, z)$ où $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 93.

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. On pose $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $\mathrm{D}^n = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P}$.

3. Calculer D et en déduire D^n pour tout n entier naturel.

4. Déterminer finalement A^n pour tout n entier naturel.

Correction n° 93.

1. $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, on n'oubliera pas de signaler au bon moment que P est inversible car $\mathrm{rg}(\mathrm{P}) = 2$ et $\mathrm{P} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Par récurrence sur n, on montre que $\mathrm{D}^n = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P}$.

3. $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

4. $\mathrm{D}^n = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{A}^n$ d'où $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 3^n & -2\times 3^n + 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 94.

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{A}$.

2. En déduire que A est inversible, et préciser son inverse.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n et b_n deux réels tels que $\mathrm{A}^n = a_n\mathrm{A} + b_n\mathrm{I}_2$.

4. Calculer A^n en fonction de n.

Correction n° 94.

1. $\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{A} = -3\mathrm{I}_2$

2. $\dfrac{-1}{3}(\mathrm{A} - 4\mathrm{I}_2)\mathrm{A} = \mathrm{I}_2$ donc A est inversible et $inv\mathrm{A} = \dfrac{-1}{3}(\mathrm{A} - 4\mathrm{I}_2)$.

3. Par récurrence : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ conviennent.
Supposons $\mathrm{A}^n = a_n\mathrm{A} + b_n\mathrm{I}_2$. Alors
$\mathrm{A}^{n+1} = (a_n\mathrm{A} + b_n\mathrm{I}_2)\mathrm{A} = a_n\mathrm{A}^2 + b_n\mathrm{A} = a_n(4\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_2) + b_n\mathrm{A}$
$\mathrm{A}^{n+1} = (4a_n + b_n)\mathrm{A} - 3a_n\mathrm{I}_2 = a_{n+1}\mathrm{A} + b_{n+1}\mathrm{I}_2$
avec $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -3a_n$.

4. La suite A vérifie la relation de récurrence $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, dont les racines de l'équation caractéristique $x^2 - 4x + 3$ sont 1 et 3. Il existe α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \alpha + 3^n\beta$, et comme $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$,

$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$

Comme pour $n \geqslant 1$, $b_n = -3a_{n-1}$, $b_n = 3 \times \dfrac{1 - 3^{n-1}}{2} = \dfrac{3 - 3^n}{2}$

Et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{A}^n = \dfrac{3^n - 1}{2}\mathrm{A} + \dfrac{3 - 3^n}{2}\mathrm{I}_2$

Exercice 95.

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2$ est un polynôme annulateur de M.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.

3. En déduire M^n en fonction de M, de I_2 et de n.

Correction n° 95.

1. $M^2 - M - 2I_2 = 0_2$.

2. Soit R le reste cherché. Comme $\deg P = 2$, $\deg R \leqslant 1$. Écrivons $R = aX + b$. Les racines de P sont 2 et -1.
$X^n = Q(X)P(X) + aX + b$ donne pour $X = 2$ et $X = -1$:
$$\begin{cases} 2^n = 2a+b \\ (-1)^n = -a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (2^n - (-1)^n)/3 \\ b = (2^n + 2(-1)^n)/3 \end{cases}$$
$R = \dfrac{1}{3}\big((2^n - (-1)^n)X + (2^n + 2(-1)^n)\big)$.

3. Comme $P(M) = 0$, $X^n = Q(X)P(X) + aX + b$ évaluée en $X = M$ donne $X^n = \dfrac{1}{3}\big((2^n - (-1)^n)M + (2^n + 2(-1)^n)I_2\big)$.

2.6 Applications linéaires

Exercice 96.

On traitera le plus de questions grâce aux matrices. $\mathcal{B}$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $p : E \longrightarrow E$, $(x, y, z) \longmapsto \dfrac{1}{2}(x + z, 2y, x + z)$.

1. Déterminer la matrice M représentant p dans la base $\mathcal{B}$.

2. Déterminer le noyau et l'image de p en en donnant une base.

3. Montrer qu'ils sont supplémentaires.

4. Déterminer un endomorphisme q de E vérifiant $p + q = \mathrm{Id}_E$ en donnant explicitement la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$, puis en donnant l'image du vecteur (x, y, z) de E par q.

5. Déterminer le noyau et l'image de q en en donnant une base.

6. Vérifier que $\mathrm{Im}p = \mathrm{Ker}q$ et $\mathrm{Im}q = \mathrm{Ker}p$.

Correction n° 96.

1. $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\mathrm{Ker}p = \mathrm{Vect}((1, 0, -1))$, $\mathrm{Im}p = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$.

3.
- On peut montrer que la concaténation des deux bases de $\mathrm{Ker}p$ et $\mathrm{Im}p$ donne une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^3$ (grâce à la dimension)
- On peut montrer que $\mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Im}p = \{0\}$, puis invoquer $\dim \mathrm{Ker}p + \dim \mathrm{Im}p = \dim \mathbb{R}^3$...

4. Soit $N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$. $p + q = id_E \Rightarrow M + N = I_3 \Rightarrow N = I_3 - M$
$N = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $q(x, y, z) = \dfrac{1}{2}(x - z, 0, -x + z)$.

5. $\mathrm{Ker}q = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ et $\mathrm{Im}q = \mathrm{Vect}((1, 0, -1))$.

Exercice 97.

On traitera toutes les questions grâce aux matrices. $\mathcal{B}$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $f : E \longrightarrow E$, $P \longmapsto P - P'$ et $g = \alpha \mathrm{Id}_E - f$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que g soit un automorphisme de E.

3. Déterminer le noyau et l'image de g en donnant une base de chacun de ces espaces.

Correction n° 97.

1. f est linéaire, de E dans E. De plus, $f(P) = 0 \Leftrightarrow P = P'$. Or si P est non nul, $\deg(P') < \deg(P)$ et $P \neq P'$. Donc $f(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0$, et $\mathrm{Ker}f = \{0\}$.
f est injectif, et comme E est de dimension finie, f est un automorphisme.

2. g est un endomorphisme car différence d'endomorphismes. $g(P) = 0 \Leftrightarrow \alpha P - P + P' = 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha)P = P'$.
- 1er cas : $\alpha = 1$. $g(P) = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow$ (P *constant*). $\mathrm{Ker}g = \mathbb{R}_0[X]$ et g n'est pas injectif.
- 2nd cas : $\alpha \neq 1$. $g(P) = 0 \Rightarrow \deg P = \deg P' \Rightarrow P = 0$. $\mathrm{Ker}g = \{0\}$, et g injectif, et comme E est de dimension finie, g est un automorphisme.

g automorphisme si, et seulement si, $\alpha \neq 1$.

3.
- 1er cas : $\alpha = 1$. $g : P \mapsto P'$, $\mathrm{Ker}g = \mathbb{R}_0[X]$ et $\mathrm{Im}g = \mathrm{Vect}\big((g(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}\big) = \mathrm{Vect}(0, 1, 2X, \ldots, nX^{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car $(1, 2X, \ldots, nX^{n-1})$ est échelonnée en degré de 0 à $n - 1$. .
- 2nd cas : $\alpha \neq 1$. g est un automorphisme, donc $\mathrm{Ker}g = \{0\}$ et $\mathrm{Im}g = E$.

Exercice 98.

On traitera toutes les questions grâce aux matrices. $\mathcal{B}$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On considère un réel α et l'application f définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par
$$f(P) = (X^2 - 1)P'' + \alpha P.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans $\mathcal{B}$.

2. À quelle condition sur α f est-il un automorphisme de E ?

Dans ce cas, expliciter l'automorphisme réciproque f^{-1} en donnant sa matrice dans $\mathcal{B}$.

3. On suppose que f n'est pas un automorphisme. Déterminer son image et son noyau en précisant une base de chacun d'eux.

Correction n° 98.

1.
- $\deg f(\mathrm{P}) \leqslant \max(\deg(\mathrm{X}^2+1)+\deg \mathrm{P}'', deg(\alpha \mathrm{P})) \leqslant \max(2+0,2) \leqslant 2$.
- $f(\lambda \mathrm{P}+\mathrm{Q}) = \cdots = \lambda f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q})$.

Donc f est un endomorphisme de E.

Avec $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$, $\mathrm{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2+\alpha \end{pmatrix}$

2. f est un automorphisme si, et seulement si, M est inversible. Comme M est triangulaire, M est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

f est un automorphisme si, et seulement si, ($\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -2$).

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 2/(\alpha(\alpha+2)) \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\alpha+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha(\alpha+2)} \begin{pmatrix} \alpha+2 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

3.
- Si $\alpha = 0$, $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on lit directement :

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(1), f(\mathrm{X}), f(\mathrm{X}^2)) = \mathrm{Vect}(0, 0, 2\mathrm{X}^2-2) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}^2-1)$,
$1 \in \mathrm{Ker} f$, $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker} f$ donc $\mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}) \subset \mathrm{Ker} f$. Or par la formule du rang, $\dim \mathrm{Ker} f = 2$, donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}) = \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

- Si $\alpha = -2$, $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on lit directement :

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(1), f(\mathrm{X}), f(\mathrm{X}^2)) = \mathrm{Vect}(-2, -2\mathrm{X}, -2) = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}) = \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$,
comme la première colonne et la troisième sont identiques, $f(1-\mathrm{X}^2) = f(1) - f(\mathrm{X}^2) = 0$ donc $1 - \mathrm{X}^2 \in \mathrm{Ker} f$. Or par la formule du rang, $\dim \mathrm{Ker} f = 1$, donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(1-\mathrm{X}^2) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}^2-1)$.

Correction n° 98.

1. $\mathrm{P}' = 0 \Leftrightarrow \deg \mathrm{P} \leqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{P} \in \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$: $\mathrm{G} = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$, en particulier G est un sous-espace vectoriel de E.

2. Si $\mathrm{P} = 0$, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t = 0$, donc $\mathrm{P} \in \mathrm{F}$: $\mathrm{F} \neq \emptyset$.

Si $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$\displaystyle\int_0^1 \lambda \mathrm{P}(t) + \mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t = 0$, donc $\lambda \mathrm{P} + \mathrm{Q} \in \mathrm{F}$.
Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

3. $\displaystyle\int_0^1 t^k - a\mathrm{d}t = \Big[t^{k+1}/(k+1) - at\Big]_0^1 = 1/(k+1) - a$, donc $\mathrm{X}^k - a \in \mathrm{F}$ si, et seulement si, $a = 1/(k+1)$.

4. $(\mathrm{X}^k - 1/(k+1))_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre car échelonnée en degré de F, donc $\dim \mathrm{F} \geqslant n$.
Comme $\mathrm{P} = 1 \notin \mathrm{F}$, $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$ donc $\dim \mathrm{F} < \dim \mathrm{E} = n+1$, donc $\dim \mathrm{F} \leqslant n$.
Nécessairement, $\dim \mathrm{F} = n$ et $(\mathrm{X}^k - 1/(k+1))_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E.

5. On a : $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = n+1 = \dim \mathrm{E}$.
Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. Comme $\mathrm{P} \in \mathrm{G}$, P est constant : il existe un réel c tel que $\mathrm{P} = c$. Alors $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 c\mathrm{d}t = c$, et comme $\mathrm{P} \in \mathrm{F}$, $c = 0$, donc $\mathrm{P} = 0$. Ainsi : $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$, et comme $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E}$, F et G sont supplémentaires.

2.7 Algèbre bilinéaire

EXERCICE 99. Recherche de bases orthonormales
Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et
$$\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) / x - y + t = 0\}.$$
Déterminer une base orthonormale de F, puis une base orthonormale de $\mathrm{F}^{\perp}$.

Correction n° 99.

- Comme $(x, y, z, t) \in \mathrm{F} \Leftrightarrow x = y - t$, une base de F est (i, j, k) avec $i = (1, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ et $k = (-1, 0, 0, 1)$.

Commençons par trouver une base orthogonale (i', j', k') de F.
On observe que $\langle i, j \rangle = 0$. Posons $i' = i$, $j' = j$. On a bien $i' \perp j'$ et $\mathrm{Vect}(i', j') = \mathrm{Vect}(i, j)$.
Posons ensuite $k' = k + \alpha i' + \beta j'$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
On aura bien : $\mathrm{Vect}(i', j', k') = \mathrm{Vect}(i', j', k) = \mathrm{Vect}(i, j, k) = \mathrm{F}$.
De plus :
$$\begin{cases} k' \perp i' \\ k' \perp j' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle k + \alpha i' + \beta j', i' \rangle = 0 \\ \langle k + \alpha i' + \beta j', j' \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle k, i' \rangle + \alpha \,||i'||^2 = 0 \\ \langle k, j' \rangle + \beta \,||j'||^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -1 + 2\alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 0 \end{cases}$$
Avec $k' = k + \frac{1}{2} i'$, (i', j', k') est orthogonale. Pour éviter les fractions, on peut même prendre $k' = 2k + i' = (-1, 1, 0, 2)$.

Reste à normaliser :
$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0),(0,0,1,0),\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,0,2)\right)$ est une base orthonormale de F.

• $(x,y,z,t)\in \mathrm{F} \Leftrightarrow x-y+t=0 \Leftrightarrow \langle (x,y,z,t),(1,-1,0,1)\rangle = 0 \Leftrightarrow (x,y,z,t)\in \big(\mathrm{Vect}((1,-1,0,1))\big)^{\perp}$, donc $\mathrm{F}^{\perp}=\mathrm{Vect}\big((1,-1,0,1)\big)$.

Et une base orthonormale de $\mathrm{F}^{\perp}$ est $\big(\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1)\big)$.

Exercice 100. Recherche de minimums

Déterminer :

1. $\displaystyle\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\big((x-y+1)^2+(y-1)^2\big)$ (se fait de tête !) ;

2. $\displaystyle\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\big((x-y+1)^2+(y-1)^2+(x+y)^2\big)$.

3. $\displaystyle\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\big((2-x-y)^2+(1-x)^2+(1-2x-y)^2\big)$.

Correction n° 100.

1. $\displaystyle\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\big((x-y+1)^2+(y-1)^2\big)$? (se fait effectivement de tête !)

$(x-y+1)^2+(y-1)^2$ est positif, et s'annule pour $x-y+1=0$ et $y-1=0$, donc pour $(x,y)=(0,1)$. Le minimum cherché est 0.

2. $\displaystyle\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\big((x-y+1)^2+(y-1)^2+(x+y)^2\big)$?

Soit $f:(x,y)\mapsto (x-y+1)^2+(y-1)^2+(x+y)^2$. Le raisonnement précédent ne s'applique plus car $\begin{cases} x-y+1=0\\ y-1=0\\ x+y=0\end{cases}$ n'a aucune solution, donc f est certes positive mais ne s'annule pas.

On peut écrire, en utilisant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$:
$f(x,y) = (x-y+1)^2+(y-1)^2+(x+y)^2 = ||(x-y+1,y-1,x+y)||^2 = ||x(1,0,1)+y(-1,1,1)-(-1,1,0)||^2 = ||xu+yv-b||^2$ où $u=(1,0,1)$, $v=(-1,1,1)$ et $b=(-1,1,0)$.

Alors $\displaystyle\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}||xu+yv-b||^2=\min_{w\in\mathrm{Vect}(u,v)}||w-b||^2$.

D'après la propriété de minimisation en norme, ce minimum est atteint pour $w=p_{\mathrm{Vect}(u,v)}(b)$.

Une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(u,v)$ est (u',v') où $u'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}u$ et $v'=\dfrac{1}{\sqrt{3}}v$.

$w=p_{\mathrm{Vect}(u,v)}(b)=\langle b,u'\rangle\, u'+\langle b,v'\rangle\, v'=\dfrac{1}{2}\langle b,u\rangle\, u+\dfrac{1}{3}\langle b,v\rangle\, v=\dfrac{1}{6}(-7,4,1)$.

Ainsi : $\displaystyle\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=\min_{w\in\mathrm{Vect}(u,v)}||w-b||^2=\left|\left|\frac{1}{6}(-1,-2,1\right|\right|^2=\frac{1}{36}\times 6=\frac{1}{6}$.

3. $f(x,y)=||(x+y-2,x-1,2x+y-1)||^2=||x(1,1,2)+y(1,0,1)-(2,1,1)||^2$, donc en posant :

• $v_1=(1,1,2)$, $v_2=(1,0,1)$ et $u=(2,1,1)$,

• puis $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)=\{xv_1+yv_2/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$,

alors lorsque (x,y) parcourt $\mathbb{R}^2$, xv_1+yv_2 parcourt F.

Ainsi, déterminer $\displaystyle\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ revient à déterminer $\displaystyle\min_{v\in\mathrm{F}}||v-u||^2$.

Par la propriété de meilleure approximation en norme, on sait que ce minimum existe et est atteint lorsque $v=p_{\mathrm{F}}(u)$.

Exercice 101. Quatre applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Montrer que le carré de la moyenne (arithmétique) de n nombres réels est inférieur (ou égal) à la moyenne (arithmétique) de leur carré.

2. Quel est le minimum de $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)$ pour $(a_i)_{i=1}^n\in(\mathbb{R}_+^*)^n$?

3. Quel est le minimum de
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\times\int_a^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$
pour f continue strictement positive sur $[\,a\,;\,b\,]$?

4. Soit $a<b$. Montrer que, pour toute fonction f continue sur $[\,a\,;\,b\,]$,
$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\frac{1}{b-a}\int_0^1\big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t.$$

Correction n° 101.

1. Soit $a_1,\dots,a_n$ n nombres réels.

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On pose : $x=(a_i,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=\dfrac{1}{n}(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n$.

Alors $\displaystyle\big(\langle x,y\rangle\big)^2=\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{n}\right)^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$ est le carré de la moyenne des $(a_i)_i$.

Et $\displaystyle ||x||^2\,||y||^2=\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\big(n\times\frac{1}{n^2}\big)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^2$ est la moyenne des carrés des $(a_i)_i$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure l'inégalité voulue... avec égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux entre eux.

2. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On pose : $x=\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_i}}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $y=(\sqrt{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)=||x||^2\,||y||^2\geqslant\langle x,y\rangle^2=n^2$.

Ce minorant est atteint pour $a_1 = \cdots = a_n = 1$ par exemple.

3. On munit l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a\,;b]$ du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Soit f continue strictement positive.
On pose $x = \sqrt{f}$ et $y = 1/\sqrt{f}$.
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = ||x||^2\,||y||^2 \geqslant \langle x,y\rangle^2 = \left(\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^2 = (b-a)^2$

4. On munit l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0\,;1]$ du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Soit f continue. Alors

$$\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 = \langle f,1\rangle \leqslant ||f||^2\,||1||^2 = \int_0^1 \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t$$

3 Probabilités

3.1 Probabilités élémentaires

Exercice 102.

Un joueur joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Les lancers successifs sont indépendants, et le joueur gagne 1 euro chaque fois qu'il obtient pile et perd un euro pour chaque face. Le jeu prend fin lorsque le joueur est ruiné ou lorsqu'il a accumulé N euros ($\mathrm{N} \geqslant 3$ est fixé par avance).
On note u_k la probabilité que le joueur soit ruiné lorsqu'il possède k euros au départ du jeu ($0 \leqslant k \leqslant \mathrm{N}$).

1. On convient que $u_0 = 1$ et $u_\mathrm{N} = 0$. Justifier cette convention.
2. Montrer que : $\forall k \in [\![1\,;\mathrm{N}-1]\!]$, $\quad u_k = \frac{1}{2}u_{k+1} + \frac{1}{2}u_{k-1}$.
3. Exprimer u_k en fonction de k et N. Interprêter $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} u_k$.

Correction n° 102.

1. S'il possède 0 euro au départ, l'événement « être ruiné » est certain. S'il possède déjà N euros, il ne joue pas et ne sera jamais ruiné.
2. Notons U_k l'événement « le joueur soit ruiné lorsqu'il possède k euros au départ du jeu » où $0 \leqslant k \leqslant \mathrm{N}$, P l'événement le premier lancer donne *pile*.
Avec le système complet $(\mathrm{P},\overline{\mathrm{P}})$, la formule des probabilités totales donne :
$u_k = \mathbb{P}(\mathrm{P})\mathbb{P}_\mathrm{P}(\mathrm{U}_k) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{P}})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{P}}}(\mathrm{U}_k) = \frac{1}{2}u_{k-1} + \frac{1}{2}u_{k+1}$.
3. u vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$, dont l'unique racine est 1.
Donc : $\exists a,b \in \mathbb{R}, \forall k \in [\![0\,;\mathrm{N}]\!], u_k = 1^k(ak+b) = ak+b$ (on se limite à $[\![0\,;\mathrm{N}]\!]$ car $\forall k \geqslant \mathrm{N}, u_k = 0$...)
Avec les conditions limites $u_0 = 1$ et $u_\mathrm{N} = 0$, $b = 1$ et $a\mathrm{N} + b = 0$ donc $a = -1/\mathrm{N}$.
Ainsi : $\forall k \in [\![0\,;\mathrm{N}]\!], u_k = 1 - (k/\mathrm{N})$.
À k fixé, $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} u_k = 1$, donc avec une fortune initiale fixée k, plus on fixe le seuil N grand, et plus on risque de finir ruiné.

Exercice 103.

On dispose de 10 boules numérotées de 1 à 10. On en sélectionne un nombre quelconque. Quelle est la probabilité que la somme des nombres figurant sur les boules sélectionnées soit égale à la somme des numéros des boules non sélectionnées ?

Correction n° 103.

La somme totale des numéros est $\frac{10\times 11}{2} = 55$. Comme 55 est impair, il est impossible de le couper en somme de deux nombre entier. La probabilité cherchée est nulle.

Exercice 104.

À la sortie d'une usine produisant des voitures cinq jours par semaine, la probabilité qu'un véhicule pris au hasard présente un défaut est de 10% les mardi, mercredi, jeudi et vendredi, et 20% les lundi.
Une voiture prise au hasard présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée un lundi ?

Correction n° 104.

Soit D l'événement « une voiture prise au hassard présente un défaut » et L l'événement « une voiture prise au hasard est produite un lundi ».
$\mathbb{P}(\mathrm{L}) = 1/5$, $\mathbb{P}_\mathrm{L}(\mathrm{D}) = 1/5$ et $\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{L}}}(\mathrm{D}) = 1/10$. On cherche $\mathbb{P}_\mathrm{D}(\mathrm{L})$.
$\mathbb{P}_\mathrm{D}(\mathrm{L}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{D}\cap\mathrm{L})}{\mathbb{P}(\mathrm{D})}$, par (FPC & FPT),ou Bayes,
$\mathbb{P}_\mathrm{D}(\mathrm{L}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{L})\mathbb{P}_\mathrm{L}(\mathrm{D})}{\mathbb{P}(\mathrm{L})\mathbb{P}_\mathrm{L}(\mathrm{D}) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{L}})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{L}}}(\mathrm{D})} = \frac{(1/5)(1/5)}{(1/5)(1/5) + (4/5)(1/10)} = \frac{1}{3}$.

Exercice 105.

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire.
On tire successivement des boules suivant le protocole :
- si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne avec une autre noire ;
- si elle est blanche, on interrompt les tirages.

On note B_n l'événement « la boule blanche n'est pas sortie à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage ».

1. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$.

2. Calculer $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n\Big)$.

3. Que signifie cette dernière probabilité ?

Correction n° 105.

1. Soit N_i l'événement « une boule noire sort au $i^{\text{ème}}$ tirage ». Alors $\mathrm{B}_n = \mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{N}_n$, et par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \mathbb{P}(\mathrm{N}_1)\mathbb{P}_{\mathrm{N}_1}(\mathrm{N}_2)\dots\mathbb{P}_{\mathrm{M}_1\cap \mathrm{N}_{n-1}}(\mathrm{N}_n) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}\times = \frac{1}{n+1}.$$

2. La suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante car : $\forall n \geqslant 1, \mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{B}_n \cap \mathrm{N}_{n+1} \subset \mathrm{B}_n$.
Par la propriété de continuité monotone : $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = 0$

3. L'événement « la boule blanche ne sort jamais » est quasi-impossible (ou presque-impossible), ou encore « la boule blanche sort » est quasi-certain (ou presque-sûr).

Exercice 106.

On dispose de trois pièces équilibrée dont une a deux « faces ». On prend une pièce au hasard et on effectue des lancers indépendant de cette pièce.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « face » au premier lancer ?

2. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'obtenir « face » au cours des n premiers lancers.

3. Sachant que l'on a obtenu « face » au cours de n premiers lancers, on note p_n la probabilité que l'on ait choisi la pièce truquée. Déterminer p_n.

4. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} p_n$? Ce résultat était-il prévisible ?

Correction n° 106.

1. Soit T l'événement « la pièce choisie est la pièce truquée » et F_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ lancer donne face ».
$(\mathrm{T}, \overline{\mathrm{T}})$ étant un système complet, la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(\mathrm{F}_1) = \mathbb{P}(\mathrm{T})\mathbb{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{F}_1) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{T}})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{F}_1) = \frac{1}{3}\times 1 + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

2. De la même façon,

$$\mathbb{P}(\mathrm{F}_1\cap\cdots\cap\mathrm{F}_n) \overset{\text{FPT}}{=} \frac{1}{3}\times 1 + \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

3. Notons $\mathrm{S}_n = \mathrm{F}_1\cap\cdots\cap\mathrm{F}_n$.

$$p_n = \mathbb{P}(\mathrm{T})_{\mathrm{S}_n} \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(\mathrm{T})\mathbb{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{S}_n)}{\mathbb{P}(\mathrm{S}_n)} = \frac{1/3}{\big(1+(1/2^{n-1})\big)/3} = \frac{1}{1+(1/2^{n-1})}$$

4. $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1$: plus on a une grande série ininterrompue de faces, plus il est probable que l'on utilise la pièce truquée.

3.2 Variables aléatoires

Exercice 107.

Soit k un entier naturel et X une variable aléatoire répartie uniformément sur les nombres pairs de 0 à $2k$.

1. a) Déterminer la loi de X.

b) En déduire $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})$.

2. On pose $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/2 + 1$. Montrer que Y suit une loi usuelle et retrouver ainsi $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})$.

Correction n° 107.

1. a) $\mathrm{X}(\Omega) = \{0, 2, 4, \dots, 2k\} = \{2i/i \in [\![0\,;\,k]\!]\}$ et $\forall i \in [\![0\,;\,k]\!], \mathbb{P}(\mathrm{X}=i) = \dfrac{1}{k+1}$.

b) $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}(2i)\times\frac{1}{k+1} = \frac{2}{k+1}\sum_{i=0}^{k} i = \frac{2}{k+1}\times\frac{k(k+1)}{2} = k.$

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}^2) = \sum_{i=0}^{k}(2i)^2\times\frac{1}{k+1} = \frac{4}{k+1}\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{4}{k+1}\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{2k(2k+1)}{3}.$$

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \frac{2k(2k+1)}{3} - k^2 = \frac{k^2+2k}{3}$$

2. a) Soit $j = 2i \in \mathrm{X}(\Omega)$. Alors $\dfrac{j}{2}+1 = i+1 \in [\![1\,;\,k+1]\!]$.

Donc $\mathrm{Y}(\Omega) \subset [\![1\,;\,k+1]\!]$, et $\forall j \in [\![1\,;\,k+1]\!]$, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}=j) = \mathbb{P}(\mathrm{X}=2(j-1)) = \dfrac{1}{k+1}$ car $j-1 \in [\![0\,;\,k]\!]$.
Donc $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;\,k+1]\!])$, et comme $\mathrm{X} = 2(\mathrm{Y}-1) = 2\mathrm{Y}-2$,

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 2\mathbb{E}(\mathrm{Y}) - 2 = 2\times\frac{(k+1)+1}{2} - 2 = k$$

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = 4\mathbb{V}(\mathrm{Y}) = 4\times\frac{(k+1)^2-1}{12} = \frac{k^2+2k}{3}$$

Exercice 108. *Lois uniformes*

Soient $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1\,;\,ab]\!]$. On suppose que la loi de X est donnée par :

$$\forall k \in [\![1\,;\,ab]\!], \quad \mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

1. Quelles conditions doivent vérifier les entiers a et b ?

2. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et trouver a et b tels que $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{13}{2}$.

3. Tracer le graphe de la fonction de répartition F_X de la variable X dans le cas où $a = 2$.

4. Dans le cas général, résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $F_X(t) = \dfrac{1}{2}$.

Correction n° 108.

1. X suit une loi uniforme sur $[\![1\,;ab]\!]$ puisque $\mathbb{P}(X = k)$ ne dépend pas de k. Donc $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{ab}$, donc $\dfrac{b-a}{ab} = \dfrac{1}{ab}$. Donc $b - a = 1$, ou encore $b = a+1$. Réciproquement, si $b = a+1$, alors x suit bien $\mathcal{U}([\![1\,;ab]\!])$.

2. Puisque $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;ab]\!])$, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{ab+1}{2}$.

Sinon, on peut calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{ab} k\mathbb{P}(X = k)$.

3. Il s'agit de la fonction de répartition de $\mathcal{U}([\![1\,;6]\!])$: en escalier, nulle sur $]-\infty\,;1[$, puis présentant 6 sauts de hauteur 1/6 à chaque entier de $[\![1\,;6]\!]$.

4.
$$F_X(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{t}\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{t}\frac{1}{ab} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{t}{ab} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{ab}{2} = \frac{a(a+1)}{2}$$
Remarquons que t est un entier car l'un des deux entiers a ou $a+1$ est pair.

EXERCICE 109. Minimum et maximum de deux uniformes indépendantes0

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire dans cette urne successivement avec remise deux boules, en notant X et Y les numéros de la première et de la seconde boule tirée respectivement. On note enfin : $I = \inf(X, Y)$ et $S = \sup(X, Y)$.

1. Déterminer les lois de X et de Y. Que vaut $\mathbb{E}(S + I)$?

2. Calculer $\mathbb{P}(S \leqslant k)$ et en déduire la loi de S, ainsi que son espérance.

3. Calculer $\mathbb{P}(I \geqslant k)$ et en déduire la loi de I.

4. Que vaut $\mathbb{E}(I)$? (Calcul sommatoire interdit !)

5. Calculer $\mathbb{V}(I)$, $\mathbb{V}(S)$ et $\mathbb{V}(S + I)$ puis $\mathrm{Cov}(S, I)$.

6. Déterminer la loi conjointe de S et de I, et retrouver les lois marginales de S et I.

Correction n° 109.

1. X, $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$, $S + I = X + Y \Longrightarrow \mathbb{E}(S + I) = \mathbb{E}(X + Y) \overset{\text{lin.}}{=} n + 1$.

2. $\mathbb{P}(S \leqslant k) = k^2/n^2$, $\mathbb{P}(S = k) = (2k-1)/n^2$, $\mathbb{E}(S) = \dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n}$.

3. $\mathbb{P}(I \geqslant k) = (n-k+1)^2/n^2$, $\mathbb{P}(I = k) = (2n-2k+1)/n^2$,
$\mathbb{E}(I) = \mathbb{E}(S + I - S) = \mathbb{E}(S + I) - \mathbb{E}(S) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

4. $\forall i, j \in [\![1\,;n]\!]$, $p_{i,j} \overset{\text{déf.}}{=} \mathbb{P}([I = i] \cap [S = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ 1/n^2 & \text{si } i = j \\ 2/n^2 & \text{si } i < j \end{cases}$.

$$\mathbb{P}(I = i) = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = \ldots,\ \mathbb{P}(J = j) = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = \ldots.$$

EXERCICE 110. *Sauts de puce.*

Une puce se déplace sur une règle graduée en sautant d'une unité soit vers la gauche (vers les abscisses négatives), soit vers la droite. On suppose qu'à chaque saut, la probabilité de saut vers la gauche est p avec $0 < p < 1$ et est indépendante des autres. Soit :

- ☞ G_n (resp. D_n) le nombre de saut(s) effectué(s) vers la gauche (resp. vers la droite) à l'issue du $n^{\text{ème}}$ saut ;
- ☞ X_n l'abscisse de la position de la puce l'issue du $n^{\text{ème}}$ saut.

1. Déterminer les lois de G_n et D_n.

2. Déterminer la loi du couple (G_n, D_n).

3. Exprimer X_n en fonction de n et de G_n et retrouver $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

Correction n° 110.

1. $G_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$ et $D_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; q)$ où $q = 1 - p$.

2. Comme $D_n = n - G_n$, $(G_n, D_n)(\Omega) = \{(k, n-k)/k \in [\![0\,;n]\!]\}$
et $\mathbb{P}((G_n, D_n) = (k, n-k)) = \mathbb{P}(G_n = k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

3. $X_n = (n - G_n) - G_n = n - 2G_n$, donc
$\mathbb{E}(X_n) = n - 2\mathbb{E}(G_n) = n - 2np = n(q-p)$ et $\mathbb{V}(X_n) = 4\mathbb{V}(G_n) = 4npq$.

✯✰✯✰✯