PanoramaThématique
Adapté aux programmes PC-PSI

Nicolas Maillard

27 mars 2026

Références aux sujets : Concours - Année - Filière - Partie du sujet.

Abréviations des banques d'épreuves :

CCP	Concours commun CCinP
CS	Concours Centrale-Supéléc
MP	Concours Mines-Ponts
E3A	Concours E3A

Table des matières

Chapitre 1

Autour de l'espérance et de la variance

Exercice 1

Variable positive d'espérance nulle

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, et possédant une espérance.
Montrer que

$$\mathrm{X} \geqslant 0 \text{ et } \mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}([\mathrm{X} = 0]) = 1,$$

autrement dit *une variable positive d'espérance nulle est presque-sûrement nulle, et réciproquement.*

Solution (**Ex.1** – *Variable positive d'espérance nulle*)
On sait que : $\forall x \in \mathrm{X}(\Omega), \quad x \geqslant 0$.
Supposons que : $\exists x_0 > 0$ *tq* $\mathbb{P}([\mathrm{X} = x_0]) > 0$.
Alors $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} x\mathbb{P}([\mathrm{X} = x]) \geqslant x_0 \mathbb{P}([\mathrm{X} = x_0]) > 0$: absurde.
Donc : $\forall x \in \mathrm{X}(\Omega)$ *tq* $x \neq 0, \quad \mathbb{P}([\mathrm{X} = x]) = 0$.
Or $\displaystyle\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \mathbb{P}([\mathrm{X} = x]) = 1$ (système complet d'événements), donc $\mathbb{P}([\mathrm{X} = 0]) = 1$.

Exercice 2

Caractérisation de la nullité de la variance

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, et possédant une variance.
Montrer que

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}([\mathrm{X} = \mathbb{E}(\mathrm{X})]) = 1,$$

autrement dit *la variance de* X *est nulle si, et seulement si,* X *est presque-sûrement constante, égale (du coup) à son espérance.*

Solution (**Ex.2** – *Caractérisation de la nullité de la variance*)
$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{E}\big((\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))^2\big) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{P}((\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))^2 = 0) = 1$ car $(\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))^2$ est une variable aléatoire réelle positive. On poursuit :
$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0) = 1 \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathbb{E}(\mathrm{X}))$.

Exercice 3

Espérance d'une variable bornée

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On suppose que X est bornée, *i.e.*

$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \Omega, |\mathrm{X}(\omega)| \leqslant \mathrm{M}.$$

Autrement dit : $\mathrm{X}(\Omega) \subset [-\mathrm{M}\,;\ \mathrm{M}]$.
Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ existe, et $|\mathbb{E}(\mathrm{X})| \leqslant \mathrm{M}$.

Solution (**Ex.3** – *Espérance d'une variable bornée*)
$\forall x \in X(\Omega), \quad |x|\,\mathbb{P}([X=x]) \leqslant M\mathbb{P}([X=x])$,
or la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x])$ converge car $\big([X=x]\big)_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements (et sa somme vaut 1).
Par comparaison, $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}([X=x])$ est absolument convergente, donc $\mathbb{E}(X)$ existe.
De :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad -M\mathbb{P}([X=x]) \leqslant x\mathbb{P}([X=x]) \leqslant M\mathbb{P}([X=x])$$
$$\text{et} \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x]) = 1$$

on tire :

$$-M \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant M.$$

☞ Ce dernier encadrement est une conséquence directe de la *croissance de l'espérance* car

$$\text{Si } \mathbb{E}(X) \text{ existe, alors } -M \leqslant X \leqslant M \Longrightarrow -M \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant M.$$

Exercice 4

Espérance par domination

Soit X et Y deux variable aléatoire réelle définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On suppose que :
(i) $|X| \leqslant Y$, *i.e.* $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leqslant Y(\omega)$,
(ii) $\mathbb{E}(Y)$ existe.
Montrer qu'alors $\mathbb{E}(X)$ existe, et $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Solution (**Ex.4** – *Espérance par domination*)
Là, il faut revenir à une expression encore plus fondamentale de l'espérance :

$$(\mathcal{F}) \qquad \mathbb{E}(Y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}([Y=y]) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\{\omega\}),$$

toujours la même idée : $\mathbb{E}(Y)$ est la moyenne, pour chaque résultat ω possible de l'expérience, de la valeur $Y(\omega)$ prise par Y pondérée par la probabilité que ce résultat ω se réalise.
Au passage, à méditer, pour $y \in Y(\Omega)$,

$$y\mathbb{P}([Y=y]) = y \sum_{\omega\in\Omega, Y(\omega)=y} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega, Y(\omega)=y} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

donc

$$\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}([Y=y]) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \left(\sum_{\omega\in\Omega, Y(\omega)=y} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \right) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\{\omega\})$$

car les deux sommes imbriquées constituent une partition de l'ensemble Ω : on classe les éléments de Ω suivant la valeur de $y = Y(\omega)$, mais au final on somme pour tous les éléments de Ω.
Alors : $\forall \omega \in \Omega, \quad |X(\omega)|\,\mathbb{P}(\{\omega\}) \leqslant Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$,
or par hypothèse la série $\sum\limits_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$ converge,
donc $\sum\limits_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|\,\mathbb{P}(\{\omega\})$ converge.
Ainsi, $\mathbb{E}(X)$ existe, et par croissance de l'espérance,

$$-Y \leqslant X \leqslant Y \Longrightarrow -\mathbb{E}(Y) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y).$$

Chapitre 2

Cauchy-Schwarz et coefficient de corrélation linéaire

C'est deux inégalités reposent sur le même procédé :

Exercice 5

Trinôme de signe constant

Montrer que si le trinôme P : $\lambda \mapsto a\lambda^2 + b\lambda + c$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$, alors $\Delta = b^2 - 4ac \leqslant 0$.

Solution (**Ex.5** – *Trinôme de signe constant*)
...car sinon P admettrait deux racines distinctes et changerait de signe entre ces deux racines.

Exercice 6

Inégalité de Cauchy-Schwarz en algèbre euclidienne

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Montrer que

$$\forall (u,v) \in \mathrm{E}^2 \quad |\langle u,v\rangle| \leqslant ||u||\,||v||$$

avec égalité si, et seulement si, u et v sont colinéaires.

Solution (**Ex.6** – *Inégalité de Cauchy-Schwarz en algèbre euclidienne*)
Soit $(u,v) \in \mathrm{E}^2$.
① Soit $\mathrm{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lambda \mapsto ||u+\lambda v||^2$.
② $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(\lambda) \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(\lambda) = ||v||^2\,\lambda^2 + 2\,\langle u,v\rangle\,\lambda + ||u||^2$ est un trinôme du second degré en λ.
③ Donc $\Delta = 4\,\langle u,v\rangle^2 - 4\,||u||^2\,||v||^2 \leqslant 0$, donc $|\langle u,v\rangle| \leqslant ||u||\,||v||$: c'est l'inégalité !
④ S'il y a égalité, alors $\Delta = 0$ et P possède une racine (double) λ_0. Or $\mathrm{P}(\lambda_0) = 0$ donne $||u+\lambda_0 v|| = 0$ donc $u = -\lambda_0 v$: u et v sont colinéaires.
⑤ Réciproquement, si u et v sont colinéaires avec $u = kv$, alors

$$|\langle u,v\rangle| = |k|\,\langle u,u\rangle = |k|\,||u||^2 = ||u||\,||ku|| = ||u||\,||v||.$$

Exercice 7

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour le coefficient de corrélation linéaire

Soit X et Y deux variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On suppose que X et Y admettent un écart-type non nul.
On pose : $\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \dfrac{\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\sigma(\mathrm{X})\sigma(\mathrm{Y})}$.
Montrer que

$$|\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})| \leqslant 1$$

$$\text{avec égalité si, et seulement si, } \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{P}(\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b) = 1$$

Solution (**Ex.7 –** *Inégalité de Cauchy-Schwarz pour le coefficient de corrélation linéaire*)
① Soit $\mathrm{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lambda \mapsto \mathbb{V}(\lambda\mathrm{X} + \mathrm{Y})$.
② $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(\lambda) \geqslant 0$ (toute variance est positive !) et $\mathbb{P}(\lambda) = \mathbb{V}(\mathrm{X})\lambda^2 + 2\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\lambda + \mathbb{V}(\mathrm{Y})$ est un trinôme du second degré en λ.
③ Donc $\Delta = 4\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})^2 - 4\mathbb{V}(\mathrm{X})\mathbb{V}(\mathrm{Y}) \leqslant 0$, donc $|\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})| \leqslant \sigma(\mathrm{X})\sigma(\mathrm{Y})$. Les écarts-types étant positifs (toujours) et non nuls (par hypothèse) :

$$|\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})| \leqslant 1.$$

④ S'il y a égalité, alors $\Delta = 0$ et P possède une racine (double) λ_0. Or $\mathrm{P}(\lambda_0) = 0$ donne $\mathbb{V}(\lambda_0\mathrm{X} + \mathrm{Y}) = 0$ donc la variable $\lambda_0\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ est presque sûrement constante.
Donc : $\exists \mu \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(\lambda_0\mathrm{X} + \mathrm{Y} = \mu) = 1$, soit $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = -\lambda_0\mathrm{X} + \mu) = 1$.
⑤ Si $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b) = 1$, alors $\mathbb{P}(\mathrm{Y} - a\mathrm{X} = b) = 1$, donc $\mathbb{V}(\mathrm{Y} - a\mathrm{X}) = 0$: P possède une racine, nécessairement double car il est toujours positif. Donc $\Delta = 0$, donc $|\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})| = \sigma(\mathrm{X})\sigma(\mathrm{Y})$.

Chapitre 3

Markov et Bienaymé-Tchebychev

[CCP – 2018 – PSI – Pb 2]

Exercice 8

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
On suppose que X est positive et possède une espérance.
Montrer que

$$\forall a > 0, \qquad \mathbb{P}\big(\mathrm{X} \geqslant a\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{X})}{a}.$$

Solution (**Ex.8** – *Inégalité de* Markov)
Le raisonnement repose sur une majoration assez grossière : dans la somme définissant l'espérance, on oublie une partie des termes, puis on minore ceux qui restent.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} x\mathbb{P}([\mathrm{X}=x]) \\
&\geqslant \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega),\ x\geqslant a} x\mathbb{P}([\mathrm{X}=x]) \\
&\geqslant \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega),\ x\geqslant a} a\mathbb{P}([\mathrm{X}=x]) \\
&\geqslant a \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega),\ x\geqslant a} \mathbb{P}([\mathrm{X}=x]) \geqslant a\mathbb{P}([\mathrm{X}\geqslant a])
\end{aligned}$$

Exercice 9

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
On suppose que X possède une variance.
Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\big(\big|\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X})\big| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\varepsilon^2}.$$

Solution (**Ex.9** – *Inégalité de* Bienaymé-Tchebychev)
Le résultat est immédiat : on applique l'inégalité de Markov *pour*

$$\mathrm{Y} = (\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X}))^2 \text{ et } a = \varepsilon^2.$$

On a alors :
Y est positive, $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \mathbb{V}(\mathrm{X})$, $a = \varepsilon^2$, et $[\mathrm{Y} \geqslant a] = [(\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X}))^2 \geqslant \varepsilon^2] = [|\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X})| \geqslant \varepsilon]$, donc l'inégalité découle de celle de Markov.

Chapitre 4

Lois hypergéométrique et multinomiale

Deux lois d'utilisation fréquente prolongent la loi binomiale. La loi hypergéométrique envisage de compter un nombre de succès lors de tirages sans remise, donc non indépendants. La loi multinomiale s'intéresse aux successions d'expériences indépendantes pouvant se solder par des succès de plusieurs types, et non une issue binaire succès vs échec.

Exercice 10

Loi hypergéométrique

On considère un ensemble E de N objets (avec $\mathrm{N} \geqslant 2$), dont un nombre $r \geqslant 1$ est de couleur rouge et un nombre $b \geqslant 1$ est de couleur bleue, de sorte que $r + b = \mathrm{N}$.
On note par ailleurs $p \overset{\text{déf.}}{=} r/\mathrm{N}$ et $q \overset{\text{déf.}}{=} b/\mathrm{N}$ la proportion initiale d'objets rouges respectivement bleus de cet ensemble, de sorte que $p + q = 1$.
Soit $n \in [\![1\,;\ \mathrm{N}]\!]$. Dans cet ensemble E, on tire successivement et **sans remise** n objets de cet ensemble et on s'intéresse au nombre R d'objets rouges parmi ces n objets.
Notons que, vu la définition de R, il reviendrait au même de tirer simultanément ces n objets.

1. Montrer que la loi de R est donnée par

$$\forall k \in [\![0\,;\ n]\!]\,, \quad \mathbb{P}([\mathrm{R} = k]) = \frac{\dbinom{r}{k}\dbinom{b}{n-k}}{\dbinom{\mathrm{N}}{n}}.$$

La loi de R s'appelle la *loi hypergéométrique* et est fréquemment notée $\mathcal{H}(\mathrm{N}, n, p)$.

2. Interpréter le paramètre p comme une probabilité.

3. Démontrer la *formule de Vandermonde*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{\mathrm{N}}{n}.$$

4. *Calcul des moments en décomposant R en somme de variables indicatrices*
On note, pour tout i de $[\![1\,;\ n]\!]$, X_i la variable indicatrice de l'événement « *le i–ème objet tiré est rouge* ».

a) Déterminer la loi de chaque X_i. *On pourra déterminer la loi de* X_1 *et justifier que les autres variables* X_i *suivent la même loi.*

b) En déduire l'espérance de R.

c) Déterminer, pour $i \neq j$, la loi de $\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j$.

d) En déduire la variance de R.

5. *Calcul des moments par la formule de Vandermonde*

a) Justifier que, pour tout $k \in [\![1\,;\ n]\!]$, $k\dbinom{r}{k} = r\dbinom{r-1}{k-1}$.

b) Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{R})$.

c) Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{R}(\mathrm{R}-1))$ et en déduire $\mathbb{V}(\mathrm{R})$.

6. *Convergence de $\mathcal{H}(\mathrm{N}, n, p)$ vers $\mathcal{B}(n, p)$*
Heuristique : si l'on tire un petit nombre d'objets n dans un grand ensemble E, on peut penser que les tirages modifient peu la composition de l'ensemble, les proportions $p = r/\mathrm{N}$ et $q = b/\mathrm{N}$ restant sensiblement égales au cours

des tirages. Donc on peut penser que tout ce passe comme si les tirages avec lieu *avec remise*, auquel cas R suit une loi binomiale.

a) Que dire, pour n et p fixés, de $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{E}(R)$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{V}(R)$?

b) Soit i fixé. Montrer que $\dbinom{j}{i} \underset{j\to+\infty}{\sim} \dfrac{j^i}{i!}$.

c) En déduire que, pour n, p et k fixés, $\mathbb{P}(R = k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

On dit que, lorsque N tend vers $+\infty$, $\mathcal{H}(N, n, p)$ *converge en loi vers* $\mathcal{B}(n, p)$.

Solution (**Ex.10 –** *Loi hypergéométrique*)

1. On tirage peut être modélisé par une partie à n éléments de l'ensemble E. Soit Ω l'ensemble des parties à n éléments de E. Alors $\mathcal{C}ard(\Omega) = \dbinom{N}{n}$.

Soit $k \in [\![0\,;\ n]\!]$. Les parties favorables à l'événement $[R = k]$ sont obtenues en choisissant k éléments parmi les r rouges puis $n - k$ parmi les b bleus.

Donc $\mathcal{C}ard([R = k]) = \dbinom{r}{k}\dbinom{b}{n-k}$.

Les tirages étant équiprobables,

$$\mathbb{P}([R = k]) = \frac{\dbinom{r}{k}\dbinom{b}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}.$$

2. p est la probabilité de tirer un objet rouge au premier tirage, mais pas au-delà car la composition de l'ensemble E est ensuite modifiée.

3. Comme $\big([R = k]\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est un système complet d'événements, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([R = k]) = 1, \text{ donc } \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{N}{n}.$$

4. *Calcul des moments en décomposant R en somme de variables indicatrices*

Ici, il devient nécessaire de changer Ω qui ne tenait pas compte de l'ordre en Ω' ensemble des $n-$listes (ordonnées, donc) d'éléments distincts de E.

a) • X_1 suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

• Soit $i \in [\![2\,;\ n]\!]$.

Soit $\sigma : [X_i = 1] \to [X_1 = 1]$ l'application qui à chaque tirage ω faisant apparaître un objet rouge au $i-$ème rang (donc favorable à $[X_i = 1]$) associe le tirage ω' obtenu en permutant le premier objet et le $i-$ème de ω, donc ω' est favorable à $[X_1 = 1$.

Alors σ est une bijection de $[X_i = 1]$ sur $[X_1 = 1]$.

Par conséquent, $\mathcal{C}ard([X_i = 1]) = \mathcal{C}ard([X_1 = 1])$, donc $\mathbb{P}([X_i = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$ et $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

C'est assez moral, car si on prend au hasard un objet de notre tirage sans connaître son rang, on sera enclin à penser qu'il y a une probabilité p qu'il soit rouge.

b) $\mathbb{E}(R) = \mathbb{E}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{lin.}}{=} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = np.$

c) • $X_1X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ donc X_1X_2 suit une loi de Bernoulli.

$\mathbb{P}([X_1X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 1])\mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 1])$

(il n'y a pas indépendance ! ! !)

$\mathbb{P}([X_1X_2 = 1]) = p\dfrac{r-1}{N-1}$ car au second tirage il reste $r - 1$ objets rouges parmi les $N - 1$ restant.

Donc $X_1X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(p\dfrac{r-1}{N-1}\right)$

• Un argument analogue à la question précédente montre que, pour tout $i \neq j$, $X_iX_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(p\dfrac{r-1}{N-1}\right)$.

d) $\mathbb{V}(R) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{i\neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j),$

or $\forall i \in [\![1\,;\ n]\!]\,, \mathbb{V}(X_i) = p(1 - p)$ et $\forall 1 \leqslant i < j \leqslant n$,

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = p\frac{r-1}{N-1} - p^2, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(R) &= np(1-p) + n(n-1)p\left(\frac{r-1}{N-1} - p\right)\\
&= np(1-p) + n(n-1)p\left(\frac{p-1}{N-1}\right) \text{ puisque } pN = r\\
&= npq\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)
\end{aligned}$$

5. *Calcul des moments par la formule de Vandermonde*

a) $k\binom{r}{k} = \dfrac{r!}{(k-1)!(r-k)!} = r\dfrac{(r-1)!}{(k-1)!((r-1)-(k-1))!} = r\dbinom{r-1}{k-1}$

b)
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R) &= \frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=0}^{n} k\binom{r}{k}\binom{b}{n-k} = \frac{r}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{r-1}{k-1}\binom{b}{n-k}.\\
&= \frac{r}{\binom{N}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{r-1}{k}\binom{b}{n-1-k}, \text{ et par la formule de Vandermonde}\\
&= \frac{r}{\binom{N}{n}}\binom{r+b-1}{n-1} = \frac{r}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1} = \frac{rn}{N} = np
\end{aligned}$$

c) $\mathbb{E}(R(R-1))$ et en déduire $\mathbb{V}(R)$. De façon très analogue,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R(R-1)) &\overset{\text{transfert}}{=} \frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}\\
&= \frac{r(r-1)}{\binom{N}{n}}\sum_{k=2}^{n}\binom{r-2}{k-2}\binom{b}{n-k}.\\
&= \frac{r(r-1)}{\binom{N}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{r-2}{k}\binom{b}{n-2-k}, \text{ et par la formule de Vandermonde}\\
&= \frac{r(r-1)}{\binom{N}{n}}\binom{r+b-2}{n-2} = \frac{r}{\binom{N}{n}}\binom{N-2}{n-2} = \frac{r(r-1)n(n-1)}{N(N-1)}\\
&= np\frac{(r-1)(n-1)}{N-1}
\end{aligned}$$

Comme par linéarité $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X)$, la formule de König-Hyugens donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2\\
&= np\left(\frac{(r-1)(n-1)}{N-1} + 1 - np\right) \text{ et comme } r = Np\\
&= np\left(\frac{Npn - Np - n + 1 + N - 1 - npN + np}{N-1}\right)\\
&= np\left(\frac{N(1-p) - n(1-p)}{N-1}\right)\\
&= npq\frac{N-n}{N-1}
\end{aligned}$$

6. a) $\lim\limits_{N\to+\infty}\mathbb{E}(R) = np$ et $\lim\limits_{N\to+\infty}\mathbb{V}(R) = npq$, qui sont respectivement l'espérance et la variance de la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

b) Soit i fixé.

$$\binom{j}{i} = \frac{j(j-1)\dots(j-i+1)}{i!} \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{j^i}{i!} \text{ (produit de } i \text{ facteurs tous équivalents à } j).$$

c) Pour n, p (donc q) et k fixés,

$$\mathbb{P}(R = k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{(pN)^k(qN)^{n-k}n!}{N^n k!(n-k)!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \binom{n}{k}p^kq^{n-k}.$$

Exercice 11

Loi multinomiale et matrice de covariance

Une urne contient des boules de r couleurs différentes $C_1, \ldots, C_r$, en proportion respective $p_1, \ldots, p_r$ de sorte que : $p_1 + \cdots + p_r = 1$. On tire au hasard et avec remise n boules dans cette urne et on note, pour chaque i entre 1 et r, ν_i le nombre de boules de couleur C_i obtenues au cours des n tirages, de sorte que : $\nu_1 + \cdots + \nu_r = n$ (étonnant non ?).

1. On note X le vecteur aléatoire $(\nu_1, \ldots, \nu_r)$.
  a) Décrire l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs possibles de X.
  b) Donner la loi de X.
  c) Qu'obtient-on lorsque $r = 2$?

2. a) Donner, pour chaque i entre 1 et r, la loi, l'espérance et la variance de ν_i.
  b) Donner, pour chaque i et j distincts entre 1 et r, la loi de $\nu_i + \nu_j$. En déduire la covariance du couple (ν_i, ν_j).

3. a) Pour chaque i entre 1 et r, on pose $y_i = \dfrac{\nu_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$. Les v.a.r. y_i sont-elles centrées, c'est-à-dire d'espérance nulle ? Sont-elles réduites, c'est-à-dire de variance égale à 1 ?
  b) On note C la matrice de variance-covariance des $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$:
$$C \overset{\text{déf.}}{=} \big(\mathrm{Cov}(y_i, y_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant r}.$$
Montrer que $C = I_r - N$ où $N = {}^tL.L$ avec $L = \big(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_r}\big) \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$.
  c) Montrer que : $N^2 = N$ et que : $\mathrm{rg}(N) = 1$.
  d) Que dire de $\mathrm{rg}(C)$?

Solution (**Ex.11** – *Loi multinomiale et matrice de covariance*)

1. On note X le vecteur aléatoire $(\nu_1, \ldots, \nu_r)$.
  a) $X(\Omega) = \Big\{(k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^r, \displaystyle\sum_{i=1}^{r} k_i = n\Big\}$.
  b) Donner la loi de X.
Soit $\mathcal{T} = \big\{(c_1, \ldots, c_n) \in [[\,1\,;\ r]]^n\ \big\} = [[\,1\,;\ r]]^n$ l'ensemble des tirages possibles.
Dénombrons les tirages favorables à $X = (k_1, \ldots, k_r) \in X(\Omega)$.
Pour construire un tirage favorable, il faut choisir les rangs de k_1 tirages amenant la couleur C_1 et il y a $\dbinom{n}{k_1}$ possibilités.
Puis il faut choisir les rangs de k_1 tirages amenant la couleur C_2 et il y a $\dbinom{n-k_1}{k_2}$ possibilités.
En itérant le procédé, il y a :
$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-\cdots-k_{r-1}}{k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$$
tirages favorables à $X = (k_1, \ldots, k_r)$, et chacun d'eux a une probabilité $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}$ de se réaliser, par indépendance des expériences.
Les tirages étant deux à deux incompatibles, la loi de X est
$$\forall (k_1, \ldots, k_r) \in X(\Omega), \mathbb{P}\big(X = (k_1, \ldots, k_r)\big) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}.$$
  c) Pour $r = 2$, $\mathbb{P}\big(X = (k_1, k_2)\big) = \dfrac{n!}{k_1!k_2!}p_1^{k_1}p_2^{k_2} = \dbinom{n}{k_1}p_1^{k_1}(1-p_1)^{n-k_1}$, on retombe sur la loi binomiale.

2. a) $\nu_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_i)$, $\mathbb{E}(\nu_i) = np_i$ et $\mathbb{V}(\nu_i) = np_i(1-p_i)$.
  b) $\nu_i + \nu_j \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_i + p_j)$.
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\nu_i, \nu_j) &= \frac{1}{2}\big(\mathbb{V}(\nu_i + \nu_j) - \mathbb{V}(\nu_i) - \mathbb{V}(\nu_j)\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(n(p_i+p_j)(1-p_i-p_j) - np_i(1-p_i) - np_j(1-p_j)\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(-2np_ip_j\big) = -np_ip_j\end{aligned}$$

3. a) • $\mathbb{E}(y_i) = \dfrac{1}{\sqrt{np_i}}\big(\mathbb{E}(v_i) - np_i\big) = 0$: y_i est centrée.
  • $\mathbb{V}(y_i) = \dfrac{1}{np_i}\mathbb{V}(v_i) = 1 - p_i \neq 1$: y_i n'est pas réduite.

b) • $\forall i \in [[1\,;\ r]]\,, c_{i,i} = \mathrm{Cov}(y_i, y_i) = \mathbb{V}(y_i) = 1 - p_i = 1 - \sqrt{p_i p_i}$

• $\forall (i,j) \in [[1\,;\ r]]^2$ avec $i \neq j$, comme $\mathrm{Cov}(a\mathrm{X}+b, c\mathrm{Y}+d) = ac\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, on a $c_{i,j} = \mathrm{Cov}(y_i, y_j) = \dfrac{1}{\sqrt{np_i}\sqrt{np_j}}\mathrm{Cov}(\nu_i, \nu_j) = -\sqrt{p_i p_j}$

• On a bien : $\mathrm{C} = \mathrm{I}_r - \mathrm{N}$ où $\mathrm{N} = \left(\sqrt{p_i p_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant r} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{L}.\mathrm{L}$ avec $\mathrm{L} = \left(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_r}\right)$.

c) • $\mathrm{N}^2 = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{L}\mathrm{L}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{L}\mathrm{L} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{L}(\mathrm{L}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{L})\mathrm{L}$ or $\mathrm{L}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{L} = (\sum_{i=1}^{r} p_i) = (1)$ donc $\mathrm{N}^2 = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{L}\mathrm{L} = \mathrm{N}$.

• Les colonnes de N sont toutes proportionnelles à sa première colonne qui est non nulles : $\mathrm{C}_j = \dfrac{\sqrt{p_j}}{\sqrt{p_1}}\mathrm{C}_1$, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{N}) = 1$.

d) Remarquons que N est une matrice de projecteur et C est la matrice du projecteur complémentaire. Ce sont même des matrices de projecteurs orthogonaux pour $\mathbb{R}^r$ muni du produit scalaire canonique car elles sont symétriques.
En effet : $\mathrm{C}^2 = (\mathrm{I}_r - \mathrm{N})^2 = \mathrm{I}_r - 2\mathrm{N} + \mathrm{N}^2 = \mathrm{I}_r - \mathrm{N} = \mathrm{C}$.
Voici deux arguments pour le rang.
• Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$.
$\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{C}) \iff \mathrm{CX} = 0 \iff \mathrm{X} - \mathrm{NX} = 0 \iff \mathrm{NX} = \mathrm{X} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Im}(\mathrm{N})$
Donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{C}) = \mathrm{Im}(\mathrm{N})$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{C}) = r - \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{C})) = r - \mathrm{rg}(\mathrm{N}) = r - 1$.
• C est une matrice de projecteur donc diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(\mathrm{C}) \subset \{0, 1\}$, donc semblable à une matrice $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Alors $\mathrm{rg}(\mathrm{C}) = k = \mathrm{Tr}\left(()\,\mathrm{C}\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r}(1 - p_i) = r - \sum_{i=1}^{r} p_i = r - 1$.

Exercice 12

Premier changement dans une distribution multinomiale

Soit n un entier au moins égal à 2.
Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. Pour tout k de $[[1\,;\ n]]$, on note N_k le nombre de boules portant le numéro k, et p_k la proportion de boules portant le numéro k, de sorte que

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Dans cette urne, on effectue des tirages successifs avec remise jusqu'au premier changement de numéro et on note X_n le nombre de numéros identiques obtenus avant ce premier changement.
Ainsi, si les premiers tirages amènent les numéros 2 puis 2 puis 2 puis 1, alors $\mathrm{X}_n = 3$.

1. a) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_n = k\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i^k (1 - p_i).$$

b) En déduire l'existence et la valeur de l'espérance de X.

2. Dans cette question, on se propose de démontrer de deux façons différentes la propriété suivante

$$\forall \alpha > 0, \forall n \geqslant 2, \forall \left(x_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \left]\,0\,;\ +\infty\right[^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant \frac{n^2}{\alpha}$$
avec égalité si, et seulement si, $\forall \in [[1\,;\ n]]\,, x_i = \dfrac{\alpha}{n}$.

a) *Première méthode –*

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $\beta > 0$, déterminer le minimum de

$$g_{m,\beta} :]\,0\,;\ \beta[\ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{m^2}{\beta - x} + \frac{1}{x}.$$

Établir alors la propriété par récurrence sur n.

b) *Seconde méthode –*
Établir la propriété en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n\right) \geqslant \frac{n}{n-1}$$

en précisant le cas d'égalité.

Solution (**Ex.12 –** *Premier changement dans une distribution multinomiale*)

1. a) En notant P_i l'événement « *la première boule tirée porte le numéro* i », $\mathbb{P}_{\mathrm{P}_i}\left(\mathrm{X} = k\right) = p_i^{k-1}(1 - p_i)$ puisqu'il sagit de tirer successivement et indépendamment $k - 1$ boules numérotées i puis une différente.
Par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet $(\mathrm{P}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on a bien $\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_n = k\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i^k(1 - p_i)$.

b) Par dérivation de la série géométrique, on sait que pour $x \in]\,0\,;\ 1[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

On en déduit la finitude de l'espérance de X avec

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_i(1 - p_i)}{(1 - p_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1 - p_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - p_i} - n$$

2. a) • $g'_{m,\beta}(x) = \frac{m^2}{(\beta - x)^2} - \frac{1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow (\beta - x)^2 < m^2x^2 \Leftrightarrow \beta - x < mx$ car $x \in]\,0\,;\ \beta[$,
$g'_{m,\beta}(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\beta}{m+1}$: $g_{m,\beta}$ atteint un minimum global strict en $\frac{\beta}{m+1}$, ce minimum vaut $g_{m,\beta}(\frac{\beta}{m+1}) = \frac{m(m+1)}{\beta} + \frac{m+1}{\beta} = \frac{(m+1)^2}{\beta}$.

• Passons à la preuve de la propriété. L'étude de $g_{1,\alpha}$ établit la propriété au rang $n = 2$.

Supposons la propriété vraie pour un rang $n \geqslant 2$ quelconque. Soit $n+1$ réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \alpha$.

On a, par hypothèse de récurrence puisque $\sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha - x_{n+1}$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{x_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_{n+1}} \geqslant \frac{n^2}{\alpha - x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+1}} \geqslant g_{n,\alpha}(x_{n+1}) \geqslant \frac{(n+1)^2}{\alpha}$$

De plus, pour qu'il y ait égalité il faut que $g_{n,\alpha}(x_{n+1}) = \frac{(n+1)^2}{\alpha}$ donc que $x_{n+1} = \frac{\alpha}{n+1}$ et que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \frac{n^2}{\alpha - x_{n+1}} = \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ donc que pour tout i de $[[\,1\,;\ n]]$, $x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\alpha - x_{n+1}}{n} = \frac{\alpha - \frac{\alpha}{n+1}}{n} = \frac{\alpha}{n+1}$.

La propriété est donc établie au rang $n + 1$, ce qui achève la récurrence.

b) L'inégalité de Cauchy-Schwarz $(u|v)^2 \leqslant ||u||^2\,||v||^2$ pour $u = \left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $v = \left(\sqrt{x_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ donne

$$n^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \alpha$$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant \frac{n^2}{\alpha}$, avec égalité si, et seulement si, u et v sont colinéaires donc si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout i, $\sqrt{x_i} = \dfrac{k}{\sqrt{x_i}}$ i.e. $x_i = k$. Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha$, la seule possibilité est :

$$\forall \in [[\,1\,;\ n]]\,, \quad x_i = \frac{\alpha}{n}.$$

3. En posant pour tout i de $[[\,1\,;\ n]]$ $x_i = 1-p_i (> 0)$, on a $\mathbb{E}\,(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} - n$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = n-1$, donc $\mathbb{E}\,(\mathrm{X}) \geqslant \dfrac{n^2}{n-1} - n$ i.e. $\mathbb{E}\,(\mathrm{X}) \geqslant \dfrac{n}{n-1}$, avec égalité si, et seulement si, les x_i sont égaux entre eux, i.e. les p_i sont égaux entre eux, i.e. tous égaux à $\dfrac{1}{n}$.

Autrement dit, $\mathbb{E}\,(\mathrm{X}) \geqslant \dfrac{n}{n-1}$ avec égalité si, et seulement si, les n numéros sont équirépartis dans l'urne.

Chapitre 5

Matrice de covariance, Analyse en Composantes Principales

[CS – 2022 – PC –]

Exercice 13

Généralités sur la matrice de variance-covariance, Analyse en Composantes Principales

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires discrètes possédant chacune une variance et X le vecteur aléatoire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T.$$

On appelle matrice de variance-covariance, ou plus simplement matrice de covariance, du vecteur X la matrice

$$\Sigma = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j)).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice Σ soit nulle.

2. On pose

$$X' = (X_1 - \mathbb{E}(X_1), X_2 - \mathbb{E}((X_2)), \ldots, X_n - \mathbb{E}((X_n)))^T.$$

Que vaut la matrice de covariance du vecteur X' ?

3. Justifier que la matrice Σ est diagonalisable.

4. Pour $A = (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Exprimer $A^T\Sigma A$ à l'aide des coordonnées de A.

5. On rappelle que la covariance est bilinéaire. Justifier que

$$\forall A = (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{V}\left(A^T X\right) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_i \alpha_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

6. En déduire que Σ est une matrique symétrique positive.

7. Montrer que 0 est valeur propre de Σ si, et seulement si, une des variables aléatoires X_i est presque sûrement égale à une combinaison linéaire des autres.

8. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des colonnes unitaires

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) | A^T A = 1\}.$$

Justifier que $\mathbb{V}\left(A^T X\right)$ atteint un minimum et un maximum lorsque A parcourt $\mathcal{C}$.

9. a) On note $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les n valeurs propres de Σ classées par ordre croissant et répétées autant de fois que leur multiplicité et Δ la matrice diagonale $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Justifier l'existence d'une matrice orthogonale de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\Sigma = P\Delta P^T.$$

b) Pour $B = (\beta_i)_{i=1}^n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que vaut $B^T\Delta B$?

c) En déduire que
$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{C}, \quad \mathbb{V}\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right) \leqslant \lambda_n.$$

d) Pour quels vecteurs y a-t-il egalité dans l'inégalité précédente ?

e) Déterminer de même $\min\limits_{\mathrm{A}\in\mathcal{C}} \mathbb{V}\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)$ en précisant en quels vecteurs ce minimum est atteint.

10. a) On considère deux combinaisons linéaires $\mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}$ et $\mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}$ des VAD X_i, où évidemment $(\mathrm{U}, \mathrm{V}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$.
Justifier que
$$\mathrm{Cov}(\mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}, \mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}) = \mathrm{U}^{\mathrm{T}}\Sigma\mathrm{V}.$$

b) On note (U_i) les n colonnes de la matrice P introduite dans la question précédente. Que peut-on dire de la famille $(\mathrm{U}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$?

c) Pour tout i de $[[\,1\,;\ n]]$, on note Y_i la VAD $\mathrm{U}_i{}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}$. Déterminer la variance de chaque Y_i ainsi que la covariance de chaque couple $(\mathrm{Y}_i, \mathrm{Y}_j)$.

d) Quelle est la matrice de covariance du vecteur aléatoire $\mathrm{Y} = (\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)^{\mathrm{T}}$?

Commentaire – Appelons *combinaison linéaire normalisée* toute combinaison $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{X}_i$ telle que $||(\alpha_i)||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2} = 1$, ce qui est une condition nécessaire pour pouvoir comparer les variances.
À partir des n VAD X_i, on a créé n VAD Y_i, toutes combinaisons linéaires normalisées des VAD X_i, décorrélées (c'est-à-dire deux à deux de covariance nulle) et de variance croissante, Y_n et Y_1 étant respectivement des VAD de variances respectivement maximale et minimale parmi les combinaisons linéaires normalisées des X_i.
Cette décomposition est à la base d'une technique courante d'analyse des données, appelée *Analyse en Composantes Principales (ACP).* Les nouvelles VAD Y_i sont appelées *axes principaux* et classés par variance décroissante.
Cette technique repose donc sur l'orthodiagonalisation de la matrice de covariance du vecteur aléatoire $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_i)^{\mathrm{T}}$.

Chapitre 6

Formule de l'espérance totale, problème du collectionneur et vagues d'appels

La formule de l'espérance totale, qui est la jumelle de la formule des probabilités totales, fournit des réponses élégantes à un certain nombre de problèmes pour lesquelles la détermination explicite de lois peut être très fastidieuses.

Définition – Espérance conditionnelle

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Soit $A \in \mathcal{T}$ un événemet de probabilité non nulle. On appelle *espérance conditionnelle de* X *sachant* A*, notée* $\mathbb{E}(X|A)$, l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$, sous réserve qu'elle existe :

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}_A([X = x]).$$

Exercice 14

Formule de l'espérance totale

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements tous de probabilité non nulle.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
(i) $\mathbb{E}(X)$ existe et
(ii) pour tout $i \in [\![1\,;\ n]\!]$, $\mathbb{E}(X|A_i)$ existe.

2. Dans ce cas, montrer qu'on a la *formule de l'espérance totale*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}(X|A_i).$$

Solution (**Ex.14** – *Formule de l'espérance totale*)

1. • Supposons que $\mathbb{E}(X)$ existe. Alors $\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}([X = x])$ converge absolument.

Soit $i \in [\![1\,;\ n]\!]$. Par la formule des probabilités totales

$$|x|\,\mathbb{P}([X = x]) = |x| \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}_{A_j}([X = x]) \geqslant \mathbb{P}(A_i)\,|x|\,\mathbb{P}_{A_i}([X = x])$$

donc

$$|x\mathbb{P}_{A_i}([X = x])| \leqslant \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)}\,|x\mathbb{P}([X = x])|$$

Par comparaison, $\sum_{x \in X(\Omega)} |x\mathbb{P}_{A_i}([X = x])|$ converge, donc $\mathbb{E}(X|A_i)$ existe.

• Réciproquement, si $\mathbb{E}(X|A_i)$ existe pour tout i, alors par linéarité $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}(X|A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}_{A_i}([X = x])$ converge absolument. Or

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{A}_i)\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{A}_i) = \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{A}_i)x\mathbb{P}_{\mathrm{A}_i}([\mathrm{X}=x]) \overset{\text{FPT}}{=} \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} x\mathbb{P}([\mathrm{X}=x]).$$

Donc $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ existe.

2. Formule obtenue dans la réciproque ci-dessus...

Exercice 15

Vagues d'appels

Une secrétaire doit contacter n clients ($n \in \mathbb{N}^*$) par téléphone. Elle tente de les appeler les uns après les autres. Pour chaque client, la probabilité que l'appel téléphonique aboutisse est p ($p \in]\,0\,;\ 1[$) et est indépendante des autres clients. À l'issue des n tentatives, on note Y_1 le nombre de clients que la secrétaire a réussi à contacter.
Un peu plus tard, la secrétaire tente à nouveau d'appeler les $n-\mathrm{Y}_1$ clients non joints lors de la première vague d'appels. On suppose que la probabilité d'aboutir de chaque tentative reste égale à p et indépendante des autres, et on note Y_2 le nombre total de clients contactés au cours de ces deux vagues d'appels.
La secrétaire procède ensuite à une 3-ème vague d'appels, puis une 4-ème,... et ainsi de suite jusqu'à avoir contacté les n clients. On suppose qu'au cours de chacune des ces vagues d'appels, la probabilité d'aboutir de chaque tentative reste égale à p et indépendante des autres.
On demande l'espérance Y_k, le nombre total de clients contactés à l'issue de la k-ème vague.

1. En notant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k le nombre de tentatives fructueuses lors de la k-ème vague d'appels, déterminer la loi conditionnelle de X_{k+1} sachant $[\mathrm{Y}_k = j]$.
est binomiale de paramètres $n-j$ et p.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{k+1}) = (1-p)\mathbb{E}(\mathrm{Y}_k) + np \text{ (en convenant que } \mathrm{Y}_0 = 0).$$

3. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_k) = n - n(1-p)^k$.

4. Que vaut $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{E}(\mathrm{Y}_k)$? Commentaire ?

5. Reprendre depuis le début en raisonnant avec le variable Z_k égale au nombre de clients *non* contactés à l'issue des k premiers essais.

Solution (**Ex.15 –** *Vagues d'appels*)

1. Si $[\mathrm{Y}_k = j]$ se réalise, X_{k+1} compte le nombre de succès de probabilité p lors de $n-j$ expériences indépendantes, donc la loi conditionnelle cherchée est la loi binomiale $\mathcal{B}(n-j,p)$.

2. Il s'ensuit $\mathbb{E}(\mathrm{X}_{k+1}|\mathrm{Y}_k = j) = (n-j)p$.
Par le formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements $\big([\mathrm{Y}_k = j]\big)_{1\leqslant j\leqslant n}$,
$$\mathbb{E}(\mathrm{X}_{k+1}) = \sum_{j=1}^{n}(n-j)p\mathbb{P}([\mathrm{Y}_k = j]) \overset{\text{transfert}}{=} \mathbb{E}\big((n-\mathrm{Y}_k)p\big) \overset{\text{lin.}}{=} np - p\mathbb{E}(\mathrm{Y}_k)$$
Or $\mathrm{Y}_{k+1} = \mathrm{Y}_k + \mathrm{X}_{k+1}$, donc
$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{k+1}) \overset{\text{lin.}}{=} \mathbb{E}(\mathrm{Y}_k) + \mathbb{E}(\mathrm{X}_{k+1}) = (1-p)\mathbb{E}(\mathrm{Y}_k) + np$$
Cette relation est vraie pour $k=0$ puisque $\mathrm{Y}_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\,(n;p)$.

3. $\big(\mathbb{E}(\mathrm{Y}_k)\big)_k$ est une suite arithmético-géométrique de point fixe n. $\big(\mathbb{E}(\mathrm{Y}_k) - n\big)_k$ est géométrique de raison $1-p$, de premier terme $-n$.

4. Puisque $|1-p| < 1$, $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} n$, ce qui prouve que les efforts de la secrétaire devraient finir par être couronner de succès, et même de n succès, l'espérance fait vivre, en quelque sorte...

5. L'application de la formule de l'espérance totale donne
$$\mathbb{E}(\mathrm{Z}_{k+1}) = (1-p)\mathbb{E}(\mathrm{Z}_k)$$
d'où une suite géométrique donnant $\mathbb{E}(\mathrm{Z}_k) = n(1-p)^k$. Et $\mathrm{Y}_k = n - \mathrm{Z}_k$ induit $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_k) = n - n(1-p)^k$.

Exercice 16

Problème du collectionneur

Une collection est constituée de n images distinctes numérotées de 1 à n. Un collectionneur achète des images une à une, dans des emballages opaques. On suppose le marché suffisamment grand pour considérer que chaque achat du collectionneur est une expérience indépendante des autres, de sorte que, à chaque achat, la probabilité d'obtenir l'image numéro i de la collection est $\frac{1}{n}$.
On note :

- ☞T_n la variable aléatoire réelle égale au nombre d'achats nécessaires pour achever la collection ;
- ☞X_k le nombre d'image(s) distincte(s) acquise(s) à l'issue du k-ième achat, de sorte que, lorsqu'on commence une collection vide, $X_0 = 0$ et $X_1 = 1$;
- ☞$H_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$ le m-ième nombre harmonique ;
- ☞$R_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}$ la m-ième somme partielle de la série de Riemann $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$,
- ☞γ la *constante d'Euler* : $\gamma = \lim_{m\to+\infty} H_m - m\ln(m)$.

1. Montrer que

$$\mathbb{E}(T_n) = nH_n \text{ et } \sigma(T_n) = \sqrt{n^2R_n - nH_n}.$$

2. On admet[1] que $H_m = \ln(m) + \gamma + \frac{1}{2m} + o\left(\frac{1}{m}\right)$ et $R_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$.
Montrer que

$$\mathbb{E}(T_n) = n\ln(n) + \gamma n + \frac{1}{2} + o(1) \text{ et } \sigma(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\pi}{\sqrt{6}}.$$

Voici un aperçu des espoirs que l'on peut nourrir :

n	10	20	30	40	50	75	100	150	200
$\mathbb{E}(T_n)$	29	72	120	171	225	368	519	839	1 175
$\sigma(T_n)$	11	24	36	49	62	94	126	190	254

3. Par la formule de l'espérance totale, montrer que $\big(\mathbb{E}(X_k)\big)_k$ est une suite arithmético-géométrique et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X_k) = n - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k.$$

4. Que vaut $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}(X_k) = n$?

5. Et si l'on raisonnait sur le nombre Y_k d'images non encore obtenues à l'issue du k-ème tirage ?

Solution (**Ex.16** – *Problème du collectionneur*)

1. On note Y_k le nombre d'achat(s) nécessaire(s) pour obtenir une k-ième image distincte des autres lorsqu'on possède déjà $k-1$ images distinctes.
Alors : $T_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$.
Les Y_k suivent des lois géométriques[2] respectivement de paramètre $\frac{n-k+1}{n}$, d'espérance $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{n}{n-k+1}$ et de variance $\mathbb{V}(Y_k) = \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}$ et sont indépendantes. Par linéarité,
$\mathbb{E}(T_n) \overset{\text{lin.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = n\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = nH_n$.
Par indépendance des variables $(Y_k)_{k=1}^{n}$,

1. ... et cela devrait faire partie de notre culture mathématique...
2. Pour mémoire, rang d'obtention du premier succés dans un schéma de Bernoulli, d'espérance $1/p$ et de variance $(1-p)/p^2$ si la probabilité de succès est p.

$\mathbb{V}(\mathrm{T}_n) \overset{\text{indép.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{Y}_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{j^2} = n^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} - n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = n^2\mathrm{R}_n - n\mathrm{H}_n.$

Ainsi $\sigma(\mathrm{T}_n) = \sqrt{n^2\mathrm{R}_n - n\mathrm{H}_n}$.

2. Obtenus à partir des développements $\mathrm{H}_n = n\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\mathrm{R}_n = \frac{\pi^2}{6} + o(1)$.

s

3. En notant X_k le nombre d'images distinctes du collectionneur à l'issue du k-ième achat, j'ai, par un dénombrement immédiat :

$$\mathbb{P}_{[\mathrm{X}_k=j]}(\mathrm{X}_{k+1}=\ell) = \begin{cases} \frac{j}{n} & \text{si } \ell = j \\ \frac{n-j}{n} & \text{si } \ell = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour j dans $\mathrm{X}_k(\Omega)$, $\mathbb{E}(\mathrm{X}_{k+1}|[\mathrm{X}_k=j]) = j\frac{j}{n} + (j+1)\frac{n-j}{n} = 1 + \frac{n-1}{n}j$.

Avec le système complet $\left([\mathrm{X}_k=j]\right)_{j\in\mathrm{X}_k(\Omega)}$, la formule de l'espérance totale donne

$\mathbb{E}(\mathrm{X}_{k+1}) = \sum_{j\in\mathrm{X}_k(\Omega)} \left(1 + \frac{n-1}{n}j\right)\mathbb{P}(\mathrm{X}_k=j) \overset{\text{transfert}}{=} \mathbb{E}\left(1 + \frac{n-1}{n}\mathrm{X}_k\right) \overset{\text{lin.}}{=} 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\mathbb{E}(\mathrm{X}_k).$

Par conséquent, $(\mathbb{E}(\mathrm{X}_k))_k$ est une suite arithmético-géométrique, de point fixe n, $(\mathbb{E}(\mathrm{X}_k)-n)_k$ est géométrique de raison $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, de premier terme $\mathbb{E}(\mathrm{X}_1) - n = 1-n$.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(\mathrm{X}_k) = n - n\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$.

4. La limite (rassurante !) est n puisque $\left|1-\frac{1}{n}\right| < 1$...

5. On obtient $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{k+1}|[\mathrm{Y}_k=j]) = j\left(1-\frac{1}{n}\right)$,

puis $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{k+1}) \overset{\text{FET}}{=} \left(1-\frac{1}{n}\right)\mathbb{E}(\mathrm{Y}_k)$

d'où $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_k) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$

et on retrouve $\mathbb{E}(\mathrm{X}_k) = \mathbb{E}(n-\mathrm{Y}_k) = n - n\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$

Chapitre 7

Problème du scrutin et marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$

[CCP – 2020 – PC – Exo no3][MP-M1 – 2016 – PC-PSI –][CS-M1 – 2018 – PC – Partie IV]

Propos du « Problème du scrutin »

Deux candidats A et B s'affrontent lors d'un scrutin. À l'issue du scrutin, A a obtenu p voix et B q voix, avec $p > q$.
On suppose que tous les ordres de dépouillements sont équiprobables.
Alors la probabilité que A ait toujours été en tête lors du dépouillement est

$$\mathbb{P}_{p,q} = \frac{p-q}{p+q}.$$

Nous allons étudier deux démonstrations très différentes.

Exercice 17

Problème du scrutin par la démonstration de Joseph BERTRAND

Soit $n = p + q$ le nombre total de voix. Notons $\mathrm{D}(n, p)$ le nombre de dépouillements où A est toujours en tête, avec du coup $\mathrm{D}(n, p) = 0$ si $p \leqslant n/2$ ou si $p > n$.
On va démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$(\mathcal{H}_n): \quad \forall p \in [\![\, \lfloor n/2 \rfloor + 1 \,;\ n]\!], \quad \mathrm{D}(n,p) = \binom{n-1}{p-1} - \binom{n-1}{p}.$$

1. Montrer que : $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathrm{D}(n,p) = \mathrm{D}(n-1,p-1) + \mathrm{D}(n-1,p)$.

2. En déduire $(\mathcal{H}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que ce résultat conduit bien à

$$\mathbb{P}_{p,q} = \frac{p-q}{p+q}.$$

Solution (**Ex.17 –** *Problème du scrutin par la démonstration de Joseph* BERTRAND)

1. $\mathrm{D}(n, p)$ se décompose en deux types de dépouillements
(i) ceux qui se terminent par un bulletin du vainqueur A, et il y en a $\mathrm{D}(n-1, p-1)$ car A doit être en tête au cours du dépouillement de $n-1$ premiers bulletins,
(ii) ceux qui se terminent par un bulletin du perdant B, et il y en a $\mathrm{D}(n-1, p)$ (à l'avant dernière ouverture d'enveloppe il y avait $q-1$ bulletins du perdant sortis).
On a donc la relation $\mathrm{D}(n, p) = \mathrm{D}(n-1, p-1) + \mathrm{D}(n-1, p)$.

2. C'est parti pour la récurrence...
$\boxed{\mathrm{I}}$ Pour $n = 1$, $p \in [\![\, 1\,;\ 1]\!]$, $\mathrm{D}(1, 1) = 1 = \binom{0}{0} - \binom{0}{1}$.
Pour $n = 2$, $p \in [\![\, 2\,;\ 2]\!]$, $\mathrm{D}(2, 2) = 1 = \binom{1}{1} - \binom{1}{2}$.
$\boxed{\mathrm{H}}$ Supposons la propriété vraie pour $n \geqslant 2$.
Soit $p \in [\![\, \lfloor (n+1)/2 \rfloor + 1\,;\ n+1]\!]$, donc $p \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(n+1,p) &= \mathrm{D}(n,p-1) + \mathrm{D}(n,p)\\ &= \binom{n-1}{p-2} - \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p-1} - \binom{n-1}{p}\end{aligned}$$

y compris si $p = n+1$*...*

$$\overset{\text{Pascal}}{=} \binom{n}{p-1} - \binom{n}{p}$$

$\boxed{\text{C}}$ Donc la propriété est établie par récurrence sur n.

3. $\displaystyle\binom{n-1}{p-1} - \binom{n-1}{p} = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!q!} - \frac{(p+q-1)!}{p!(q-1)!} = \frac{(p-q)(p+q-1)!}{p!q!}$

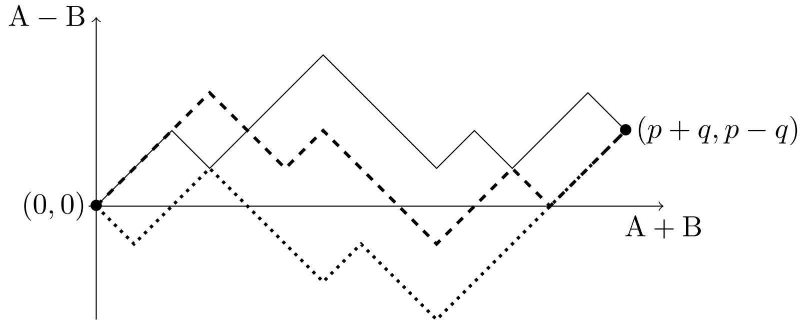
Donc $\mathrm{D}(n,p) = \dfrac{p-q}{p+q}\dbinom{p+q}{p}$.

Et comme il y a $\dbinom{p+q}{p}$ ordres de dépouillements possibles – il suffit de choisir la place des p bulletins parmi les $p+q$ bulletins –, la probabilité cherchée vaut bien $\dfrac{p-q}{p+q}$.

$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathrm{D}(n,p) = \mathrm{D}(n-1,p-1) + \mathrm{D}(n-1,p)$.

Exercice 18

Problème du scrutin par le principe de symétrie

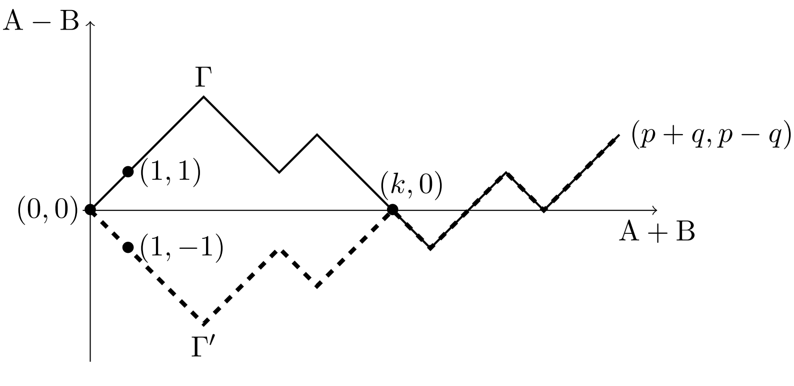


Chaque dépouillement est représenté par un chemin joignant $(0,0)$ à $(p+q, p-q)$ en suivant des déplacements du type $(1, \pm 1)$, ce qui fait $\dbinom{p+q}{p}$ chemins possibles : il faut choisir les p déplacements du type $(1,+1)$ parmi les $p+q$ déplacements.

Un chemin favorable est un chemin passant par $(1,1)$ et ne rencontrant pas l'axe des abscisses.

1. Justifier qu'il y a exactement $\dbinom{p+q-1}{p-1}$ chemins joignant $(1,1)$ à $(p+q,p)$.

2. Parmi ceci, on va dénombrer ceux qui rencontrent l'axe des abscisses par symétrie. À un tel chemin Γ qui rencontre l'axe des abscisses pour la première en $(k,0)$, on associe le chemin Γ' symétrique de Γ jusqu'à $(k,0)$ et identique à Γ au-delà.



Montrer que le nombre de chemins passant par $(1,1)$ sans rencontrer l'axe des abscisses est

$$\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}.$$

3. Conclure.

Solution (**Ex.18** – *Problème du scrutin par le principe de symétrie*)

1. Il suffit de placer les $p-1$ voix de A parmi les $p+q-1$ bulletins restants.

2. À chaque chemin Γ joignant $(1,1)$ et rencontrant l'axe des abscisses correspond un unique chemin Γ' joignant $(1,-1)$, ceci établit une bijection et il y a autant de chemins Γ que de chemin Γ', or le nombre de chemins Γ' joignant $(1,-1)$ à $(p+q,p)$ est exactement $\dbinom{p+q-1}{p}$ (placer les p voix de A parmi les $p+q-1$ bulletins restants).

Finalement, le nombre de chemins passant par $(1,1)$ sans rencontrer l'axe des abscisses est $\dbinom{p+q-1}{p-1}-\dbinom{p+q-1}{p}$.

3. Le nombre de chemins possibles est le nombre de façons de placer les p bulletins de A au cours des $p+q$ dépouillements, soit $\dbinom{p+q}{p}$.

Le nombre de chemins favorables est

$$\binom{p+q-1}{p-1}-\binom{p+q-1}{p}=\frac{(p+q-1)!}{(p-1)!q!}-\frac{(p+q-1)!}{p!(q-1)!}=\frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p}$$

Les chemins sont équiprobables, donc

$$\mathbb{P}_{p,q}=\frac{p-q}{p+q}.$$

Exercice 19

Application à une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$

On considère un mobile se déplaçant sur un axe gradué suivant le protocole :
(i) à l'instant $i=0$, le mobile est à l'abscisse 0 ;
(ii) à chaque instant $i\in\mathbb{N}^*$, le mobile se déplace d'une unité, équiprobablement dans le sens croissant ou dans le sens décroissant ;
(iii) à chaque instant, le sens du déplacement est indépendant des autres déplacements déjà effectués.

On note X_i la variable modélisant le $i-$ème déplacement et $\mathrm{S}_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$.

Soit J l'événement « le mobile ne revient jamais à l'origine du repère ».

1. a) Justifier que (X_i) sont indépendantes, de même loi à préciser.
b) Que représente S_n ?

2. Justifier que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n-1}=0)=0 \quad\text{ et }\quad \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n}=0)=\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}.$$

3. En utilisant le problème du scrutin, justifier que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall r\in[[\,1\,;\ n]]$,

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{S}_2>0,\dots,\mathrm{S}_{2n-2}>0,\mathrm{S}_{2n}=2r\big)=\frac{r}{2^{2n}n}\binom{2n}{n+r}.$$

4. À l'aide de l'identité $\dbinom{2n-1}{n+r-1}-\dbinom{2n-1}{n+r}=\dfrac{r}{n}\dbinom{2n}{n+r}$, montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{S}_2>0,\dots,\mathrm{S}_{2n}>0\big)=\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}.$$

5. En déduire que $\mathbb{P}(\mathrm{J})=0$. Commentaire ?

Solution (**Ex.19 –** *Application à une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$*)

1. L'énoncé indique que les X_i sont indépendantes avec

$$\forall i\in\mathbb{N}^*,\qquad \mathbb{P}([\mathrm{X}_i=-1])=\mathbb{P}([\mathrm{X}_i=1])=\frac{1}{2}.$$

S_n est l'abscisse du mobile à l'instant n.

2. • Soit g (reps. d) le nombre de déplacements à gauche (resp. à droite). Le nombre total de déplacements est $g+d$ et la condition *sine que non* pour être à l'origne est $g=d$, donc le nombre de déplacements $g+d=2g$ doit être pair : $[\mathrm{S}_{2n-1}=0]=\emptyset$.

Les déplacements étant équiprobables, il y a 2^n déplacements possibles, dont $\dbinom{2n}{n}$ correspondent à exactement n déplacements à gauche parmi les $2n$ déplacements (les $2n-n$ restants étant fatalement à droite).

• *À noter : en posant* D_n *le nombre de déplacements à droite (i.e. positifs), alors* $\mathrm{D}_n\hookrightarrow\mathcal{B}(n;1/2)$. *Et comme* $[\mathrm{S}_{2n}=0]=[\mathrm{D}_{2n}=n]$, *on a bien*

$$\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\mathbb{P}(D_{2n}=n)=\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}.$$

3. En appliquant le problème du scrutin pour $2n$ voix avec une différence de voix valant $2r$,

$$\mathbb{P}_{[S_{2n}=2r]}\big(S_2>0,\dots,S_{2n-2}>0\big)=\frac{2r}{2n}=\frac{r}{n}.$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}\big(S_2>0,\dots,S_{2n-2}>0,S_{2n}=2r\big)=\mathbb{P}(S_{2n}=2r)\mathbb{P}_{[S_{2n}=2r]}\big(S_2>0,\dots,S_{2n-2}>0\big)$$

$$\mathbb{P}\big(S_2>0,\dots,S_{2n-2}>0,S_{2n}=2r\big)=\frac{r}{2^{2n}n}\binom{2n}{n+r}.$$

4. En remarquant la réunion d'événements deux à deux incompatibles,

$$\big(S_2>0,\dots,S_{2n}>0\big)=\bigcup_{1\leqslant r\leqslant n}\big(S_2>0,\dots,S_{2n-2}>0,S_{2n}=2r\big)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(S_2>0,\dots,S_{2n}>0\big)&=\sum_{r=1}^{n}\mathbb{P}\big(S_2>0,\dots,S_{2n-2}>0,S_{2n}=2r\big)\\&=\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{2^{2n}n}\binom{2n}{n+r}\end{aligned}$$

Essayons d'arranger ce calcul :

$$\binom{2n-1}{n+r-1}-\binom{2n-1}{n+r}=\frac{(2n-1)!}{(n+r-1)!(n-r)!}-\frac{(2n-1)!}{(n+r)!(n-r-1)!}=$$
$$\frac{n+r}{2n}\binom{2n}{n+r}-\frac{n-r}{2n}\binom{2n}{n+r}=\frac{r}{n}\binom{2n}{n+r}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(S_2>0,\dots,S_{2n}>0\big)&=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{r=1}^{n}\binom{2n-1}{n+r-1}-\binom{2n-1}{n+r}\\&=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{r=1}^{n}\binom{2n-1}{n+r-1}-\binom{2n-1}{n+r}\\&=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{r=1}^{n}\binom{2n-1}{n+r-1}-\binom{2n-1}{n+r}\\&=\frac{1}{2^{2n}}\left(\binom{2n-1}{n}-\binom{2n-1}{2n}\right)\\&=\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\end{aligned}$$

5. Soit J_n l'événement « le mobile ne retourne pas à l'origine au cours des $2n$ premiers déplacements ». De

$$J_n=\big(S_2>0,\dots,S_{2n}>0\big)\cup\big(S_2<0,\dots,S_{2n}<0\big),$$

réunion de deux événements incompatibles, et de même probabilité par symétrie, on déduit :

$$\mathbb{P}\big(J_n\big)=2\times\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Or

$$J=\textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}J_n$$

Et la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad J_{n+1}\subset J_n,$$

car s'il n'y a pas de retour à l'origine au cours de $2n+2$ premiers déplacements, il n'y a pas eu de retour au cours des $2n$ premiers...

Par *continuité monotone de la probabilité*,

$$\mathbb{P}(J)=\mathbb{P}\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}J_n\big)=\lim_{n\to+\infty}P(J_n)=0.$$

En effet, par la formule de Stirling

$$\mathbb{P}\big(J_n\big)=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{2^{2n}\big(\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}\big)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

$\mathbb{P}(J)=0$ et il est presque-certain que le mobile reviendra à l'origine du repère au bout d'un nombre fini de déplacements.

Chapitre 8

Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ et séries entières

[CCP – 2020 – PC – Exo no3][MP-M1 – 2016 – PC-PSI –][CS-M1 – 2018 – PC – Partie IV]

Le § « Problème du scrutin et marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ » présentait une marche aléatoire équiprobable. Ici s'intéresse aux marches aléatoires non nécessairement équiprobables, en s'appuyant techniquement sur les séries entières.

Définition – Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit $p \in]\,0\,;\ 1[$ et $q = 1 - p$. On considére une suite de variables $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes toutes de lois définies par

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{X}_i(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 1) = p,\ \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = -1) = q.$$

On pose

$$\mathrm{S}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n.$$

On peut se représenter la situation par un mobile se déplaçant sur $\mathbb{Z}$, considéré comme axe gradué, situé en 0 à l'instant $i = 0$, et se déplaçant à chaque instant $i \in \mathbb{N}^*$ de $\mathrm{X}_i = \pm 1$ unité. S_n est alors l'abscisse du mobile à l'issue du $n-$ième déplacement, $\mathrm{S}_0 = 0$ caractérisant l'abscisse nulle au début de l'expérience.

On s'intéresse au premier retour à l'origine du mobile.

Bien que les X_i ne suivent pas exactement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, elles s'en rapprochent et cette observation permet de trouver sans fatigue la loi des S_n.

Exercice 20

Petite considération préliminaire, ou l'enfance de l'art

1. Donner pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de $\mathrm{Y}_i \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{\mathrm{X}_i + 1}{2}$.

2. En s'appuyant sur les Y_i, expliciter la loi de S_n.

3. Expliciter en particulier $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0)$, probabilité d'un retour en 0 à l'issue du n-ième déplacement.
Le cas n impair se médite :
(i) d'une part, $\mathrm{S}_1(\Omega) = \{-1, 1\}$, $\mathrm{S}_3(\Omega) = \{-3, -1, 1, 3\}$, etc., et $0 \notin \mathrm{S}_n(\Omega)$ si n est impair,
(ii) d'autre part, $[\mathrm{S}_n = 0]$ exige autant de déplacements « $+1$ » que de déplacements « -1 », donc un nombre pair de déplacements, donc n pair.

Solution (**Ex.20 –** *Petite considération préliminaire, ou l'enfance de l'art*)

1. $\mathrm{X}_i = -1 \iff \mathrm{Y}_i = 0$, et $\mathrm{X}_i = 1 \iff \mathrm{Y}_i = 1$, tout est dit...

2. Les (Y_i) sont indépendantes et toutes de lois $\mathcal{B}(p)$, donc par stabilité de la loi binomiale, $\Sigma_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Donc $\Sigma_n(\Omega) = [\![\,0\,;\ n]\!]$ et, $\forall k \in [\![\,0\,;\ n]\!]\,, \quad \mathbb{P}(\Sigma_n = k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Or : $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = \sum_{i=1}^{n} (2\mathrm{Y}_i - 1) = 2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i - n = 2\Sigma_n - n$.

Donc : $\mathrm{S}_n(\Omega) = \big\{2k - n | k \in \Sigma_n(\Omega)\big\} = \big\{2k - n | k \in [\![\,1\,;\ n]\!]\,\big\}$

Et : $\forall k \in [\![\,1\,;\ \mathrm{N}]\!]\,, \quad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 2k - n) = \mathbb{P}(\Sigma_n = k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

3. $2k-n=0 \iff k=n/2$, impossible si n est impair, et sinon on applique la formule précédente :

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n=0)=\begin{cases}0 & \text{si } n \textit{ impair},\\ \dbinom{n}{n/2}(pq)^{n/2} & \text{si } n \textit{ pair}.\end{cases}$$

Exercice 21

Retour à l'origine par les séries entières

On pose

$$\forall n\in\mathbb{N}, p_n=\mathbb{P}(\mathrm{S}_n=0),$$

$$f_0=0 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*, f_n=\mathbb{P}(\mathrm{S}_1\neq 0,\dots,\mathrm{S}_{n-1}\neq 0,\mathrm{S}_n=0).$$

On note les sommes de séries entières associées

$$\forall s\in\,]-1\,;\,1[\,,\quad \mathrm{P}(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_ns^n \text{ et } \mathrm{F}(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_ns^n.$$

☞ *Il ne s'agit pas pour autant de fonctions génératrices puisqu'elles ne sont pas du type* $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)s^n$. *Cependant,*

$$|p_n|\leqslant 1 \text{ et } |f_n|\leqslant 1 \text{ pour tout } n$$

assure un rayon de convergence valant au moins 1.

Montrer successivement :

1. $\forall n\geqslant 1,\quad p_n=\sum_{k=1}^{n}p_{n-k}f_k.$

2. $\forall s\in\,]-1\,;\,1[\,,\quad \mathrm{P}(s)=1+\mathrm{P}(s)\mathrm{F}(s).$

3. Or $\forall s\in\,]-1\,;\,1[\,,\quad \mathrm{P}(s)=\dfrac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}$, donc $\mathrm{F}(s)=1-\sqrt{1-4pqs^2}$.

4. La probabilité que le mobile revienne à l'origine au moins une fois vaut $1-|p-q|$. En particulier, on est presque-sûr que le mobile repasse par l'origine si, et seulement si, $p=\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire les sens de déplacement sont équiprobables[1]
Ici, on recourra à une fonction génératrice.

5. Dans le cas $p=\dfrac{1}{2}$, le temps moyen de retour à l'origine, défini comme espérance de la variable T égale à l'instant du premier retour en 0, est infini, *i.e.* donc $\mathbb{E}(\mathrm{T})$ n'existe pas au sens de notre cours[2].

Solution (**Ex.21** – *Retour à l'origine par les séries entières*)

1. *Commençons par nommer les événements sur lesquels nous allons raisonner.*
Soit pour $n\geqslant 0$, $\quad \mathrm{A}_n\overset{\text{déf.}}{=}[\mathrm{S}_n=0]$ « le mobile est en 0 à l'instant n »,
et pour $k\geqslant 1\quad \mathrm{B}_k\overset{\text{déf.}}{=}[\mathrm{S}_1\neq 0,\dots,\mathrm{S}_{k-1}\neq 0,\mathrm{S}_k=0]$ « le mobile repasse pour la première fois en 0 à l'instant k.
Soit $n\geqslant 1$. De $\mathrm{A}_n=\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n}(\mathrm{A}_n\cap\mathrm{B}_k)$ (le passage en 0 à l'instant n n'étant pas nécessairement le premier retour en 0...), on tire par incompatibilité deux à deux :

$$p_n=\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{A}_n\cap\mathrm{B}_k)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{B}_k)\mathbb{P}_{\mathrm{B}_k}(\mathrm{A}_n)$$

Or
• $\mathbb{P}(\mathrm{B}_k)=f_k$ par définition,
• $\mathbb{P}_{\mathrm{B}_k}(\mathrm{A}_n)=\mathbb{P}(\mathrm{X}_{k+1}+\mathrm{X}_{k+2}+\cdots+\mathrm{X}_n=0)=\mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-k}=0)=p_{n-k}$, car les X_i sont indépendantes et de même loi, donc la somme de $n-k$ quelconques (distinctes) d'entre elles suit la même loi que S_{n-k}.

D'où $p_n=\sum_{k=1}^{n}p_{n-k}f_k$.

2. Par le produit de Cauchy et comme $p_0=1$ et $f_0=0$,

$$\mathrm{P}(s)\mathrm{F}(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}f_k\right)s^n=\sum_{n=1}^{+\infty}p_ns^n=\mathrm{P}(s)-1$$

1. Ce cas est aussi celui étudié au §« Problème du scrutin et marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ ».
2. Lorsqu'une série à terme général positif diverge, ses sommes partielles tendent nécessairement vers $+\infty$.

$\forall s \in \,]-1\,;\,1[,\quad \mathrm{P}(s) = 1 + \mathrm{P}(s)\mathrm{F}(s).$

3. $\forall s \in \,]-1\,;\,1[,\quad \mathrm{P}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}$ et $\mathrm{F}(s) = \sqrt{1-4pqs^2}$

On sait par la propriété préliminaire que

$$p_n = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \textit{ impair} \\ \dbinom{n}{n/2}(pq)^{n/2} & \text{si } n \textit{ pair} \end{cases}$$

y compris pour $n = 0$.

Le développement en série entière de $\dfrac{1}{\sqrt{1-u}} = (1-u)^{-1/2}$est

$(1-u)^{-1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{u}{1!} + \dfrac{3}{2^2}\dfrac{u^2}{2!} + \dfrac{3\times 5}{2^3}\dfrac{u^3}{3!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$

où $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!} \times \dfrac{1}{2^n} \times \dfrac{1}{n!} = \dbinom{2n}{n}\dfrac{1}{4^n}.$

$\dfrac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (4pqs^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}(pq)^n s^{2n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k}{k/2}(pq)^{k/2}s^k$

D'où $\dfrac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}} = \mathrm{P}(s).$

Et $\mathrm{F}(s) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{P}(s)} = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}.$

4. Soit B l'événement « le mobile revient à l'origine au moins une fois ».

$\mathrm{B} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_k$, réunion d'événements deux à deux incompatibles. Par $\sigma-$additivité,

$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{B}_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k = \mathrm{F}(1) = 1 - \sqrt{1-4pq},$

or $1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2 = (p-(1-p))^2 = (p-q)^2$, donc

$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = 1 - |p-q|.$

Du coup, $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = 1 \iff p = q \iff p = \dfrac{1}{2}.$

5. Soit la variable T égale à l'instant du premier retour en 0, ce qui suppose $p = 1/2$!

En effet, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\mathrm{T} = k) = \mathbb{P}(\mathrm{B}_k) = f_k$ et

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{T}=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k = 1 - |p-q| \neq 1$ si $p \neq 1/2$, ce qui signifie que T n'est pas correctement définie si $p \neq 1/2$.

Alors F est la fonction génératrice de la variable T, et d'après le cours, T possède une espérance si, et seulement si, F est dérivable en 1.

Or, comme $p = q = 1/2$, $\mathrm{F} : s \mapsto \sqrt{1-s^2}$ n'est pas dérivable en 1^- :

$$\frac{\mathrm{F}(s)-\mathrm{F}(1)}{s-1} = \frac{\sqrt{1-s^2}}{s-1} = \frac{\sqrt{(1-s)(1+s)}}{s-1} \underset{s\to 1^-}{\sim} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1-s}} \xrightarrow[s\to 1^-]{} -\infty$$

Chapitre 9

Lemmes de Borel-Cantelli et marches aléatoires

La « limsup » et l'infiniment souvent

On se donne une suite infinie d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on cherche la probabilité que, lors de la réalisation de l'expérience aléatoire, une infinité de A_n se réalisent.

Par exemple, on lance indéfiniment une pièce de probabilité d'obtention de *pile* valant $p \in]\,0\,;\,1[$ et on cherche la probabilité d'obtenir une infinité de *piles* au cours de ces lancers. p étant strictement positive, l'intuition peut nous laisser penser qu'il est certain qu'une infinité de *piles* sortiront.

L'événement « une infinité de A_n se réalise » signifie que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'événement $\mathrm{U}_m = \bigcup_{n\geqslant m} \mathrm{A}_n$: aussi grand que soit m, l'un au moins des A_n au-delà de m *i.e.* avec $n \geqslant m$ s'est réalisé. Autrement dit, cet événement se formalise

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant m} \mathrm{A}_n.$$

Comme les événements $(\mathrm{U}_m)_{m\geqslant 0}$ forment une suite décroissante, $\bigcap_{0\leqslant m\leqslant \mathrm{M}} \mathrm{U}_m = \mathrm{U}_\mathrm{M}$ et $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{U}_m$ peut être envisagé[1] comme une limite ensembliste de (U_m).

De plus, $\mathrm{U}_m = \bigcup_{n\geqslant m} \mathrm{A}_n = \left\{\omega \in \Omega | \exists n \geqslant m, \omega \in \mathrm{A}_n\right\}$ peut être envisagé comme une borne supérieure des $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant m}$.

Aussi l'ensemble précédent est souvent appelé « *limsup* » des (A_n).

$$\limsup(\mathrm{A}_n) \overset{\text{déf.}}{=} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant m} \mathrm{A}_n.$$

Une autre notation pour cet événement est

$$\{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\} \overset{\text{déf.}}{=} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant m} \mathrm{A}_n$$

où « i.s. » signifie « infiniment souvent ».

Exercice 22

Lemmes de Borel-Cantelli

1. *Premier lemme de Borel-Cantelli*

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ converge[2].

On va montrer que

$$\mathbb{P}\big(\{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\}\big) = 0.$$

Autrement dit, on est presque-certain que seulement un nombre fini de A_n *se réalisent.*

1. Il ne s'agit pas ici de donner une définition rigoureuse des notions de *limite* et de *borne supérieure* ensembliste, mais d'expliquer l'origine du terme *limsup*.

2. Ce que de nombreux auteurs écrivent $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) < +\infty$ car il s'agit d'une série à terme général positif.

a) Soit, pour tout $m \geqslant 0$, $\mathrm{U}_m = \bigcup\limits_{n \geqslant m} \mathrm{A}_n$.

Montrer que $\lim\limits_{m \to +\infty} \mathbb{P}(\mathrm{U}_m) = 0$.

b) Conclure

2. *Second lemme de Borel-Cantelli*

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements *indépendants*.

On suppose que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ diverge[3].

On va montrer que

$$\mathbb{P}\big(\{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\}\big) = 1.$$

Autrement dit, on est presque-certain qu'une infinité de A_n *se réalisent.*

a) Décrire $\overline{\{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\}}$ à l'aide des événements $\mathrm{V}_m \overset{\text{déf.}}{=} \bigcap\limits_{n \geqslant m} \overline{\mathrm{A}_n}$ (pour tout m de $\mathbb{N}$).

b) Justifier que, pour tout m de $\mathbb{N}$ et tout $p \geqslant m$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{V}_m) \leq \prod_{n=m}^{p} \big(1 - \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\big).$$

c) Montrer que pour tout m de $\mathbb{N}$ $\prod\limits_{n=m}^{p} \big(1 - \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\big) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

d) En déduire $\mathbb{P}(\mathrm{V}_m)$ pour tout m de $\mathbb{N}$.

e) Conclure.

3. Que peut-on dire de général à propos de $\mathbb{P}(\{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\})$ lorsque les (A_n) sont indépendants ?

On parle parfois d'une loi du « zéro ou un », ou du « tout ou rien ».

Solution (**Ex.22** – *Lemmes de* Borel-Cantelli)

1. a) Puisque pour $m \geqslant 0$ $\mathrm{U}_m = \bigcup\limits_{n \geqslant m} \mathrm{A}_n$, on a : $\mathbb{P}(\mathrm{U}_m) \leqslant \sum\limits_{n=m}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$.

Comme la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ converge, $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$ en tant que reste d'une série convergente. Donc $\mathbb{P}(\mathrm{U}_m) \xrightarrow[\mathrm{M} \to +\infty]{} 0$.

b) La suite (U_m) est décroissante puisque pour tout m $\bigcup\limits_{n \geqslant m+1} \mathrm{A}_n \subset \bigcup\limits_{n \geqslant m} \mathrm{A}_n$.

Alors par continuité monotone

$$\mathbb{P}\big(\{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\}\big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m \geqslant 0} \mathrm{U}_m\right) = \lim_{m \to +\infty} \mathbb{P}(\mathrm{U}_m) = 0.$$

2. a) $\overline{\{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\}} = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \bigcap\limits_{n \geqslant m} \overline{\mathrm{A}_n} = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \mathrm{V}_m$.

b) Pour $p \geqslant m$, on a $\mathrm{V}_m \subset \bigcap\limits_{m \leqslant n \leqslant p} \overline{\mathrm{A}_n}$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{V}_m) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{m \leqslant n \leqslant p} \overline{\mathrm{A}_n}\right)$.

Comme les (A_n) sont indépendants, les $\left(\overline{\mathrm{A}_n}\right)$ le sont aussi, d'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{V}_m) \leq \prod_{n=m}^{p} \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{A}_n}\right) \leq \prod_{n=m}^{p} \big(1 - \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\big).$$

c) $\ln\left(\prod\limits_{n=m}^{p} \big(1 - \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\big)\right) = \sum\limits_{n=m}^{p} \ln\big(\big(1 - \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\big)\big) \leqslant -\sum\limits_{n=m}^{p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ en vertu de l'inégalité classique $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u > -1$.

Or par hypothèse $\sum\limits_{n=m}^{p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$, donc

$$\ln\left(\prod_{n=m}^{p} \big(1 - \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\big)\right) \xrightarrow[p \to +\infty]{} -\infty,$$

3. Ce que de nombreux auteurs écrivent $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = +\infty$ car il s'agit d'une série à terme général positif.

et finalement $\displaystyle\prod_{n=m}^{p}\bigl(1-\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\bigr) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

d) Par encadrement, on déduit de b) que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\mathrm{V}_m) = 0$.

e) Par sous-additivité, $\mathbb{P}\Bigl(\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{V}_m\Bigr) \leqslant \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{V}_m)$ donc

$$\mathbb{P}\Bigl(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{V}_m\Bigr) = 0$$

Par conséquent, $\mathbb{P}\Bigl(\overline{\{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\}}\Bigr) = 0$ et

$$\mathbb{P}(\{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\}) = 1.$$

3. Dans ce cas, l'événement $\{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\}$ est soit de probabilité 0, soit de probabilité 1, donc soit presque-impossible, soit presque-certain. Toute autre valeur pour cette probabilité est exclue.

Exercice 23

Apparition d'un motif donné

Cet exercice répond et généralise l'exemple donné en introduction.

On lance indéfiniment une pièce de probabilité d'obtention de *pile* (noté P) valant $p \in \,]\,0\,;\,1\,[$ et on choisit un motif donné par une succession de ℓ piles ou faces, où $\ell \in \mathbb{N}^*$.
Par exemple, pour $\ell = 3$, on se donne le motif P-P-F. Si les premiers lancers donnent P-F-P-P-F-F-F-P-P-F-P..., on dit que le motif est apparu deux fois au cours de 11 premiers lancers, aux rangs 3 à 5 et aux rangs 8 à 10.
Montrer que l'événement « *le motif apparaît une infinité de fois* » est presque-certain.

Solution (**Ex.23 –** *Apparition d'un motif donné*)
Notons pour tout n de $\mathbb{N}^*$ A_n l'événement « *le motif apparaît aux rangs n à $n+\ell-1$* ».
On souhaite montrer que $\{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\}$ est probabilité 1, donc utiliser le second lemme de Borel-Cantelli. Mais les $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne sont pas indépendants.
Considérons les événements A_1, $\mathrm{A}_{1+\ell}$, $\mathrm{A}_{1+2\ell}$, $\ldots$ $\mathrm{A}_{1+k\ell}$, $\ldots$. Ils sont indépendants puisque définis par des lancers distincts, et tous de probabilités $p^a(1-p)^{\ell-a}$ où a est le nombre de *piles* dans le motif choisi. Alors la série de terme général $\mathbb{P}(\mathrm{A}_{1+k\ell})$ est grossièrement divergente, et le second lemme affirme que

$$\mathbb{P}(\{\mathrm{A}_{1+k\ell} : \text{i.s.}\}) = 1.$$

Or : $\{\mathrm{A}_{1+k\ell} : \text{i.s.}\} \subset \{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\}$, donc $\mathbb{P}(\{\mathrm{A}_{1+k\ell} : \text{i.s.}\}) \leqslant \mathbb{P}(\{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\})$.
Par conséquent

$$\mathbb{P}(\{\mathrm{A}_n : \text{i.s.}\}) = 1.$$

Exercice 24

Retour en 0 d'une marche aléatoire inéquitable

Dans les § consacrés aux marches aléatoires, on a vu que si $p = 1/2$, *la probabilité d'un retour à l'origine vaut* 1, *tandis qu'elle vaut* $1-|p-q| < 1$ *sinon. Dans le cas où* $p = 1/2$, *la probabilité d'un second retour à l'origine vaut à nouveau* 1, *etc.*
Que dire lorsque $p \neq 1/2$ *?*
On reprend les notations des marches aléatoires :
① $p \in \,]\,0\,;\,1\,[\setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ et $q = 1-p$;
② $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 1) = p \qquad \text{et } \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = -1) = q.$$

③ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$, de sorte que S_n est l'abscisse du mobile à l'issue du n-ième déplacement.
Montrer que l'événement « le mobile ne revient à l'origine qu'un nombre fini de fois » est presque-certain.

Solution (**Ex.24 –** *Retour en 0 d'une marche aléatoire inéquitable*)

Soit F l'événement « le mobile ne revient à l'origine qu'un nombre fini de fois ».
Comme « le mobile revient à l'origine à l'issue du n-ième déplacement » est l'événement $[\mathrm{S}_n = 0]$, on a

$$\overline{\mathrm{F}} = \{[\mathrm{S}_n = 0] : \text{i.s.}\}.$$

Or

$$\mathbb{P}([\mathrm{S}_n = 0] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dbinom{n}{n/2} p^{n/2} q^{n/2} & \text{sinon} \end{cases}$$

puisqu'il faut exactement $n/2$ succès (déplacements positifs) et $n/2$ échecs pour revenir à l'origine, et les déplacements étant indépendants, le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p.
En notant $n = 2k$ lorsque n est pair, la formule de Stirling conduit à

$$\mathbb{P}([\mathrm{S}_{2k} = 0]) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} (4pq)^k.$$

Or $0 \leqslant 4pq \leqslant 4(p(1-p) \leqslant 4\Big(-\big(p - \frac{1}{2}\big)^2 + \frac{1}{4}\Big) \leqslant 1 - 4\big(p - \frac{1}{2}\big)^2 < 1$, donc

$$\mathbb{P}([\mathrm{S}_{2k} = 0]) = o\left((4pq)^k\right)$$

où la série géométrique de raison $4pq$ est convergente.
Par domination, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}([\mathrm{S}_{2k} = 0])$ converge, et comme pour tout k de $\mathbb{N}$ $\mathbb{P}([\mathrm{S}_{2k+1} = 0]) = 0$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}([\mathrm{S}_n = 0])$ converge.
Le premier lemme de Borel-Cantelli assure alors que

$$\mathbb{P}(\{[\mathrm{S}_n = 0] : \text{i.s.}\}) = 0.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(\mathrm{F}) = \mathbb{P}\Big(\overline{\{[\mathrm{S}_n = 0] : \text{i.s.}\}}\Big) = 1.$$

Il est presque certain que le mobile ne repassera qu'un nombre fini de fois par l'origine, certainement pour finir par s'échapper définitivement du côté le plus probable... $+\infty$ si $p > 1/2$ et $-\infty$ si $p < 1/2$...

Exercice 25

Loi forte des grands nombres

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes toutes de même loi possédant une espérance $\mathbb{E}(\mathrm{X}_i)$ nulle et admettant un moment d'ordre 4 fini noté $m_4 \overset{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}(\mathrm{X}_i^4)$. On note de plus $\sigma^2 \overset{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}(\mathrm{X}_i^2)$.

On pose $\mathrm{S}_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4) = nm_4 + 3n(n-1)\sigma^4$.

2. Justifier à l'aide de l'inégalité de Markov que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{m_4}{\varepsilon^4 n^3} + \frac{3\sigma^4}{\varepsilon^4 n^2}.$$

3. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left\{\left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon : \text{i.s.}\right\}\right) = 0$.

4. Dans cette question, on souhaite démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{S}_n}{n} = 0\right) = 1.$$

Autrement dit, on est presque-certain que $\dfrac{\mathrm{S}_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. *Ce résultat s'appelle la « loi forte des grands nombres », ici sous l'hypothèse d'existence d'un moment d'ordre 4.*

On convient d'écrire « $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{S}_n}{n} \neq 0$ » pour signifier que $\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)$ n'a pas de limite ou a une limite distincte de 0.

a) Justifier que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{S}_n}{n} \neq 0 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \exists n \geqslant \mathrm{N}, \left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right| \geqslant \frac{1}{k}$$

b) On note L l'événement $\left[\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{S}_n}{n} \neq 0\right]$.

Justifier que $\mathrm{L} \subset \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right| \geqslant \frac{1}{k} : \text{i.s.}\right\}$.

c) En déduire que $\mathbb{P}(\mathrm{L}) = 0$ et conclure.

5. *Application aux marches aléatoires inéquitables*
Soit $p \in \,]\,0\,;\; 1[\setminus\{1/2\}$, $q = 1-p$ et $(\mathrm{Y}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes prenant la valeur 1 avec une probabilité p et -1 avec une probabilité q.
On pose $\mathrm{T}_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i$.

a) En étudiant les variables $\mathrm{X}_i = \mathrm{Y}_i - p + q$, montrer que
$$\mathbb{P}\left(\mathrm{T}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n(p-q)\right) = 1.$$

b) Interpréter ce résultat pour une marche aléatoire.

Solution (**Ex.25 –** *Loi forte des grands nombres*)

1. On développe $\mathrm{S}_n^4 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} \mathrm{X}_i\mathrm{X}_j\mathrm{X}_k\mathrm{X}_l$ et par linéarité
$$\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4) = \sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} \mathbb{E}(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j\mathrm{X}_k\mathrm{X}_l).$$
Maintenant, par indépendance, on a que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j\mathrm{X}_k\mathrm{X}_l) = 0$, sauf si
• $i = j = k = l$, auquel cas on a $\mathbb{E}(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j\mathrm{X}_k\mathrm{X}_l) = \mathbb{E}((\mathrm{X}_i)^4) = m_4$,
• $i = j, j \neq k, k = l$ (et tous les cas semblables : $i = k, k \neq j, j = l$, ou $i = l, l \neq j, j = k$), auquel cas on a $\mathbb{E}(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j\mathrm{X}_k\mathrm{X}_l) = (?^2)^2 = \sigma^4$.
Au final, on a donc $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4) = nm_4 + 3n(n-1)\sigma^4$ car il y a n cas du premier type et $3n(n-1)$ cas du second type (je choisis la valeur pour le couple contenant i, soit n choix, puis celle pour l'autre couple, soit $n-1$ choix, et il y a à chaque fois 3 jeux de couples possibles).

2. Soit $\varepsilon > 0$. Par l'inégalité de Markov appliquée à $\mathrm{S}_n^4 \geqslant 0$,
$$\mathbb{P}\big(\mathrm{S}_n^4 \geqslant n^4\varepsilon^4\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4)}{n^4\varepsilon^4} \leqslant \frac{m_4}{\varepsilon^4 n^3} + \frac{3\sigma^4}{\varepsilon^4 n^2}.$$
Comme $\left[\left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right] = [|\mathrm{S}_n| \geqslant n\varepsilon] = \big[\mathrm{S}_n^4 \geqslant n^4\varepsilon^4\big]$, on a la majoration voulue.

3. Posons pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}_n \overset{\text{déf.}}{=} \left[\left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right]$.
Par la majoration précédente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ converge par majoration de terme général positif, car les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ convergent pour $\alpha \in \{2, 3\}$.
Par le premier lemme de Borel-Cantelli,
$$\mathbb{P}\left(\left\{\left[\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right] \;:\text{i.s.}\right\}\right) = \mathbb{P}(\{\mathrm{A}_n \;:\text{i.s.}\}) = 0$$

4. a) Par définition de la limite, on peut écrire
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{S}_n}{n} = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant \mathrm{N}, \left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right| < \frac{1}{k}.$$
Il n'y a qu'à nier cette proposition pour obtenir
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{S}_n}{n} \neq 0 \iff \exists k \in \mathbb{N}^*, \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \exists n \geqslant \mathrm{N}, \left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right| \geqslant \frac{1}{k}$$

b) $\exists k \in \mathbb{N}^*, \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \exists n \geqslant \mathrm{N}, \left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right| \geqslant \dfrac{1}{k}$ peut aussi s'exprimer
$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \text{ pour une infinité d'entiers } n, \text{ on a : } \left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right| \geqslant \frac{1}{k}.$$
D'où : $\mathrm{L} \subset \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right| \geqslant \frac{1}{k} \;:\text{i.s.}\right\}$.

c) La réunion étant dénombrable, par sous-additivité on a
$$\mathbb{P}(\mathrm{L}) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right| \geqslant \frac{1}{k} \;:\text{i.s.}\right\}\right).$$
Et par la question précédente où $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$, $\mathbb{P}(\mathrm{L}) \leqslant 0$, donc $\mathbb{P}(\mathrm{L}) = 0$. Donc

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{S}_n}{n}=0\right)=\mathbb{P}(\overline{\mathrm{L}})=1.$$

5. *Application aux marches aléatoires inéquitables*
Soit $p\in\,]\,0\,;\;1[\setminus\{1/2\}$, $q=1-p$ et $(\mathrm{Y}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes prenant la valeur 1 avec une probabilité p et -1 avec une probabilité q.

On pose $\mathrm{T}_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Y}_i$.

a) • Comme pour tout i $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_i)=p\times 1+q\times(-1)=p-q$, les variables X_i sont centrées, *i.e.* d'espérance nulle.
• Les X_i sont comme les Y_i indépendantes et de même loi.
• Les X_i sont finies (ne pouvant prendre que 2 valeurs), donc possède un moment d'ordre 4.
• On peut donc appliquer la loi forte précédente aux X_i :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{S}_n}{n}=0\right)=1$$

où $\mathrm{S}_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$.

• Or $\mathrm{T}_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Y}_i-p+q)=\mathrm{S}_n-n(p-q)$, donc

$$\frac{\mathrm{S}_n}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\iff\frac{\mathrm{T}_n}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}p-q\iff\mathrm{T}_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n(p-q).$$

• Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{T}_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n(p-q)\right)=1.$$

b) Quand n devient grand, on a toutes les chances de trouver le mobile au voisinage de $n(p-q)$, donc vers $+\infty$ si $p>1/2$ et $-\infty$ si $p<1/2$.

Chapitre 10

Intervalles de confiance et grandes déviations de Bernstein

C'est pas juste ! Ça fait dix fois que je lance le dé et j'ai toujours pas de 6 !

Dans ce problème, on étudie la probabilité que, dans un schéma de Bernoulli de probabilité de succès p, la fréquence des succès s'écartent sensiblement de p. Si la loi faible des grands nombres nous assure que, plus le nombre d'épreuves est « grand », moins la fréquence des succès a de chances de s'écarter de p, comment peut-on quantifier plus précisément la probabilité que cette fréquence dévie sensiblement de p ? C'est l'objet de l'estimation des grandes déviations de Serge Bernstein[1]*, estimation qui peut déboucher sur des tests statistiques d'hypothèse et des intervalles de fluctuation.*

Dans tout ce paragraphe, n désigne un entier naturel non nul, p un réel de $]\,0\,;\ 1[$ et $q \overset{\text{déf.}}{=} 1-p$ de sorte que $p+q=1$.

On réalise une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes, toutes de probabilité de succès p, et on note S_n le nombre total de succès à l'issue de ces n expériences.

Dans les applications des résultats théoriques, on s'intéressera au cas de n lancers successifs d'une pièce dont la probabilité d'obtention de « pile » est p, S_n désignant alors le nombre de « piles » obtenus au cours des n lancers.

Exercice 26

Tests d'hypothèse et intervalles de fluctuation par Bienaymé-Tchebychev

1. Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note X_i la variable indicatrice de de l'événement

« la $i-$ème épreuve est un succès ».

Vérifier que l'on peut appliquer la loi faible des grands nombres à la suite de variables (X_i) et indiquer la conclusion de cette application.

2. a) Justifier que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

b) Dans le cas $p = q = 1/2$, justifier que :

$$\mathbb{P}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n} \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n} \leqslant \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$$

et majorer cette probabilité en fonction de n et de ε.

3. *Application à un test d'hypothèse.*

a) On *suppose* qu'une pièce amène « pile » avec une probabilité $p = 1/2$. On lance 1000 fois la pièce pour tester cette hypothèse.

À l'aide de 2.a) donner un intervalle $[\,a\,;\ b]$ tel que

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_{1000} \in [\,a\,;\ b]) \geqslant 95\%.$$

On dit que $[\,a\,;\ b]$ est un *intervalle de fluctuation* de S_{1000} au *niveau de confiance* de 95%.

b) On note Σ_{1000} le nombre effectif de « piles » obtenus lors de ces 1000 lancers. On dit qu'on *accepte l'hypothèse* $p = 1/2$*, i.e. « la pièce est juste », au risque 5%* (sous-entendu “risque de se tromper”) si $\Sigma_{1000} \in [\,a\,;\ b]$.

Pour quelles valeurs de Σ_{1000} rejette-t-on l'hypothèse “$p = 1/2$” ?

4. Reprendre la question précédente avec un niveau de confiance de 99% (donc un risque de 1%).

---

1. In *Sur une modification de l'inégalité de Tchebychev*, 1924

5. Quelle majoration obtient-on en 2.a) pour $p = 1/2$, $n = 25$ et $\varepsilon = 0,1$? Et avec $n < 25$? Commentaire ?

Solution (**Ex.26** – *Tests d'hypothèse et intervalles de fluctuation par Bienaymé-Tchebychev*)

1. Les X_i sont indépendantes, toutes de loi $\mathcal{B}(p)$ donc possédant une variance, donc la loi faible des grands nombres s'applique.

L'espérance commune des X_i est p. Et comme $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$, la conclusion de la loi faible des grands nombres est :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Qualitativement, lorsque n devient grand, la probabilité que la fréquence de succès $\frac{\mathrm{S}_n}{n}$ s'éloigne de p devient très faible.

2. a) Comme $\mathrm{S}_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$, S_n possède une variance, donc $\mathrm{F}_n \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\mathrm{S}_n}{n}$ aussi. On peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à F_n, avec $\mathbb{E}(\mathrm{F}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) = p$ et $\mathbb{V}(\mathrm{F}_n) = \mathbb{V}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

b) Notons $\mathrm{E}_n = n - \mathrm{S}_n$ le nombre d'échecs. Dans le cas $p = q = 1/2$, $\mathrm{E}_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n;q)$ *i.e.* $\mathcal{B}(n;1/2)$, c'est-à-dire la même loi que S_n.

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{n}{2} + n\varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\mathrm{E}_n \geqslant \frac{n}{2} + n\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(n - \mathrm{S}_n \geqslant \frac{n}{2} + n\varepsilon\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \leqslant \frac{n}{2} - n\varepsilon\right)\end{aligned}$$

ce qui justifie

$$\mathbb{P}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n} \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n} \leqslant \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$$

Or $\left[\frac{\mathrm{S}_n}{n} \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon\right] \cup \left[\frac{\mathrm{S}_n}{n} \leqslant \frac{1}{2} - \varepsilon\right] = \left[\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right]$ avec une réunion de deux événements incompatibles.

Et par la question précédente $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$, donc

$$2\mathbb{P}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n} \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

et finalement

$$\mathbb{P}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n} \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{8n\varepsilon^2}.$$

3. *Application à un test d'hypothèse.*

a) On *suppose* qu'une pièce amène « pile » avec une probabilité $p = 1/2$. On lance 1000 fois la pièce pour tester cette hypothèse.

À l'aide de 2.a) donner un intervalle $[\,a\,;\ b]$ tel que

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_{1000} \in [\,a\,;\ b]) \geqslant 95\%.$$

On dit que $[\,a\,;\ b]$ est un *intervalle de fluctuation* de S_{1000} au *niveau de confiance* de 95%.

En passant à l'événement contraire, 2a) peut s'écrire

$$\mathbb{P}(np - n\varepsilon < \mathrm{S}_n < np + n\varepsilon) \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

i.e. avec $a = np - n\varepsilon$ et $b = np + n\varepsilon$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \in [\,a\,;\ b]) \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

On veut $1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = c$ avec $c = 95\%$:

$$1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = c \iff \varepsilon = \sqrt{\frac{pq}{n(1-c)}}.$$

Avec $n = 1000$, $p = q = 1/2$ et $c = 0,95$, on trouve $\varepsilon \simeq 0,0707$ et

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_{1000} \in [\,430\,;\ 570]) \geqslant 95\%.$$

b) Pour $\Sigma_{1000} \leqslant 429$ ou $\Sigma_{1000} \geqslant 571$, on rejette l'hypothèse que la pièce soit juste, au risque de se tromper de 5%.

4. Avec $n = 1000$, $p = q = 1/2$ et $c = 0,95$, on trouve $\varepsilon \simeq 0,158$ et

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_{1000} \in [\,342\,;\ 658]) \geqslant 99\%.$$

Pour $\Sigma_{1000} \leqslant 341$ ou $\Sigma_{1000} \geqslant 659$, on rejette l'hypothèse que la pièce soit juste, au risque de se tromper de 1%.

5. Pour $p=1/2$, $n=25$ et $\varepsilon=0,1$, $\dfrac{pq}{n\varepsilon^2}=1$ donc on majore la probabilité par 1, ce qui n'est pas fameux.
Et avec $n<25$, on majore par un nombre plus grand que 1... bof

Exercice 27

Estimation des grandes déviations, application à la fluctuation

On peut observer que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est établie pour toute variable aléatoire possédant une variance, et ne tient pas compte de la loi de la variable. Or ici nous connaissons la loi de S_n. Cette connaissance permet d'établir un résultat beaucoup plus précis, dû à Serge BERNSTEIN.
Dans tout cet exercice, ε désigne un réel tel que

$$0<\varepsilon<\min(p,q) \text{ de sorte que } 0<p\pm\varepsilon<1.$$

1. Rappeler la loi de S_n.

2. a) Soit X une variable discrète à valeurs positives possédant une espérance finie.
Justifier que $\mathbb{P}(X\geqslant 1)\leqslant \mathbb{E}(X)$.

b) Soit $t>0$. En remarquant que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\geqslant p+\varepsilon\right)=\mathbb{P}(e^{t(S_n-np-n\varepsilon)}\geqslant 1),$$

montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\geqslant p+\varepsilon\right)\leqslant e^{-n\left(t(p+\varepsilon)-\ln(q+pe^t)\right)}.$$

c) Montrer que le maximum de $f: t\mapsto t(p+\varepsilon)-\ln(q+pe^t)$ sur $\mathbb{R}_+$ vaut

$$h_+(p,\varepsilon)\overset{\text{déf.}}{=}(p+\varepsilon)\ln\frac{p+\varepsilon}{p}+(q-\varepsilon)\ln\frac{q-\varepsilon}{q},$$

et justifier que $h_+(p,\varepsilon)$ est strictement positif.

d) En déduire les inégalités suivantes, dites des grandes déviations[2] :

i – $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n}\geqslant p+\varepsilon\right)\leqslant e^{-nh_+(p,\varepsilon)}$,

ii – $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n}\leqslant p-\varepsilon\right)\leqslant e^{-nh_+(p,-\varepsilon)}$,
(on pourra chercher un argument permettant d'utiliser le résultat précédent sans refaire de calcul)

iii – $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant e^{-nh_+(p,\varepsilon)}+e^{-nh_+(p,-\varepsilon)}$,

iv – pour $p=1/2$,
$\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}-\dfrac{1}{2}\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\dfrac{2}{(1+2\varepsilon)^{(n+n\varepsilon)/2}(1-2\varepsilon)^{(n-n\varepsilon)/2}}$.
Ces inégalités montrent que la décroissance des probabilités de fortes déviations est au moins exponentielle.

3. *Application aux tests d'hypothèse et intervalles de fluctuation –*

a) Écrire en `Python` une fonction `fluctuation(n,p,c)` qui, connaissant n, p et le seuil de confiance c, calcule un intervalle de fluctuation $[a\,;\,b]$ tel que

$$\mathbb{P}\big(S_n\in[a\,;\,b]\big)\geqslant c$$

en s'appuyant sur l'inégalité de la question 2.d)iii

b) Reprendre les questions 3. et 4. du premier exercice en utilisant les inégalités des grandes déviations au lieu de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Comparer et commenter les résultats obtenus par les inégalités des grandes déviations à ceux obtenus par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Solution (**Ex.27** – *Estimation des grandes déviations, application à la fluctuation*)

1. $S_n\hookrightarrow\mathcal{B}(n;p)$.

2. a) Comme $\forall x\in X(\Omega)$, $x\geqslant 0$, on a

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}x\mathbb{P}([X=x])\geqslant\sum_{x\in X(\Omega),x\geqslant 1}x\mathbb{P}([X=x])$$
$$\geqslant\sum_{x\in X(\Omega),x\geqslant 1}\mathbb{P}([X=x])=\mathbb{P}([X\geqslant 1]).$$

2. Ou des grands écarts.

b) $\left[\dfrac{S_n}{n} \geqslant p+\varepsilon\right] = [S_n - np - n\varepsilon \geqslant 0] = [t(S_n - np - n\varepsilon) \geqslant 0]$

$= \left[e^{t(S_n-np-n\varepsilon)} \geqslant 1\right].$

Donc $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant p+\varepsilon\right) = \left[e^{t(S_n-np-n\varepsilon)} \geqslant 1\right] \leqslant \mathbb{E}\left(e^{t(S_n-np-n\varepsilon)}\right)$.

Par linéarité :

$\mathbb{E}\left(e^{t(S_n-np-n\varepsilon)}\right) = e^{-tn(p+\varepsilon)}\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right)$

Par transfert :

$\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{tk}\mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{tk}p^kq^{n-k} = (pe^t+q)^n$

On a bien :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\varepsilon\right) \leqslant e^{-n\left(t(p+\varepsilon)-\ln(q+pe^t)\right)}.$$

c) L'étude de f révèle que $f(0)=0$, $f'(0)=\varepsilon>0$ et f' s'annule uniquement au point $t_0 = \ln\dfrac{(1-p)(p+\varepsilon)}{p(1-p-\varepsilon)}$.

Le maximum de f sur $\mathbb{R}^+$ vaut $f(t_0) = (p+\varepsilon)\ln\dfrac{p+\varepsilon}{p} + (q-\varepsilon)\ln\dfrac{q-\varepsilon}{q}$.

Comme f est nulle en 0 et strictement croissante au voisinage de 0^+, ce maximum est strictement positif.

d) i – En prenant $t = t_0 > 0$ dans l'inégalité de 2.b), on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant p+\varepsilon\right) \leqslant e^{-nh_+(p,\varepsilon)},$$

ii – En appliquant l'inégalité précédente à $E_n = n - S_n$ (nombre d'échecs) de loi $\mathcal{B}(n;q)$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{E_n}{n} \geqslant q+\varepsilon\right) \leqslant e^{-nh_+(q,\varepsilon)},$$

Mais $\left[\dfrac{E_n}{n} \geqslant q+\varepsilon\right] = \left[\dfrac{n-S_n}{n} \geqslant q+\varepsilon\right] = \left[\dfrac{S_n}{n} \leqslant p-\varepsilon\right]$, et

$$h_+(q,\varepsilon) = (p+\varepsilon)\ln\frac{p+\varepsilon}{p} + (q-\varepsilon)\ln\frac{q-\varepsilon}{q} = h_+(p,-\varepsilon)$$

car $\varepsilon < \min(p,q)$. Par conséquent :

$\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \leqslant p-\varepsilon\right) \leqslant e^{-nh_+(p,-\varepsilon)}$,

iii – Comme $\left[\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right]$ est la réunion disjointe des deux événements dont on vient de calculer la probabilité, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-nh_+(p,\varepsilon)} + e^{-nh_+(p,-\varepsilon)},$$

iv – En substituant, avec $p = 1/2$, on a directement

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{2}{(1+2\varepsilon)^{(n+n\varepsilon)/2}(1-2\varepsilon)^{(n-n\varepsilon)/2}}.$$

Ces inégalités montrent que la décroissance des probabilités de fortes déviations est au moins exponentielle.

3. *Application aux tests d'hypothèse et intervalles de fluctuation –*

a) La question 2.d)iii fournit

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \left(e^{-nh_+(p,\varepsilon)} + e^{-nh_+(p,-\varepsilon)}\right),$$

$$\mathbb{P}\left(np - n\varepsilon \leqslant \frac{S_n}{n} - p \leqslant np + n\varepsilon\right) \geqslant 1 - e^{-nh_+(p,\varepsilon)} - e^{-nh_+(p,-\varepsilon)}.$$

Si on détermine ε tel que $1 - e^{-nh_+(p,\varepsilon)} - e^{-nh_+(p,-\varepsilon)} \geqslant c$, alors

$$[\,a\,;\ b] = [\,np - n\varepsilon\,;\ np + n\varepsilon]$$

convient.

On peut partir de $\varepsilon = 0$ puis faire croître ε en se donnant un pas de $\dfrac{1}{n}$, ce qui permettra d'obtenir une amplitude de l'intervalle progressant de 1 en 1, puisque l'amplitude est $2n\varepsilon$.

Proposition :

```
def hplus(p,e):
    return (p+e)*np.log((p+e)/p)+(1-p-e)*np.log((1-p-e)/(1-p))

def fluctuation(n,p,c):
```

```
    e = 0
    while (1-np.exp(-n*hplus(p,e))-np.exp(-n*hplus(p,-e))) < c:
        e +=1/(2*n)
    return n*(p-e),n*(p+e)
```

b) • Avec $n = 1000$, $p = 1/2$ et $c = 95\%$, on obtient
$$\mathbb{P}\big(457 \leqslant \mathrm{S}_{1000} \leqslant 543\big) \geqslant 95\%$$
• Avec $n = 1000$, $p = 1/2$ et $c = 99\%$, on obtient
$$\mathbb{P}\big(448,5 \leqslant \mathrm{S}_{1000} \leqslant 551,5\big) \geqslant 99\%$$
Comme S_n est à valeurs entières, on peut annoncer
$$\mathbb{P}\big(449 \leqslant \mathrm{S}_{1000} \leqslant 551\big) \geqslant 99\%$$
• On constate que les intervalles que l'on peut assurer sont nettement plus serrés que ceux fournis en utilisant uniquement l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Les inégalités de Bernstein exploitent la loi de S_n, tandis que celle de Bienaymé-Tchebychev est très générale, valable pour toute loi, donc du coup moins fine.

Chapitre 11

Estimation ponctuelle et vraisemblance de Fisher

Lorsque des raisons théoriques amènent à penser qu'une variable aléatoire suit une loi donnée, la question de la valeur du ou des paramètres de cette loi se pose immédiatement. Par exemple, lorsque je lance un dé et note X *la variable aléatoire indicatrice de l'événement « le dé amène le numéro 6 », alors* X *suit la loi de Bernoulli de paramètre p, p étant la probabilité d'obtenir « 6 » en lançant une fois le dé. Mais quelle valeur donner à p ?*

La première idée intuitive pour estimer p est de lancer un bon nombre de fois le dé, de calculer la fréquence f d'apparition du « 6 » et d'admettre que f est une estimation de p, d'autant meilleure que le nombre de lancers est grand. Évidemment, il convient de fixer le vocabulaire pour préciser ces intuitions.

Définitions –

Dans les définitions qui suivent, on fait l'hypothèse que les espérances rencontrées sont finies.

V.A.R.I.I.D. et n-échantillon

Une suite finie $(\mathrm{X}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ou infinie $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires est dite *suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées, alias v.a.r.i.i.d.* si ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la même loi. Une suite $(\mathrm{X}_1,\dots \mathrm{X}_n)$ de *v.a.r.i.i.d.* de même loi qu'une variable X s'appelle un *n-échantillon de X.*

Statistique et estimateur

On appelle *statistique* du n-échantillon $(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n)$ de X toute variable aléatoire fonction de $(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n)$. Par exemple $\mathrm{S}_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$ et $\mathrm{M}_n=\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}$ sont des statistiques. Un *estimateur* est une statistique construite dans le but de s'approcher d'un paramètre lié à la loi de X.

Qualités d'un estimateur et convergence en probabilité

Soit $\theta\in\mathbb{R}$ un paramètre.

On dit que $\mathrm{T}_n=f(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n)$ est un *estimateur sans biais* si

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{E}\left(\mathrm{T}_n\right)=\theta.$$

Si

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{T}_n\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\theta$$

on dit que T_n est un *estimateur asymptotiquement sans biais* de θ.

Le *risque quadratique* $\rho_\theta(\mathrm{T}_n)$ est l'écart quadratique moyen d'un estimateur T_n de θ est

$$\rho_\theta(\mathrm{T}_n)=\mathbb{E}\left((\mathrm{T}_n-\theta)^2\right).$$

On dit d'une suite de variables aléatoires (T_n) *converge en probabilité vers la variable aléatoire* L lorsque

$$\forall\varepsilon>0,\quad \mathbb{P}\left(|\mathrm{T}_n-\mathrm{L}|\geqslant\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$$

et on écrit

$$\mathrm{T}_n\xrightarrow{\mathbb{P}}\mathrm{L}$$

En particulier une suite de variables aléatoires (T_n) *converge en probabilité vers* θ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|\mathrm{T}_n - \theta| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Enfin, un estimateur T_n est appelé *estimateur convergent de* θ si

$$\mathrm{T}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$$

Objectif – L'objectif de l'esimation ponctuelle d'un paramètre θ est de construire des estimateurs coonvergents de θ.

On utilisera librement les résultats du premier exercice dans les suivants.

Exercice 28

Biais, risque quadratique, variance et convergence

1. Si T_n est un estimateur sans biais de θ, que peut-on dire de $\rho_\theta(\mathrm{T}_n)$.

2. On définit le *biais de l'estimateur* T_n par le nombre

$$b_\theta(\mathrm{T}_n) = \mathbb{E}\left(\mathrm{T}_n\right) - \theta.$$

Montrer que

$$\rho_\theta(\mathrm{T}_n) = b_\theta(\mathrm{T}_n)^2 + \mathbb{V}\left(\mathrm{T}_n\right).$$

3. a) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

b) À quelle condition siffissante sur le risque quadratique $\rho_\theta(\mathrm{T}_n)$ un estimateur T_n sans biais est-il convergent ?

4. a) Rappeler l'inégalité de Markov.

b) À quelle condition sur le risque quadratique $\rho_\theta(\mathrm{T}_n)$ un estimateur T_n asymptotiquement sans biais est-il convergent ?

Solution (**Ex.28** – *Biais, risque quadratique, variance et convergence*)

1. Si T_n est un estimateur sans biais de θ,
$\rho_\theta(\mathrm{T}_n) = \mathbb{E}\left((\mathrm{T}_n - \theta)^2\right) = \mathbb{E}\left((\mathrm{T}_n - \mathbb{E}\left(\mathrm{T}_n\right))^2\right) = \mathbb{V}\left(\mathrm{T}_n\right)$.

2.
$$\begin{aligned} b_\theta(\mathrm{T}_n)^2 + \mathbb{V}\left(\mathrm{T}_n\right) &= \mathbb{E}\left(\mathrm{T}_n - \theta\right)^2 + \mathbb{E}\left((\mathrm{T}_n - \mathbb{E}(\mathrm{T}_n))^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathrm{T}_n\right)^2 - 2\theta\mathbb{E}\left(\mathrm{T}_n\right) + \theta^2 + \mathbb{E}(\mathrm{T}_n^2) - 2\mathbb{E}\left(\mathrm{T}_n\right)^2 + \mathbb{E}\left(\mathrm{T}_n\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(\mathrm{T}_n^2\right) - 2\theta\mathbb{E}\left(\mathrm{T}_n\right) + \theta^2 = \mathbb{E}\left((\mathrm{T}_n - \theta)^2\right) = \rho_\theta(\mathrm{T}_n) \end{aligned}$$

3. a) Pourvu que X^2 possède une espérance finie, Bienaymé et Tchebychev prétendent que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|\mathrm{X} - \mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\mathrm{X}\right)}{\varepsilon^2}.$$

b) Dans ce cas, $\rho_\theta(\mathrm{T}_n) = \mathbb{V}\left(\mathrm{T}_n\right)$ donc il suffit que $\rho_\theta(\mathrm{T}_n)$ tende vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ pour que l'estimateur T_n soit convergent.

4. a) Pour une variable positive X possédant une espérance finie, Markov affirme que

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbb{P}\left(\mathrm{X} \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)}{\alpha}.$$

b) L'inégalité de Markov appliquée à $\mathrm{X} = (\mathrm{T}_n - \theta)^2$ et $\alpha = \varepsilon^2$ fournit

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|\mathrm{T}_n - \theta| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\rho_\theta(\mathrm{T}_n)}{\varepsilon^2}$$

donc il suffit que $\rho_\theta(\mathrm{T}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour que l'estimateur T_n soit convergent.
Comme on sait que $b_\theta(\mathrm{T}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il suffit par 2. que $\mathbb{V}\left(\mathrm{T}_n\right)$ tende vers 0.

Exercice 29

Méthode des moments : moyenne empirique

Dans cet exercice, X est une variable aléatoire et $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *v.a.r.i.i.d.* de même loi que X.
On suppose que $\mu = \mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(\mathrm{X})}$ existent et sont finies.

On note $\mathrm{M}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ la moyenne empirique du n-échantillon $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$.

1. a) Rappeler la loi faible des grands nombres.
b) Que peut-on dire de M_n en tant qu'estimateur de μ ?
c) Comment estimer la probabilité p qu'un dé amène « 6 » ?

2. Proposer un estimateur sans biais et convergent du paramètre d'une loi de Poisson.

3. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètre $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]\,0\,;\ 1[$.
a) On suppose que m est connu. Proposer un estimateur sans biais et convergent de p.
b) On suppose que p est connu. Proposer un estimateur sans biais et convergent de m.

Solution (**Ex.29** – *Méthode des moments : moyenne empirique*)
Dans cet exercice, X est une variable aléatoire et $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *v.a.r.i.i.d.* de même loi que X.
On suppose que $\mu = \mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(\mathrm{X})}$ existent et sont finies.

On note $\mathrm{M}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ la moyenne empirique du n-échantillon $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$.

1. a) La loi faible des grands nombres dit exactement

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|\mathrm{M}_n - \mu| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

b) • Par la loi faible des grands nombres, M_n est un estimateur convergent de μ.
• $\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{X}_i) = \mu$: M_n est aussi un estimateur sans biais de μ.

c) Les lancers successifs n fois de ce dé en considérant « obtenir 6 » comme succès constituent une estimation d'un n- échantillon d'une variable de Bernoulli de paramètre p. En prenant la fréquence d'apparition du chiffre 6, alias M_n, on obtient une estimation convergente de la probabilité p que le dé amène « 6 ».

2. Si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$, la moyenne empirique M_n constitue un estimateur sans biais et convergent du paramètre λ.

3. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètre $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]\,0\,;\ 1[$.
a) On suppose que m est connu. $\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) = \dfrac{1}{n} nmp = \mu = mp$ et en posant $\mathrm{P}_n = \dfrac{1}{m}\mathrm{M}_n$, $\mathbb{E}(\mathrm{P}_n) = p$ et
$\mathbb{P}(|\mathrm{P}_n - p| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\mathrm{M}_n}{m} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|\mathrm{M}_n - \mu| \geqslant m\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque $m\varepsilon > 0$.
P_n est un estimateur sans biais et convergent de p.
b) On suppose que p est connu. Un raisonnement analogue montre que $\mathrm{Q}_n = \dfrac{1}{p}\mathrm{M}_n$ est un estimateur sans biais et convergent de m.

Exercice 30

Unicité presque sûre de l'estimateur sans biais de variance minimale

On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les variables aléatoires :

$$|\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})| \leqslant \sigma(\mathrm{X})\sigma(\mathrm{Y})$$

avec égalité si, et seulement si, il existe deux constantes λ et μ telles que

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = \lambda\mathrm{Y} + \mu) = 1.$$

Soit T_n et U_n deux estimateurs sans biais de variance minimale d'un paramètre θ. Autrement dit, $\mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = \mathbb{V}(\mathrm{U}_n)$ et tout estimateur sans biais V_n de θ vérifie $\mathbb{V}(\mathrm{V}_n) \geqslant \mathbb{V}(\mathrm{T}_n)$.

En considérant $\mathrm{V}_n = \dfrac{1}{2}(\mathrm{T}_n + \mathrm{U}_n)$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{T}_n = \mathrm{U}_n\right) = 1,$$

autrement dit T_n et U_n sont presque sûrement égaux.

Solution (**Ex.30** – *Unicité presque sûre de l'estimateur sans biais de variance minimale*)
$\mathbb{V}\left(\mathrm{V}_n\right) = \dfrac{1}{4}\left(\mathbb{V}\left(\mathrm{T}_n\right) + \mathbb{V}\left(\mathrm{U}_n\right) + 2\mathrm{Cov}(\mathrm{U}_n, \mathrm{T}_n)\right) = \dfrac{1}{2}\left(\mathbb{V}\left(\mathrm{T}_n\right) + \mathrm{Cov}\left(\mathrm{U}_n, \mathrm{T}_n\right)\right)$, et de $\mathbb{V}\left(\mathrm{V}_n\right) \geqslant \mathbb{V}\left(\mathrm{T}_n\right)$ il vient

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{T}_n, \mathrm{U}_n) \geqslant \mathbb{V}\left(\mathrm{T}_n\right) = \sigma(\mathrm{T}_n)\sigma(\mathrm{U}_n)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe λ et μ tels que

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{T}_n = \lambda \mathrm{U}_n + \mu\right) = 1.$$

Alors $\mathrm{Cov}(\mathrm{T}_n, \mathrm{U}_n) = \mathrm{Cov}(\lambda \mathrm{U}_n + \mu, \mathrm{U}_n) = \lambda \mathbb{V}\left(\mathrm{U}_n\right)$ avec $\mathrm{Cov}(\mathrm{T}_n, \mathrm{U}_n) \geqslant 0$ et $\mathbb{V}\left(\mathrm{U}_n\right) \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$.
De plus $\mathbb{V}\left(\mathrm{T}_n\right) = \mathbb{V}\left(\mathrm{U}_n\right)$ donc $\lambda^2 = 1$, donc $\lambda = 1$.
Enfin $\mathbb{E}\left(\mathrm{T}_n\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{U}_n\right) = \theta$ donc $\theta = \lambda\theta + \mu$, donc $\mu = 0$.
Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{T}_n = \mathrm{U}_n\right) = 1,$$

autrement dit T_n et U_n sont presque sûrement égaux.

Exercice 31

Variance empirique et écart-type d'échantillon

Dans cet exercice, X est une variable aléatoire et $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *v.a.r.i.i.d.* de même loi que X.
On suppose que $\mu = \mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)$, $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}\left(\mathrm{X}\right)}$ et $\mu_4 = \mathbb{E}\left((\mathrm{X}-\mu)^4\right)$ existent et sont finies.
On définit les moyenne et variance empiriques respectivement par

$$\mathrm{M}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i \text{ et } \mathrm{V}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \mathrm{M}_n)^2.$$

1. a) Vérifier que $\mathrm{V}_n = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i^2\right) - \mathrm{M}_n^2$.
b) Montrer que V_n est un estimateur asympotiquement sans biais de σ^2.
c) Proposer un estimateur sans biais W_n de σ^2 proportionnel à V_n.

2. On admet que la variance de V_n vérifie

$$\mathbb{V}\left(\mathrm{V}_n\right) = \frac{(n-1)^2}{n^3}\mu_4 - \frac{(n-3)(n-1)}{n^3}\sigma^4.$$

Montrer que V_n et W_n sont des estimateurs convergents de σ^2.

3. Pour construire les estimateurs V_n et W_n, on a estimé l'espérance μ par la moyenne empirique M_n. Dans cette question, on suppose μ connue et on pose

$$\mathrm{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \mu)^2.$$

a) Montrer que T_n est un estimateur sans biais et convergent de σ^2.
b) Montrer que T_n est un estimateur de σ^2 plus efficace que W_n.

Le biais de V_n explique le choix de corriger l'écart-type estimé sur un échantillon par un facteur $\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$. Selon que l'on calcule l'écrt-type sur une population complète ou que l'on cherche à l'estimer sur un échantillon extrait d'une population - par exemple les résultats d'une expérience, on utilisera les formules

$$\sigma_{population} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$\sigma_{échantillon} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

où

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Solution (**Ex.31** – *Variance empirique et écart-type d'échantillon*)
Dans cet exercice, X est une variable aléatoire et $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *v.a.r.i.i.d.* de même loi que X.
On suppose que $\mu = \mathbb{E}(\mathrm{X})$, $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(\mathrm{X})}$ et $\mu_4 = \mathbb{E}\left((\mathrm{X}-\mu)^4\right)$ existent et sont finies.
On définit les moyenne et variance empiriques respectivement par

$$\mathrm{M}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i \text{ et } \mathrm{V}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \mathrm{M}_n)^2.$$

1. a) $\mathrm{V}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \mathrm{M}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i^2 - 2\mathrm{X}_i\mathrm{M}_n + \mathrm{M}_n^2\right)$
$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i^2 - \frac{2\mathrm{M}_n}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i + \frac{1}{n}n\mathrm{M}_n^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i^2\right) - \mathrm{M}_n^2$

b) • Par la formule de König-Huyggens,
(i) pour tout i de $[[1\,;\ n]]$, $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_i^2\right) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_i) + \mathbb{E}(\mathrm{X}_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2$;
(ii) $\mathbb{E}\left(\mathrm{M}_n^2\right) = \mathbb{V}(\mathrm{M}_n) + \mathbb{E}(\mathrm{M}_n)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$.
• Par linéarité, $\mathbb{E}(\mathrm{V}_n) = \frac{1}{n}n(\sigma^2+\mu^2) - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma^2$
Ainsi V_n est un estimateur asympotiquement sans biais de σ^2.

c) On corrige le biais de V_n grâce à la linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{W}_n = \frac{n}{n-1}\mathrm{V}_n \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2.$$

2. a) • $b_\theta(\mathrm{V}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{V}_n) - \sigma^2 = \frac{-1}{n}\sigma^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
$\mathbb{V}(\mathrm{V}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
donc par le premier exercice, V_n est un estimateur convergent de σ^2.
• W_n est sans biais,
$\mathbb{V}(\mathrm{W}_n) = \frac{n^2}{(n-1)^2}\mathbb{V}(\mathrm{V}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
donc W_n est un estimateur convergent de σ^2.

3. Pour construire les estimateurs V_n et W_n, on a estimé l'espérance μ par la moyenne empirique M_n. Dans cette question, on suppose μ connue et on pose

$$\mathrm{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \mu)^2.$$

a) $\mathrm{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i^2 - \frac{2\mu}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i^2 - 2\mu\mathrm{M}_n + \mu^2$
$\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \mathbb{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - 2\mu^2 + \mu^2 = (\sigma^2+\mu^2) - \mu^2 = \sigma^2$: T_n est sans biais.
$\mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\left((\mathrm{X}_i-\mu)^2\right) = \frac{1}{n}\mathbb{V}\left((\mathrm{X}-\mu)^2\right)$
$= \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}\left((\mathrm{X}-\mu)^4\right) - \mathbb{E}\left((\mathrm{X}-\mu)^2\right)^2\right)$
$= \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \sigma^4\right)$
Comme $\mathbb{V}(\mathrm{T}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, T_n est un estimateur convergent.

b) • T_n et W_n étant sans biais, leur risque est leur variance.

• $\rho_\theta(\mathrm{W}_n) = \dfrac{n^2}{(n-1)^2}\mathbb{V}(\mathrm{V}_n) = \dfrac{1}{n}\mu_4 - \dfrac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4$ tandis que $\rho_\theta(\mathrm{T}_n) = \dfrac{1}{n}\left(\mu_4 - \sigma^4\right)$

• $\dfrac{n-3}{n-1} < 1$ donc $-\dfrac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4 > -\dfrac{1}{n}\sigma^4$, donc $\rho_\theta(\mathrm{W}_n) > \rho_\theta(\mathrm{T}_n)$ donc lorsque l'on connaît la valeur de μ, mieux vaut utiliser cette valeur plutôt que l'estimer par M_n dans l'expression de la variance empirique.

• Effectivement, T_n est un estimateur de σ^2 plus efficace que W_n.

Exercice 32

Méthode du maximum de vraisemblance

En 1912, au moment où Ronald Aylmer Fisher rédige son premier article consacré au maximum de vraisemblance, les deux méthodes statistiques les plus utilisées sont la méthode des moindres carrés et la méthode des moments. Dans son article de 1912, il propose l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Définitions –
Fonction de vraisemblance
L'idée de Fisher est d'introduire la fonction de vraisemblance (*« likelihood » in the text...*) : supposons qu'après n expériences notre n-échantillon $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ de la variable X ait fourni n réalisations $(x_1, \ldots, x_n)$, on cherche qu'elle est la valeur du paramètre θ qui rend ces n réalisations les plus probables, c'est-à-dire qui maximise la vraisemblance définie par

$$\mathrm{L}(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_1 = x_1, \ldots, \mathrm{X}_n = x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_i = x_i\right),$$

le produit étant justifié par l'indépendance mutuelle des X_i.
Afin d'alléger les notations, on notera

$$\mathrm{L}_n(\theta) = \mathrm{L}(x_1, \ldots, x_n, \theta)$$

Estimateur du maximum de vraisemblance
S'il existe une valeur $\hat{\theta} = f_n(x_1, \ldots, x_n)$ maximisant $\mathrm{L}_n(\theta)$, alors

$$\mathrm{T}_n = f_n(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$$

est l'*estimateur du maximum de vraisemblance.*

1. a) On suppose qu'on dispose d'un n-échantillon d'une variable X suivant une loi de Poisson dont on veut estimer le paramètre λ.
Exprimer $\mathrm{L}_n(\lambda)$ à l'aide de n, λ et $x_1, \ldots, x_n$.

b) Montrer que $g_n :]0\,;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \lambda \longmapsto \ln\big(\mathrm{L}_n(\lambda)\big)$ atteint un maximum en un réel $\hat{\lambda}$ que l'on exprimera à l'aide des x_i.

c) En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ.

2. Reprendre la question précédente pour la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ dont on veut estimer le paramètre p.

Solution (**Ex.32 –** *Méthode du maximum de vraisemblance*)

1. a) $\mathrm{L}_n(\lambda) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = \mathrm{e}^{-\lambda n}\frac{\lambda^{\sum_i x_i}}{\prod_i x_i!}$

b) Montrer que $g_n :]0\,;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \lambda \longmapsto \ln\big(\mathrm{L}_n(\theta)\big)$ atteint un maximum en un réel $\hat{\lambda}$ que l'on exprimera à l'aide des x_i.
$g_n(\lambda) = -\lambda n + \left(\sum_i x_i\right)\ln(\lambda) - \ln\left(\prod_i x_i!\right)$,
$g_n'(\lambda) = -n + \dfrac{\sum_i x_i}{\lambda}$ et : $g_n'(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda < \dfrac{\sum_i x_i}{n}$: g_n atteint un maximum strict en $\lambda = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$.
Par stricte croissance de la fonction exponentielle, $\mathrm{L}_n(\lambda)$ atteint un maximum strict en ce point.

c) L'estimateur du maximum de vraisemblance de λ est $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$, le même que celui obtenu par la méthode des moments.

2. Reprendre la question précédente pour la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ dont on veut estimer le paramètre p.

$\mathrm{L}_n(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$, $g_n(p) = (\sum_i x_i)\ln(p) + (n - \sum_i x_i)\ln(1-p)$

$g_n'(p) = \dfrac{\sum_i x_i}{p} - \dfrac{n - \sum_i x_i}{1-p} = \dfrac{\sum_i x_i - np}{p(1-p)}$ donc g_n atteint un maximum strict en $p = \dfrac{\sum_i x_i}{n}$, et partant L_n atteint un maximum strict en ce point.

L'estimateur du maximum de vraisemblance de p est $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$, le même que celui obtenu par la méthode des moments.

Exercice 33

Méthode des moments vs maximum de vraisemblance

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et X une variable de loi uniforme sur l'ensemble $[\![0\,;\ m]\!]$. On souhaite estimer le paramètre m à partir d'un n-échantillon $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ de X.

1. *Méthode des moments –*

a) Que vaut $\mathbb{E}(\mathrm{X})$?

b) En déduire un estimateur M_n de m sans biais et convergent.

2. *Méthode du maximum de vraisemblance –*

a) Expliciter $\mathrm{L}_n(m)$ et montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de m est

$$\mathrm{V}_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(\mathrm{X}_i).$$

b) Justifier que $m\left(1 - \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^n\right) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{V}_n) \leqslant m$. En déduire que V_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de m.

c) Encadrer de même $\mathbb{E}\left(\mathrm{V}_n^2\right)$ et en déduire que V_n est un estimateur convergent de V_n.

3. *Comparaison de ces deux estimateurs –*

a) Montrer que $\rho_m(\mathrm{V}_n) \leqslant 3m^2\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^n$.

b) Montrer que $\rho_m(\mathrm{V}_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\rho_m(\mathrm{M}_n)\right)$, autrement dit l'estimateur du maximum de vraisemblance est infiniment plus efficace que l'estimateur issu de la méthode des moments.

Solution (**Ex.33 –** *Méthode des moments vs maximum de vraisemblance*)

1. *Méthode des moments –*

a) $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{m} k \times \dfrac{1}{m+1} = \dfrac{m}{2}$.

b) La méthode des moments indique que la moyenne empirique est un estimateur sans biais convergent de $\dfrac{m}{2}$. Prenons son double : $\mathrm{M}_n = \dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$.

Par linéarité $\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) = \dfrac{2}{n} n \dfrac{m}{2} = m$, et par indépendance des X_i,

$\mathbb{V}(\mathrm{M}_n) = \dfrac{4}{n^2} n \mathbb{V}(\mathrm{X})$, or $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \dfrac{m(m+2)}{12}$ puisque $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}^2\right) = \dfrac{m(2m+1)}{6}$.

$\mathbb{V}(\mathrm{M}_n) = \dfrac{m(m+2)}{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: M_n est un estimateur de m sans biais et convergent.

2. *Méthode du maximum de vraisemblance –*

a) $\mathrm{L}_n(m) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = x_i) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{m}\right)^n & \text{si } \forall \in [\![1\,;\ n]\!], x_i \leqslant m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc pour que $\mathrm{L}_n(m)$ soit maximale il est nécessaire que $\forall i, m \geqslant x_i$ donc que $m \geqslant \max\limits_i(x_i)$, et que m soit le plus petit possible car $m \longmapsto \left(\dfrac{1}{m}\right)^n$ est une fonction décroissante de m. Donc $\mathrm{L}_n(m)$ est maximale pour $m = \max\limits_i(x_i)$.

Ainsi l'estimateur du maximum de vraisemblance de m est $\mathrm{V}_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\mathrm{X}_i)$.

b) • $\mathbb{E}(\mathrm{V}_n) = \sum_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(\mathrm{V}_n = k) \leqslant m \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(\mathrm{V}_n = k) \leqslant m \times 1 \leqslant m$

• $\mathbb{E}(\mathrm{V}_n) = \sum_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(\mathrm{V}_n = k) \geqslant m\mathbb{P}(\mathrm{V}_n = m) \geqslant m(1 - \mathbb{P}(\mathrm{V}_n < m))$

Or $\mathbb{P}(\mathrm{V}_n < m) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} [\mathrm{X}_i < m]\right) = \big(\mathbb{P}(\mathrm{X} < m)\big)^n = \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^n$

• Ainsi $m\left(1 - \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^n\right) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{V}_n) \leqslant m$.

• Comme $m\left(1 - \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^n\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} m$, par encadrement on a :

$$\mathbb{E}(\mathrm{V}_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} m.$$

Autrement dit V_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de m.

c) • De même $\mathbb{E}(\mathrm{V}_n^2) = \sum_{k=0}^{m} k^2\mathbb{P}(\mathrm{V}_n = k)$ permet d'obtenir de façon analogue l'encadrement

$$m^2\left(1 - \left(\frac{m}{m+1}\right)^n\right) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{V}_n^2) \leqslant m^2$$

• $\mathbb{V}(\mathrm{V}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{V}_n^2) - \mathbb{E}(\mathrm{V}_n)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} m^2 - m^2 = 0$ donc V_n est un estimateur convergent de m.

3. *Comparaison de ces deux estimateurs –*

a) • Par le premier exercice : $\rho_m(\mathrm{V}_n) = b_m(\mathrm{V}_n)^2 + \mathbb{V}(\mathrm{M}_n)$

• On a immédiatement $b_m(\mathrm{V}_n)^2 = m^2\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^{2n}$

• $\mathbb{V}(\mathrm{V}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{V}_n^2) - \mathbb{E}(\mathrm{V}_n)^2$ avec

$\mathbb{E}(\mathrm{V}_n^2) \leqslant m^2$ et $\mathbb{E}(\mathrm{V}_n)^2 \geqslant m^2\left(1 - \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^n\right)^2$, donc

$\mathbb{V}(\mathrm{V}_n) \leqslant m^2\left[1 - \left(1 - \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^n\right)^2\right] \leqslant 2m^2\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^n$.

• $\rho_m(\mathrm{V}_n) \leqslant 3m^2\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^n$ puisque $\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^{2n} \leqslant \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^n$.

b) Des croissances comparées classiques $q^n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ pour $q = \dfrac{m}{m+1} \in \,]\,0\,;\,1[$, et comme $\rho_m(\mathrm{M}_n) = \mathbb{V}(\mathrm{M}_n)$ puisque V_n est sans biais, on a $\rho_m(\mathrm{V}_n) \underset{n \to +\infty}{=} o(\rho_m(\mathrm{M}_n))$, autrement dit l'estimateur du maximum de vraisemblance est infiniment plus efficace que l'estimateur issu de la méthode des moments.

Chapitre 12

Incertitude ou entropie de Shannon d'une variable aléatoire

En 1948, Claude Shannon, ingénieur en génie électrique aux Laboratoires Bell, formalisa mathématiquement la nature statistique de « l'information perdue » dans les signaux des lignes téléphoniques. Pour ce faire, il développa le concept général d'entropie de l'information, fondamental dans la théorie de l'information, ce qui lui permit d'évaluer la quantité d'information maximale qu'on pouvait transmettre dans un canal donné.

Définition – Incertitude ou entropie de Shannon Pour tout réel strictement positif x, on désigne par $\log_2(x)$ le logarithme de base 2 de x :

$$\forall x \in]\,0\,;\ +\infty[\,, \qquad \log_2(x) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

On appelle distribution de probabilités toute suite finie de nombres strictement positifs dont la somme vaut 1.

Pour tout variable aléatoire X de support $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et de de loi la distribution de probabilités $(p_1, \dots, p_n)$ (où, pour tout i de $[[\,1\,;\ n]]$, $p_i = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_i)$), on appelle *incertitude* ou *entropie*[1] de X, notée $\mathcal{H}(\mathrm{X})$, le nombre

$$\mathcal{H}(\mathrm{X}) \overset{\text{déf.}}{=} -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i).$$

On notera que $\mathcal{H}(\mathrm{X})$ dépend uniquement de la distribution de probabilités $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et non du support $\mathrm{X}(\Omega)$ de X.

Exercice 34

Quelques exemples usuels

1. a) Soit X une variable aléatoire constante. Que vaut $\mathcal{H}(\mathrm{X})$?
   b) Pour p dans $[\,0\,;\ 1]$, X_p désigne une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p.
   Étudier et représenter graphiquement la fonction $p \mapsto \mathcal{H}(\mathrm{X}_p)$.
   Justifier pour cet exemple l'appellation *"incertitude"* pour $\mathcal{H}(\mathrm{X}_p)$.
2. On suppose que X suit une loi uniforme sur un ensemble de cardinal n. Que vaut $\mathcal{H}(\mathrm{X})$?
3. Quelle est l'incertitude d'un dé amenant le numéro « 6 » avec une probabilité 1/2 et amenant chacun des autres numéros avec une probabilité 1/10 ? La comparer à l'incertitude d'un dé juste.

Solution (**Ex.34** – *Quelques exemples usuels*)

1. a) Pour X variable aléatoire constante, $n = 1$ et $p_1 = 1$. Donc $\mathcal{H}(\mathrm{X}) = -1 \times \ln(1) = 0$.
   b) Soit $f :]\,0\,;\ 1[\, \to \mathbb{R}, p \mapsto \mathcal{H}(\mathrm{X}_p)$.
   $\forall p \in]\,0\,;\ 1[$, $f(p) = -p\ln(p) - (1-p)\ln(1-p)$ et $f'(p) = \dfrac{-1}{\ln(2)}\big(\ln(p) - \ln(1-p)\big)$.
   $f'(p) > 0 \iff \ln(p) < \ln(1-p) \iff p < 1 - p \iff p < \dfrac{1}{2}$.

1. Cette dernière appellation provient de la coïncidence entre l'incertitude de Shannon introduite ici et l'entropie définie à la fin du XIX-ème siècle par Bolztmann en physique statistique.

p	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$\mathcal{H}(\mathrm{X}_p)$ est maximale lorsque $p = 1/2$, autrement dit quand les deux valeurs de X sont équiprobables, tandis qu'elle diminue lorsqu'une des deux issues devient plus probable, pour tendre vers 0 lorsqu'une des deux issues devient certaine, d'où son appelation d'incertitude.

2. On a alors : $\forall i \in [[1\,;\, n]]$, $\quad p_i = \dfrac{1}{n}$ et $\mathcal{H}(\mathrm{X}) = \log_2(n)$. Cette valeur coïncide avec celle trouvée en a) où $n = 1$, et en b) avec $n = 2$ lorsque $p = 1/2$.

3. En notant $\mathrm{X_T}$ la variable aléatoire égale au numéro donné par ce dé truqué.
$\mathcal{H}(\mathrm{X_T}) = -\dfrac{1}{2}\log_2(1/2) - 5 \times \dfrac{1}{10}\log_2(1/10) = \dfrac{1}{2}(1 + \log_2(10)) \simeq 2,16.$
L'incertitude du dé truqué est plus faible que celle d'un dé juste, celle-ci valant $\mathcal{H}(\mathrm{X}) = \log_2(6) \simeq 2,58$.

Exercice 35

Inégalité de Gibbs et encadrement de l'incertitude

1. Montrer que pour tout x de $]\,0\,;\, +\infty[$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.
Pour quelle valeur de x y a-t-il égalité ?

2. On considère deux distributions de probabilités $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(q_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Montrer que $-\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \ln\frac{q_i}{p_i} \geqslant 0$, et donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

3. En déduire l'inégalité de Gibbs :
si $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(q_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux distributions de probabilités, alors

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \leqslant -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 q_i$$

avec égalité si, et seulement si,

$$\forall i \in [[1\,;\, n]], \qquad p_i = q_i.$$

4. Montrer que, pour tout variable aléatoire X de support de cardinal n,

$$0 \leqslant \mathcal{H}(\mathrm{X}) \leqslant \log_2(n).$$

Préciser pour quelles lois les bornes 0 et $\log_2(n)$ sont atteintes.

Solution (**Ex.35** – *Inégalité de Gibbs et encadrement de l'incertitude*)

1. L'étude de la fonction $x \mapsto x - 1 - \ln(x)$ sur $]\,0\,;\, +\infty[$ montre que $\ln(x) \leqslant x - 1$ avec égalité si, et seulement si, $x = 1$. C'est aussi une inégalité due à la concavité de la fonction ln, $y = x - 1$ étant l'équation de la tangente à sa courbe en 1.

2. $\ln\dfrac{q_i}{p_i} \leqslant \dfrac{q_i}{p_i} - 1$ d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \ln\frac{q_i}{p_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n}(q_i - p_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant 1 - 1 \leqslant 0$ d'où $-\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \ln\frac{q_i}{p_i} \geqslant 0$.
Puisqu'on a sommé n inégalités, il y a égalité si, et seulement si, il y a égalités pour chacune des n inégalités, donc si, et seulement si, $\forall i \in [[1\,;\, n]]$, $\dfrac{q_i}{p_i} = 1$, *i.e.* $\forall i \in [[1\,;\, n]]$, $q_i = p_i$.

3. Il suffit d'exploiter $\ln\dfrac{q_i}{p_i} = \ln q_i - \ln p_i$ pour obtenir

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \leqslant -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 q_i$$

avec égalité si, et seulement si,

$$\forall i \in [\![1\,;\ n]\!]\,, \qquad p_i = q_i.$$

4. Soit X de distribution $(p_1, \ldots, p_n)$ et, pour tout $i \in [\![1\,;\ n]\!]$, $q_i = \dfrac{1}{n}$.

• L'inégalité de Gibbs donne :

$\mathcal{H}\,(\mathrm{X}) \leqslant -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(1/n) \leqslant \log_2(n) \sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant \log_2(n)$.

Et il y a égalité si, et seulement si, $\forall i \in [\![1\,;\ n]\!]\,, p_i = q_i = \dfrac{1}{n}$, donc si X suit une loi uniforme.

• On a $\mathcal{H}\,(\mathrm{X}) \geqslant 0$ car : $\forall i \in [\![1\,;\ n]\!]\,, p_i \log_2(p_i) \leqslant 0$.

Si $\mathcal{H}\,(\mathrm{X}) = 0$, comme $\forall i \in [\![1\,;\ n]\!]\,, p_i > 0$, on a : $\forall i \in [\![1\,;\ n]\!] \log_2(p_i) = 0$, donc $\forall i \in [\![1\,;\ n]\!]\,, p_i = 1$.

Chapitre 13

Fonction caractéristique d'une Variable Aléatoire Réelle

[CS-M2 – 2020 – PC –]

Dans toute cette partie, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Variable aléatoire à valeurs complexes –

On étend aux variables aléatoires complexes $\mathrm{Z} : \Omega \to \mathbb{C}$ les notions et propriétés liées à l'espérance en posant que Z est d'espérance finie notée $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$ si, et seulement si, $\mathcal{Re}\,(\mathrm{Z})$ et $\mathcal{Im}\,(\mathrm{Z})$ sont d'espérance finie. Et dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}(\mathrm{Z}) = \mathbb{E}(\mathcal{Re}\,(\mathrm{Z})) + i\mathbb{E}(\mathcal{Im}\,(\mathrm{Z})).$$

Il est équivalent de dire que Z possède une espérance finie si, et seulement si, la série

$$\sum_{n\geq 0} z_n \mathbb{P}([\mathrm{Z} = z_n])$$

est absolument convergente, où $\mathrm{Z}(\Omega) = \{z_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}\}$. Dans ce cas, $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$ est la somme de cette série.

On admet dans la suite que la linéarité, l'inégalité triangulaire et le théorème de transfert demeurent vrais pour les V.A. à valeurs complexes, et que si Z possède une espérance finie, alors $\overline{\mathrm{Z}}$ possède une espérance finie vérifiant

$$\mathbb{E}(\overline{\mathrm{Z}}) = \overline{\mathbb{E}(\mathrm{Z})}.$$

Dans toute la suite, l'expression *« posséder une espérance »* sous-entendra *« posséder une espérance* **finie** *»*.

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle discrète est une forme de transformée de Fourier discrète. Elle partage des propriétés analogue à la transformée. D'un autre côté, elle partage des propriétés de la fonction génératrice, mais est plus générale car la fonction génératrice n'est définie que pour les variables dont le support est inclus dans $\mathbb{N}$.

Exercice 36

Définition et exemples

Soit $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète. On appelle **fonction caractéristique de X**, notée ϕ_{X}, la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_{\mathrm{X}}(t) \overset{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{it\mathrm{X}}\big).$$

1. a) Justifier que ϕ_{X} est effectivement définie sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, proposer une écriture sommatoire de $\phi_{\mathrm{X}}(t)$.
b) Montrer que ϕ_{X} est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, et préciser $||\phi_{\mathrm{X}}||_\infty$.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b$. Exprimer ϕ_{Y} à l'aide de ϕ_{X}, a et b.

3. Lorsque $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$, quel lien existe-t-il en ϕ_{X} et la fonction génératrice $\mathcal{G}_{\mathrm{X}}$ de X ?

4. Soit $p \in \,]\,0\,;\ 1\,[$ et $q = 1 - p$.
a) On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ et que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Déterminer ϕ_{X}.
b) On suppose que X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer ϕ_{X}.

5. Soit $\lambda \in \,]\,0\,;\ +\infty[$. On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer ϕ_{X}.

Solution (**Ex.36** – *Définition et exemples*)

1. a) Soit $t \in \mathbb{R}$.
• Si $X(\Omega)$ est fini, écrivons $X(\Omega) = \{x_n, n \in [[1\,;\ N]]\}$.
Alors $(e^{itX})(\Omega) = \{e^{itx_n}, n \in [[1\,;\ N]]\}$ est fini, donc e^{itX} possède une espérance. Donc $\phi_X(t)$ existe.
Et par le théorème de transfert, $\phi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} e^{itx_n}\mathbb{P}([X = x_n])$.
• Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, écrivons $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|e^{itx_n}\mathbb{P}([X = x_n])\right| \leqslant \mathbb{P}([X = x_n])$.
Or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}([X = x_n])$ converge (et sa somme vaut 1).
Donc par comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{itx_n}\mathbb{P}([X = x_n])$ est absolument convergente, donc par le théorème de transfert, e^{itX} possède une espérance, donc $\phi_X(t)$ est défini.
• Dans les deux cas,

$$\phi_X(t) = \sum_{x\in X(\Omega)} e^{itx}\mathbb{P}([X = x]).$$

b) • Avec les notations précédentes, lorsque $X(\Omega)$ est fini, ϕ_X est la somme des N fonctions continues $t \mapsto \mathbb{P}([X = x_n])e^{itx_n}$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$ donc ϕ_X est continue.
• Toujours avec les notations précédentes, lorsque $X(\Omega)$ est infini dénombrable, ϕ_X est la somme de la série de fonctions continues

$$f_n : t \mapsto \mathbb{P}([X = x_n])e^{itx_n},$$

chacune bornée sur $\mathbb{R}$. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||f_n||_\infty \leqslant \mathbb{P}([X = x_n])$$

Donc cette série de fonctions converge normalement, donc uniformément, et comme chacune est continue, ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$.
• Par l'inégalité triangulaire,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\phi_X(t)| \leqslant \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x])$$

donc $||\phi_X||_\infty \leqslant 1$.
De plus, $\phi_X(0) = \mathbb{E}(1) = 1$, donc $||\phi_X||_\infty = 1$.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E}\big(e^{it(aX+b)}\big) \overset{\text{lin.}}{=} e^{itb}\mathbb{E}\big(e^{itaX}\big) = e^{itb}\phi_X(at).$$

3. Comme pour $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| \leqslant 1$, $\mathcal{G}_X(u) = \mathbb{E}(u^X)$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) = \mathcal{G}_X\big(e^{it}\big).$$

4. a) En s'appuyant sur $\mathcal{G}_X$ (au programme !) ou en calculant la somme par la formule du binôme, $\phi_X : t \mapsto \big(q + pe^{it}\big)^n$.
b) De même, lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $\phi_X : t \mapsto \dfrac{p}{1 - qe^{it}}$.

5. Et pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $\phi_X : t \mapsto \exp\big(\lambda(e^{it} - 1)\big)$.

Exercice 37

Périodicité et support

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète de support $X(\Omega)$ dénombrable : $X(\Omega) = \big\{x_n, n \in \mathbb{N}\big\}$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}([X = x_n])$. *On n'exclut pas qu'il puisse exister $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = 0$, auquel cas l'événement $[X = x_n]$ est presque-impossible.*

1. On suppose que $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{Z}$. Montrer que ϕ_{X} est périodique.
Dans la suite, pour tous réels a et b, on note $a + b\mathbb{Z}$ l'ensemble
$$a + b\mathbb{Z} \overset{\text{déf.}}{=} \{a + bk,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\phi_{\mathrm{X}}(t_0)| = 1$.

a) Montrer qu'il existe un réel a tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathrm{e}^{i(t_0 x_n - t_0 a)} = 1$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \big(1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)\big) = 0$.

c) Montrer finalement que $\mathbb{P}\left(\mathrm{X} \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$.

3. On suppose qu'il existe $(a, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que $\mathbb{P}\left(\mathrm{X} \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$.
Calculer $\phi_{\mathrm{X}}(t_0)$ et en déduire $|\phi_{\mathrm{X}}(t_0)| = 1$.

Solution (**Ex.37 –** *Périodicité et support*)

1. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{Z}$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}$,
$$\phi_{\mathrm{X}}(t + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathrm{e}^{i(t+2\pi)x_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathrm{e}^{itx_n} \mathrm{e}^{i2\pi x_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathrm{e}^{itx_n} = \phi_{\mathrm{X}}(t)$$
ϕ_{X} est 2π-périodique.
Remarque : les trois exemples de la fin de l'exercice précédent était de ce type-là.

2. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\phi_{\mathrm{X}}(t_0)| = 1$.

a) Pour tout réel a,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathrm{e}^{i(t_0 x_n - t_0 a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathrm{e}^{it_0 x_n} \mathrm{e}^{-it_0 a} = \phi_{\mathrm{X}}(t_0)\mathrm{e}^{-it_0 a}.$$
Comme $|\phi_{\mathrm{X}}(t_0)| = 1$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_{\mathrm{X}}(t_0) = \mathrm{e}^{i\alpha}$. En prenant $a = \alpha/t_0$, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathrm{e}^{i(t_0 x_n - t_0 a)} = \mathrm{e}^{i(\alpha - t_0 a)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

b) On a alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathrm{e}^{i(t_0 x_n - t_0 a)} = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \big(1 - \mathrm{e}^{i(t_0 x_n - t_0 a)}\big) = 0$. . Prenons la partie réelle des deux membres :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \big(1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)\big) = 0.$$

c) La somme précédente de termes tous positifs est nulle, donc tous les termes sont nuls.
Soit n tel que $p_n \neq 0$. Alors $\cos(t_0 x_n - t_0 a) = 1$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t_0 x_n - t_0 a = 2k\pi$, *i.e.* $x_n = a + \dfrac{2k\pi}{t_0}$.
Donc $x_n \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$.
Ainsi $x_n \notin a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$ entraîne $p_n = 0$. Alors :
$$\mathbb{P}\left(\mathrm{X} \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = \sum_{n \text{ t.q. } x_n \notin a + 2\pi/t_0\mathbb{Z}} p_n = \sum_{n \text{ t.q. } x_n \notin a + 2\pi/t_0\mathbb{Z}} 0 = 0.$$
Et : $\mathbb{P}\left(\mathrm{X} \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1 - 0 = 1$.

3. $\mathbb{P}\left(\mathrm{X} \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$ entraîne que si $x_n \notin a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$, alors $p_n = 0$.
$$\phi_{\mathrm{X}}(t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathrm{e}^{it_0 x_n} = \underbrace{\sum_{n \text{ t.q. } x_n \notin a + 2\pi/t_0\mathbb{Z}} p_n \mathrm{e}^{it_0 x_n}}_{=0 \text{ car } p_n = 0} + \sum_{n \text{ t.q. } x_n \in a + 2\pi/t_0\mathbb{Z}} p_n \underbrace{\mathrm{e}^{it_0 x_n}}_{=\mathrm{e}^{it_0 a}}$$

$$\phi_X(t_0) = e^{it_0a}\left(\sum_{n \text{ t.q. } x_n \in a+2\pi/t_0\mathbb{Z}} p_n\right) = e^{it_0a}\mathbb{P}\left(X \in a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = e^{it_0a}.$$

Et par conséquent : $|\phi_X(t_0)| = 1$.

Exercice 38

Développement en série entière de ϕ_X

1. Dans cette question, on suppose que X est une variable aléatoire réelle discrète de support $X(\Omega)$ fini

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in [[1\,;\, N]]\}.$$

On pose pour tout $n \in [[1\,;\, N]]$, $p_n = \mathbb{P}([X = x_n])$.

a) Justifier que ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_X^{(n)}(0) = i^n\mathbb{E}(X^n).$$

b) Montrer que ϕ_X est développable en série entière de rayon infini et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n).$$

2. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète de support $X(\Omega)$ dénombrable : $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}([X = x_n])$.

On suppose de plus que X admet un moment d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe une constante réel R telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(|X|^n) = \mathcal{O}\left(\frac{n^n}{R^n}\right).$$

a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\left|e^{iy} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(iy)^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

b) En majorant $\left|\phi_X(t) - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n)\right|$, montrer que

$$\forall t \in \left[-\frac{R}{e}\,;\, \frac{R}{e}\right], \quad \phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n).$$

c) En déduire la classe de dérivabilité de ϕ_X sur $[-R/e\,;\, R/e]$, et exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $\mathbb{E}(X^n)$ à l'aide des dérivées de ϕ_X.

Solution (**Ex.38 –** *Développement en série entière de ϕ_X*)

1. a) • $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{iXt}) \overset{\text{transfert}}{=} \sum_{k=1}^{N} p_k e^{ix_kt}$, donc ϕ_X est la somme de N fonctions exponentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

• $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{N} p_k(ix_k)^n e^{ix_kt}$ donc

$$\phi_X^{(n)}(0) = i^n\sum_{k=1}^{N} p_k x_k^n = i^n\mathbb{E}(X^n).$$

b) Développons en série entière les exponentielles : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=1}^{N}\left(p_k\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix_kt)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(it)^n}{n!}\sum_{k=1}^{N}p_kx_k^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n)$$

par linéarité des sommes finies de séries convergentes.

Donc ϕ_X est développable en série entière de rayon infini et

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n\mathbb{E}(X)}{n!}t^n.$$

Bien évidemment, on retrouve la série de Taylor puisque $a_n = \dfrac{\phi_X^{(n)}(0)}{n!}$.

2. a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\left|\mathrm{e}^{iy}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(iy)^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Il s'agit de l'INÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE que l'on démontre à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{R}$. $f:t\mapsto\exp(it)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. Par la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^{iy}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(iy)^k}{k!}\right| &\overset{\text{F.T.R.I.}}{=}\left|\int_0^y\frac{(y-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right|\\ &\overset{\text{I.T.}}{\leqslant}\left|\int_0^y\left|\frac{(y-t)^n}{n!}i^{n+1}\mathrm{e}^{it}\right|\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant\left|\frac{1}{n!}\int_0^y|y-t|^n\,\mathrm{d}t\right|\\ &\overset{u=y-t}{\leqslant}\left|\frac{1}{n!}\int_0^y|u|^n\,\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_0^y|u|^n\,\mathrm{d}t=\pm\frac{y^{n+1}}{(n+1)!}$.

Donc $\displaystyle\left|\mathrm{e}^{iy}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(iy)^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}$

b) Soit $t\in\left[-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{e}}\,;\,\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{e}}\right]$ et $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\left|\phi_{\mathrm{X}}(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}(\mathrm{X}^k)\right| &\overset{\text{lin.}}{=}\left|\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{i\mathrm{X}t}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}\mathrm{X}^k\right)\right|\\ &\overset{\text{I.T}}{\leqslant}\mathbb{E}\left(\left|\mathrm{e}^{i\mathrm{X}t}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}\mathrm{X}^k\right|\right)\\ &\overset{a)}{\leqslant}\mathbb{E}\left(\frac{|t\mathrm{X}|^{n+1}}{(n+1)!}\right)\\ &\overset{\text{lin.}}{\leqslant}|t|^{n+1}\,\mathbb{E}\left(\frac{|t\mathrm{X}|^{n+1}}{(n+1)!}\right)\end{aligned}$$

Or $|t|^{n+1}\,\mathbb{E}\big(\frac{|t\mathrm{X}|^{n+1}}{(n+1)!}\big)=\mathcal{O}\left(\frac{|t|^{n+1}\,(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\mathrm{R}^{n+1}}\right)$, et par l'équivalent de Stirling, on a :

$$\frac{|t|^n\,n^n}{n!\mathrm{R}^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{|t|^n\times n^n}{\sqrt{2\pi n}\times n^n/\mathrm{e}^n\times\mathrm{R}^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{|t|\,e}{\mathrm{R}}\right)^n\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Or : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\frac{t\mathrm{e}}{\mathrm{R}}\right|^n\leqslant 1$ car $|t|\leqslant\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{e}}$, donc $\left(\frac{|t|\,e}{\mathrm{R}}\right)^n\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

$|t|^{n+1}\,\mathbb{E}\big(\frac{|t\mathrm{X}|^{n+1}}{(n+1)!}\big)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, et par encadrement, on a bien :

$$\phi_{\mathrm{X}}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(\mathrm{X}^n).$$

c) Puisque ϕ_{X} est développable en série entière de rayon non nul, ϕ_{X} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\mathrm{R}/\mathrm{e}\,;\,\mathrm{R}/\mathrm{e}]$.

Par la formule de Taylor, les coefficients de la série entière sont $\frac{\varphi_{\mathrm{X}}^{(n)}(0)}{n!}$, d'où par unicité de ces coefficients,

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\mathbb{E}\big(\mathrm{X}^n\big)=i^n\varphi_{\mathrm{X}}^{(n)}(0).$$

Exercice 39

Caractérisation de la loi par ϕ_{X}

Soit X une variable aléatoire et $m\in\mathbb{R}$.

Pour tout $\mathrm{T} \in]0\,;\,+\infty[$, on pose $\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \dfrac{1}{2\mathrm{T}} \displaystyle\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \phi_{\mathrm{X}}(t) \mathrm{e}^{-imt} \mathrm{d}t$.

1. *sinus cardinal*

On définit la fonction « *sinus cardinal* » noté sinc par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que sinc est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $||\operatorname{sinc}||_\infty = 1$.

2. Dans cette question, on suppose que X est une variable aléatoire réelle discrète de support $\mathrm{X}(\Omega)$ fini

$$\mathrm{X}(\Omega) = \{x_n, n \in [[1\,;\,\mathrm{N}]]\}.$$

On pose pour tout $n \in [[1\,;\,\mathrm{N}]]$, $p_n = \mathbb{P}([\mathrm{X} = x_n])$.

a) Montrer que, pour tout $\mathrm{T} \in]0\,;\,+\infty[$,

$$\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \operatorname{sinc}\big(\mathrm{T}(x_n - m)\big) p_n.$$

b) En déduire que $\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} \mathbb{P}(\mathrm{X} = m)$.

3. Soit $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète de support $\mathrm{X}(\Omega)$ dénombrable : $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}([\mathrm{X} = x_n])$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $h \in]0\,;\,+\infty[$, on pose

$$g_n(h) = \operatorname{sinc}\left(\frac{x_n - m}{h}\right) p_n.$$

a) Montrer que pour tout $\mathrm{T} \in]0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n se prolonge en une fonction $\tilde{g}_n$ définie et continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

c) Montrer que la fonction $\mathrm{G} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n$ est définie et continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

d) Établir que $\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} \mathbb{P}(\mathrm{X} = m)$.

4. Montrer que si $\mathrm{X}, \mathrm{Y} : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires telles que $\phi_{\mathrm{X}} = \phi_{\mathrm{Y}}$, alors X et Y suivent la même loi.

Solution (**Ex.39** – *Caractérisation de la loi par* ϕ_{X})

1. a) • Sur $\mathbb{R}^*$, sinc est un quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc est continue.

• $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $\operatorname{sinc}(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1 = \operatorname{sinc}(0)$ donc sinc est aussi continue en 0.

b) • Notons que sinc est paire.

• $\forall t \geqslant 1, |\operatorname{sinc}(t)| \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant 1$ donc $||\operatorname{sinc}||_{\infty,[1\,;\,+\infty[} \leqslant 1$.

• sinc est dérivable que $]0\,;\,1]$ avec

$$\operatorname{sinc}'(t) = \frac{\cos(t)t - \sin(t)}{t^2}.$$

Or $\forall t \in]0\,;\,1], \quad \cos(t)t \leqslant \sin(t) \iff \tan(t) \geqslant t$

L'étude de $f : t \mapsto \tan(t) - t$ sur $]0\,;\,1]$ montre que f est croissante ($f' = \tan^2 \geqslant 0$) et nulle en 0, donc f est positive sur $[0\,;\,1[$.

Donc sinc' est négative sur $]0\,;\,1]$, sinc étant continue sur $[0\,;\,1]$, son maximum est $\operatorname{sinc}(0) = 1$ et son minimum $\operatorname{sinc}(1) = \sin(1) > 0$. Donc $||\operatorname{sinc}||_{\infty,[0\,;\,1]} = 1$.

• Bilan : $||\operatorname{sinc}||_{\infty,[0\,;\,+\infty[} = 1$, et par parité $||\operatorname{sinc}||_\infty = 1$.

2. a) Soit $\mathrm{T} \in]0\,;\,+\infty[$.

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_m(\mathrm{T}) &= \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \phi_{\mathrm{X}}(t) \mathrm{e}^{-imt} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} p_n \mathrm{e}^{itx_n} \mathrm{e}^{-imt} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(p_n \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{it(x_n - m)} \mathrm{d}t \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(p_n \frac{1}{2\mathrm{T}} \left[\frac{\mathrm{e}^{i\mathrm{T}(x_n - m)} - \mathrm{e}^{-i\mathrm{T}(x_n - m)}}{x_n - m} \right]_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \right) \end{aligned}$$

• Si $x_n \neq m$, alors

$$\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{it(x_n-m)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{T}}\left[\frac{\mathrm{e}^{it(x_n-m)}}{x_n-m}\right]_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2\mathrm{T}}\left[\frac{\mathrm{e}^{i\mathrm{T}(x_n-m)}-\mathrm{e}^{-i\mathrm{T}(x_n-m)}}{x_n-m}\right]_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}$$

$$\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{it(x_n-m)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{T}}\left[\frac{\mathrm{e}^{i\mathrm{T}(x_n-m)}-\mathrm{e}^{-i\mathrm{T}(x_n-m)}}{x_n-m}\right]_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} = \mathrm{sinc}\big(\mathrm{T}(x_n-m)\big)$$

• Si $x_n = m$, alors

$$\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{it(x_n-m)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} 1\mathrm{d}t = 1 = \mathrm{sinc}(0) = \sin\big(\mathrm{T}(x_n-m)\big)$$

• Finalement, on a bien

$$\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{sinc}\big(\mathrm{T}(x_n-m)\big)p_n.$$

b) • Observons que, si $x_n \neq m$,
$\left|\mathrm{sinc}\big(\mathrm{T}(x_n-m)\big)\right| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{T}\,|x_n-m|}$ et $\dfrac{1}{\mathrm{T}\,|x_n-m|} \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} 0$,
donc par encadrement $\mathrm{sinc}\big(\mathrm{T}(x_n-m)\big) \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} 0$.

• Premier cas : si $m \notin \mathrm{X}(\Omega)$.
Alors : $\forall n \in [\![1\,;\,\mathrm{N}]\!]$, $\quad \mathrm{sinc}\big(\mathrm{T}(x_n-m)\big) \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} 0$.
Donc $\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} 0$, or dans ce cas, $\mathbb{P}(\mathrm{X}=m)=0$.
Donc $\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} \mathbb{P}(\mathrm{X}=m)$.

• Second cas : si $m \in \mathrm{X}(\Omega)$. Notons i tel que $m = x_i$.
$\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \displaystyle\sum_{n\ tq\ x_n\neq m} \mathrm{sinc}\big(\mathrm{T}(x_n-m)\big)p_n + 1\times p_i \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} p_i = \mathrm{P}(\mathrm{X}=m)$
Donc $\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} \mathbb{P}(\mathrm{X}=m)$.

3. a) Soit $\mathrm{T} \in \,]\,0\,;\,+\infty[$.

$$\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \phi_{\mathrm{X}}(t)\mathrm{e}^{-imt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}\sum_{n=1}^{+\infty} p_n\mathrm{e}^{itx_n}\mathrm{e}^{-imt}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}\sum_{n=1}^{+\infty} p_n\mathrm{e}^{it(x_n-m)}\mathrm{d}t$$

Nous avons : $\left|\left|t\mapsto p_n\mathrm{e}^{it(x_n-m)}\right|\right|_{\infty,[-\mathrm{T}\,;\,\mathrm{T}]} = p_n$ car $\left|\mathrm{e}^{i\alpha}\right| = 1$ ($\forall\alpha\in\mathbb{R}$).

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ converge (et sa somme est 1).

Donc la convergence de série de fonctions $t\mapsto p_n\mathrm{e}^{it(x_n-m)}$ est normale donc uniforme sur le segment $[-\mathrm{T}\,;\,\mathrm{T}]$. On peut donc permuter intégration et sommation :

$$\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(p_n\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{it(x_n-m)}\mathrm{d}t\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n\mathrm{sinc}\big(\mathrm{T}(x_n-m)\big)$$

D'où

$$\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right).$$

b) • Si $x_n = m$, alors $\forall h \in \,]\,0\,;\,+\infty[\,, g_n(h) = \mathrm{sinc}(0)p_n = p_n$ donc g_n admet une limite finie en 0, à savoir p_n.
• Si $x_n \neq m$, alors comme $\mathrm{sinc}(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ car $|\mathrm{sinc}(x)| \leqslant 1/\,|x|$, $g_n(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.
• Par conséquent, g_n admet une limite finie en 0 donc se prolonge en fonction continue sur $[\,0\,;\,+\infty[$.

c) Comme $||\mathrm{sinc}||_\infty = 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\quad ||\tilde{g}_n||_\infty \leqslant p_n$ (il y a même égalité car $\displaystyle\lim_{h\to+\infty}\tilde{g}_n(h) = p_n$).

Et comme la série de t.g. p_n converge, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\tilde{g}_n$ converge normalement donc uniformément, donc G est définie, et comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\tilde{g}_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, G est continue par convergence uniforme.

d) • On a : $\forall\mathrm{T}>0, \mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = \mathrm{G}(1/\mathrm{T})$ et G est continue en 0 donc $\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} \mathrm{G}(0)$.

- $G(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n(0)$, et l'étude menée en b) montre que $\tilde{g}_n(0) = p_n$ si $x_n = m$ et 0 sinon.
  Donc s'il existe un entier n tel que $x_n = m$, alors $G(0) = p_n = \mathbb{P}(X = m)$, et sinon $G(0) = 0 = \mathbb{P}(X = m)$.
  Finalement, on a bien $V_m(T) \xrightarrow[T\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = m)$.

4. Supposons que $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires telles que $\phi_X = \phi_Y$.
Soit $m \in \mathbb{R}$.
$V_m^X(T) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \phi_X(t)e^{-imt}dt \xrightarrow[T\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = m)$ et
$V_m^Y(T) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \phi_Y(t)e^{-imt}dt \xrightarrow[T\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = m)$.
Comme $\phi_X = \phi_Y$, on a aussi : $\forall T > 0, \quad V_m^X(T) = V_m^Y(T)$.
Donc par unicité de la limite, $\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}(Y = m)$.
Ceci étant valable pour tout m de $\mathbb{R}$, X et Y suivent la même loi.

Exercice 40

Indépendance et stabilités

Dans cet exercice, on utilise l'exercice précédent ainsi que le premier exercice de cette partie.

1. Montrer que, si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\phi_{X+Y} = \phi_X\phi_Y$.

2. a) En déduire que si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre respectif λ et μ, alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

b) Montrer de même si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires indépendantes de loi binomiale de paramètre respectif (m, p) et (n, p), alors $X + Y$ suit une loi de binomiale de paramètre $(m + n, p)$.

Solution (**Ex.40** – *Indépendance et stabilités*)

1. Puisque X et Y sont indépendantes, pour tout $t \in \mathbb{R}$ e^{itX} et e^{itY} sont indépendantes, donc $\mathbb{E}(e^{itX}e^{itY}) = \mathbb{E}(e^{itX})\mathbb{E}(e^{itY})$.
Par conséquent $\mathbb{E}(e^{it(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{itX})\mathbb{E}(e^{itY})$. Ainsi $\phi_{X+Y} = \phi_X\phi_Y$.

2. a) On a :
$$\phi_{X+Y} = \phi_X\phi_Y : t \mapsto \exp\big(\lambda(e^{it} - 1)\big)\exp\big(\mu(e^{it} - 1)\big) = \exp\big((\lambda + \mu)(e^{it} - 1)\big)$$
Or $t \mapsto \exp\big((\lambda + \mu)(e^{it} - 1)\big)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
Par la conclusion de l'exercice précédent, $X + Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

b) Montrer de même si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires indépendantes de loi binomiale de paramètres respectifs (m, p) et (n, p), alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $(m + n, p)$.
On a, avec $q = 1 - p$,
$$\phi_{X+Y} = \phi_X\phi_Y : t \mapsto \big(q + pe^{it}\big)^m\big(q + pe^{it}\big)^n = \big(q + pe^{it}\big)^{m+n}$$
Or $t \mapsto \big(q+pe^{it}\big)^{m+n}$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètre $(m+n, p)$.
Par la conclusion de l'exercice précédent, $X + Y$ suit la loi binomiale de paramètre $(m + n, p)$.

Chapitre 14

Triangle de Pascal, binôme de Newton & formule de Leibniz

Ces deux démonstrations sont semblables, et repose sur la formule de Pascal et un raisonnement par récurrence naturel puisque

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \text{ et } (f.g)^{(n+1)} = \left((f.g)^{(n)}\right)'.$$

Exercice 41

Formule de Pascal, binôme de Newton & formule de Leibniz

Justifier les propriétés suivantes.

① $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \quad$ (Pascal).

② $\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \text{(Newton)}.$$

Cette formule est encore valable pour deux matrices X *et* Y *qui commutent.*

③ Soit $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ deux fonctions n fois dérivables. Alors

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \text{(Leibniz)}.$$

④ Relicat : symétrie du triangle de Pascal.
$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$,

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}.$$

Solution (**Ex.41** – *Formule de Pascal, binôme de Newton & formule de Leibniz*)

① *Une démonstration instructive...*

Soit $\mathrm{E} = [\![1\,;\ n+1]\!]$. Parmi les parties à $p+1$ éléments de E, il y en a :

- $\binom{n}{p}$ qui contiennent le nombre $n+1$, car il faut et il suffit de choisir les p nombres de $[\![1\,;\ n]\!]$ pour créer une telle partie ;
- $\binom{n}{p+1}$ qui ne contiennent pas le nombre $n+1$, car il faut et il suffit de choisir les $p+1$ nombres de $[\![1\,;\ n]\!]$ pour créer une telle partie.

Donc $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

... et si les calculs vous rassurent...

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} \\
&= \frac{(p+1)n! + (n-p)n!}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!} = \binom{n+1}{p+1}.
\end{aligned}$$

② $\boxed{\text{I}}$ $1=1$.

$\boxed{\text{H}}$ *Petit regroupement de sommes :*

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1}\\
&\overset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^j y^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} + y^{n+1}\\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]x^k y^{n+1-k} + y^{n+1}\\
&\overset{\text{Pascal}}{=} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k} + y^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

③ *À vous de jouer...*

④ *Une démonstration instructive...*

Il y a autant de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments que de parties à $n-p$ éléments : à chaque partie à p éléments correspond exactement une partie à $n-p$ éléments, à savoir son complémentaire.

Plus rigoureusement, l'application

$$\varphi : \mathrm{E}_p \to \mathrm{E}_{n-p}, \mathrm{A} \mapsto \mathrm{E}\setminus\mathrm{A}$$

de l'ensemble des parties à p éléments dans l'ensemble des parties à $n-p$ éléments est une bijection, donc $\mathcal{C}ard(\mathrm{E}_p) = \mathcal{C}ard(\mathrm{E}_{n-p})$.

... et si les calculs vous rassurent...

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Chapitre 15

Autour des formules de Taylor

[MP-M2 – 2018 – PSI – Partie I]

Exercice 42

Formule de Taylor-Laplace et cas des polynômes

1. *Formule de Taylor avec reste intégral ou Taylor-Laplace*
Soit $\mathrm{V} \subset \mathbb{R}$ un voisinage de 0 *i.e.* un ouvert contenant 0. Soit $f : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Montrer que

$$\forall x \in \mathrm{V}, \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Par translation, on en déduit pour toute fonction f *de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *sur un voisinage* V *de* $a \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathrm{V}, \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

2. *Cas des polynômes*
Soit P un polynôme de degré n. Justifier que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(a) + \mathrm{P}'(a)(\mathrm{X}-a) + \cdots + \frac{\mathrm{P}^{(n)}(a)}{n!}(\mathrm{X}-a)^n$$

... ce qui constitue un excellent moyen de translater un polynôme :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+a) = \mathrm{P}(a) + \mathrm{P}'(a)\mathrm{X} + \cdots + \frac{\mathrm{P}^{(n)}(a)}{n!}\mathrm{X}^n.$$

Solution (**Ex.42** – *Formule de Taylor-Laplace et cas des polynômes*)

1. *Il s'agit d'une simple intégration par parties, en raisonnant par récurrence.*
$\boxed{\mathrm{I}}$ $\displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0)$ d'où $\displaystyle f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$.
$\boxed{\mathrm{H}}$ Intéressons-nous à l'intégrale $\displaystyle \mathrm{I}_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$.
Avec $u : t \mapsto -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v = f^{(n+1)}$ $\mathcal{C}^1$,

$$\mathrm{I}_n \overset{\mathrm{IPP}}{=} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{I}_n = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \mathrm{I}_{n+1} \ldots \quad \mathcal{C}qfd.$$

2. Le reste intégral est nul car $\mathrm{P}^{(n+1)} = 0$...

Exercice 43

Approximations numériques des dérivées

Justifier les propriétés suivantes.

1. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un segment $[\,a\,;\ b]$.
Soit $t \in [\,a\,;\ b]$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $t+h \in [\,a\,;\ b]$. Alors
$$\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h} - f'(t)\right| \leqslant \frac{\left|\left|f^{(2)}\right|\right|_\infty}{2}\,|h|.$$

2. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur un segment $[\,a\,;\ b]$.
Soit $t \in [\,a\,;\ b]$ et $h \geqslant 0$ tel que $[\,t-h\,;\ t+h] \subset [\,a\,;\ b]$.
$$\left|\frac{f(t+h)-f(t-h)}{2h} - f'(t)\right| \leqslant \frac{\left|\left|f^{(3)}\right|\right|_\infty}{3}h^2.$$

Commentaire –

$f'(t) \simeq \dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ est une approximation avec une erreur en $\mathrm{O}(h)$, tandis que
$f'(t) \simeq \dfrac{f(t+h)-f(t-h)}{2h}$ est une approximation bien meilleure car avec une erreur en $\mathrm{O}(h^2)$.
Ce qui permet, notamment en informatique, d'estimer f' lorsqu'on connaît f en certains points uniquement.
Si je souhaite estimer la dérivée d'une fonction connaissant sa valeur en des points $x_i = a + ih,\ i \in [[\,0\,;\ \mathrm{N}]]$, je peux procéder ainsi
(i) $f'(x_i) \simeq \dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h}$ ou $f'(x_i) \simeq \dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}$, méthode d'ordre 1,
(ii) $f'(x_i) \simeq \dfrac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}$, méthode d'ordre 2.

Solution (**Ex.43** – *Approximations numériques des dérivées*)

1. f'' est continue sur le segment $[\,a\,;\ b]$ donc bornée donc $\left|\left|f^{(2)}\right|\right|_\infty$ existe.

Pour tout x de $[\,a\,;\ b]$ tel que $x+h \in [\,a\,;\ b]$, on a :
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \int_x^{x+h} \frac{(t-x)^1}{1!} f^{(2)}(t)\mathrm{d}t$$
d'où $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{h}\left|\displaystyle\int_x^{x+h} (t-x)f^{(2)}(t)\mathrm{d}t\right|,$
$$\text{Or : } \left|\int_x^{x+h} (t-x)f^{(2)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{x+h} \left|(t-x)f^{(2)}(t)\right|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \left|\left|f^{(2)}\right|\right|_\infty \int_x^{x+h} (t-x)\mathrm{d}t$$
Et $\displaystyle\int_x^{x+h} (t-x)\mathrm{d}t = \frac{h^2}{2}$, donc $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| \leqslant \left|\left|f^{(2)}\right|\right|_\infty \dfrac{|h|}{2}.$

2. $f^{(3)}$ est continue sur le segment $[\,a\,;\ b]$ donc bornée.
La formule de Taylor à l'ordre 2 donne :
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \int_x^{x+h} \frac{(t-x)^2}{2!} f^{(3)}(t)\mathrm{d}t,$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \int_x^{x-h} \frac{(t-x)^2}{2!} f^{(3)}(t)\mathrm{d}t.$$
La différence des deux expressions précédentes donne :
$$\left|\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - f'(h)\right| \leqslant \frac{1}{2h}\left|\int_{x-h}^{x+h} \frac{(t-x)^2}{2!} f^{(3)}(t)\mathrm{d}t\right|.$$
Il n'y plus qu'à majorer l'intégrale :
$$\left|\int_{x-h}^{x+h} \frac{(t-x)^2}{2!} f^{(3)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x-h}^{x+h} \left|\frac{(t-x)^2}{2!} f^{(3)}(t)\right|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \frac{\left|\left|f^{(3)}\right|\right|_\infty}{2}\left[\frac{(t-x)^3}{3}\right]_{x-h}^{x+h} \leqslant \frac{\left|\left|f^{(3)}\right|\right|_\infty}{3}h^3$$

Exercice 44

Théorème et inégalité de TAYLOR-LAGRANGE

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[\,a\,;\ b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]\,a\,;\ b[$.
On souhaite prouver le théorème de Taylor-Lagrange :
« $\exists c \in \,]\,a\,;\ b[\,,\quad f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$ »

a) Justifier que ce théorème est vérifié pour $n = 0$.

b) Soit A le réel tel que

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{A} = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Soit $\varphi : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$t \mapsto \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{A} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t).$$

Justifier que φ' s'annule au moins une fois sur $]\,a\,;\ b[$.

c) Conclure.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[\,a\,;\ b]$.
Justifier l'inégalité de Taylor-Lagrange :
« $\left| f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left|\left| f^{(n+1)} \right|\right|_{\infty,[\,a\,;\,b]}.$ »

3. Les résultats précédents demeurent-ils vrais avec $b < a$, en remplaçant $[\,a\,;\ b]$ et $]\,a\,;\ b[$ par $[\,b\,;\ a]$ et $]\,b\,;\ a[$ respectivement ?

4. Établir l'inégalité de Taylor-Lagrange en partant de la formule de Taylor avec reste intégral (qui est au programme).

Solution (**Ex.44** – *Théorème et inégalité de* TAYLOR-LAGRANGE)

1. a) Pour $n = 0$, il s'agit du théorème des accroissements finis :
« $\exists c \in \,]\,a\,;\ b[\,,\quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$ *i.e.* $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$ »

b) • $\varphi(a) = f(b)$,
• $\varphi(b) = f(b)$ (car $0^0 = 1$ et $f^{(0)} = f$),
• la régularité de f entraîne que φ est continue sur $[\,a\,;\ b]$ et dérivable sur $]\,a\,;\ b[$.
Donc d'après le théorème de Rolle, φ' s'annule au moins une fois sur $]\,a\,;\ b[$.

c) $\forall t \in \,]\,a\,;\ b[\,,$

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -\frac{(b-t)^n}{n!}\mathrm{A} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) \\
&= -\frac{(b-t)^n}{n!}\mathrm{A} + \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \\
&= -\frac{(b-t)^n}{n!}\left(\mathrm{A} - f^{(n+1)}(t)\right)
\end{aligned}$$

Soit $c \in \,]\,a\,;\ b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ (qui existe d'après b)).
Alors $b - c \neq 0$ et $f^{(n+1)}(c) = \mathrm{A}$.
Donc : $\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ et on a prouvé que

$$\exists c \in \,]\,a\,;\ b[\,,\quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

2. Notons que la continuité de $f^{(n+1)}$ sur le segment $[\,a\,;\ b]$ assure l'existence de $\left|\left| f^{(n+1)} \right|\right|_{\infty,[\,a\,;\,b]}$.
Par le théorème de Taylor-Lagrange,

$$\exists c \in \,]\,a\,;\ b[\,,\quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Donc

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|=\left|\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\right|.$$

Et comme $b-a>0$ et $\left|f^{(n+1)}(c)\right|\leqslant \left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_{\infty,[\,a\,;\,b]}$, on obtient l'inégalité souhaitée.

3. Les résultats précédents demeurent-ils vrais avec $b<a$, en remplaçant $[\,a\,;\,b]$ et $]\,a\,;\,b[$ par $[\,b\,;\,a]$ et $]\,b\,;\,a[$ respectivement ? • La preuve du théorème de Taylor-Lagrange n'utilise pas l'hypothèse $a<b$, donc il demeure vrai pour $b<a$, avec les modifications des intervalles indiquées.
• Dans l'inégalité de Taylor-Lagrange, si $b<a$ alors $|b-a|=a-b$. On peut en toute généralité donner l'inégalité suivante :
« Si $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, alors

$$\forall(a,b)\in\mathrm{I}^2,\qquad \left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|\leqslant\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_{\infty,[\,a\,;\,b]}.\text{»}$$

4. Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[\,a\,;\,b]$ ou $[\,b\,;\,a]$. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)=\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Et par l'inégalité triangulaire, en prenant garde à l'ordre des bornes,

• si $a<b$: $\left|\displaystyle\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\dfrac{\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_{\infty,[\,a\,;\,b]}}{n!}\displaystyle\int_a^b(b-t)^n\mathrm{d}t$

• si $a>b$: $\left|\displaystyle\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\dfrac{\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_{\infty,[\,a\,;\,b]}}{n!}\displaystyle\int_b^a(t-b)^n\mathrm{d}t$

Dans les deux cas, on obtient

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|\leqslant\frac{\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_{\infty,[\,a\,;\,b]}}{n!}\times\frac{|b-a|^{n+1}}{n+1}\text{...}\mathcal{C}qfd.$$

Exercice 45

Inégalités de KOLMOGOROV

On pourra utiliser librement l'inégalité de Taylor-Lagrange établie dans l'exercice précédent.

1. *Acte I –*
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose f et f'' bornées sur $\mathbb{R}$ et on note, pour toute fonction g bornée sur $\mathbb{R}$, $||g||_\infty$ la borne supérieure de $|g|$ sur $\mathbb{R}$.

a) Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h>0$. Justifier que

$$\left|f(x+h)-f(x-h)-2hf'(x)\right|\leqslant h^2\,||f''||_\infty.$$

b) En déduire que f' est bornée et vérifie

$$||f'||_\infty\leqslant\frac{h\,||f''||_\infty}{2}+\frac{||f||_\infty}{h}.$$

c) Montrer finalement que

$$||f'||_\infty\leqslant\sqrt{2\,||f||_\infty\,||f''||_\infty}.$$

2. *Acte II –*
Soit $n\geqslant 2$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose f et $f^{(n)}$ bornée sur $\mathbb{R}$.

a) Soit V la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{V}\overset{\text{déf.}}{=}\begin{pmatrix}1&1&\dots&1\\2&2^2&\dots&2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n-1&(n-1)^2&\dots&(n-1)^{n-1}\end{pmatrix}$$

Justifier que V est inversible.

b) On munit $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ des normes $||.||_\infty$ définies par

$$\forall\mathrm{M}=(m_{i,j})\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}),\quad ||\mathrm{M}||_\infty=\max_{i,j}|m_{i,j}|\quad\text{et}$$

$$\forall\mathrm{X}=(x_i)\in\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}),\quad ||\mathrm{X}||_\infty=\max_{i}|m_i|.$$

Montrer que, pour $(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})^2$ et $\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$,

$$||\mathrm{MN}||_\infty \leqslant (n-1)\,||\mathrm{M}||_\infty\,||\mathrm{N}||_\infty \quad \text{et} \quad ||\mathrm{MX}||_\infty \leqslant (n-1)\,||\mathrm{M}||_\infty\,||\mathrm{X}||_\infty.$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On note $\mathrm{X}(x)$ la colonne de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées les réels $\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[\,x\,;\ x+i]$ pour $i \in [[\,1\,;\ n-1]]$, montrer que

$$||\mathrm{VX}(x)||_\infty \leqslant \mathrm{K}$$

où $\mathrm{K} \overset{\text{déf.}}{=} 2\,||f||_\infty + \dfrac{n^n\,||f^{(n)}||_\infty}{n!}$.

d) En déduire finalement que les dérivées f', $f^{(2)}$, ..., $f^{(n-1)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

e) Démontrer l'inégalité de Kolmogorov

$$\forall k \in [[\,0\,;\ n]]\,, \quad \left|\left|f^{(k)}\right|\right|_\infty \leqslant \sqrt{2^{k(n-k)}}\,||f||_\infty^{1-\frac{k}{n}}\,\left|\left|f^{(n)}\right|\right|_\infty^{\frac{k}{n}}.$$

Solution (**Ex.45 –** *Inégalités de* Kolmogorov)

1. *Acte I -*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose f et f'' bornées sur $\mathbb{R}$ et on note, pour toute fonction g bornée sur $\mathbb{R}$, $||g||_\infty$ la borne supérieure de $|g|$ sur $\mathbb{R}$.

a) Par l'inégalité de Taylor-Lagrange

$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \dfrac{h^2\,||f''||_\infty}{2}$

$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \dfrac{h^2\,||f''||_\infty}{2}$

ce qui permet d'écrire par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}&\big|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)\big|\\ &\quad = \big|f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \big(f(x-h) - f(x) + hf'(x)\big)\big|\\ &\quad \leqslant \frac{h^2\,||f''||_\infty}{2} + \frac{h^2\,||f''||_\infty}{2} \text{...}\mathcal{C}\mathit{qfd}.\end{aligned}$$

b) On peut alors écrire

$$\begin{aligned}|2hf'(x)| &= \big|\big(2hf'(x) - f(x+h) + f(x-h)\big) + f(x+h) - f(x-h)\big|\\ &\leqslant h^2\,||f''||_\infty + |f(x+h)| + |f(x-h)|\\ &\leqslant h^2\,||f''||_\infty + 2\,||f||_\infty\end{aligned}$$

D'où

$$|f'(x)| \leqslant \frac{h\,||f''||_\infty}{2} + \frac{||f||_\infty}{h}.$$

Cette majoration est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f' est bornée et

$$||f'||_\infty \leqslant \frac{h\,||f''||_\infty}{2} + \frac{||f||_\infty}{h}.$$

c) Soit $g :]\,0\,;\ +\infty[\to \mathbb{R}, h \mapsto \dfrac{h\,||f''||_\infty}{2} + \dfrac{||f||_\infty}{h}$.

g est dérivable avec $g' : h \mapsto \dfrac{||f''||_\infty}{2} - \dfrac{||f||_\infty}{h^2}$, strictement croissante et s'annulant en $h_0 = \sqrt{\dfrac{2\,||f||_\infty}{||f''||_\infty}}$.

$g(h_0) = \sqrt{2\,||f||_\infty\,||f''||_\infty}$, donc en prenant $h = h_0$ dans l'inégalité précédente, on a finalement

$$||f'||_\infty \leqslant \sqrt{2\,||f||_\infty\,||f''||_\infty}.$$

2. Soit $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose f et $f^{(n)}$ bornée sur $\mathbb{R}$.

a) V est une matrice de Vandermonde associée aux nombres deux à deux distincts $1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, donc de déterminant non nul.

Donc V est inversible.

$$\mathrm{V} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2^2 & \ldots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & (n-1)^2 & \ldots & (n-1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

b) • $\forall (i,j) \in [\![1\,;\ n-1]\!]^2$,
$\left|(\mathrm{MN})_{i,j}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} m_{i,k} n_{k,j}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |m_{i,k} n_{k,j}| \leqslant (n-1)\,||\mathrm{M}||_\infty\,||\mathrm{N}||_\infty$
• $\forall i \in [\![1\,;\ n-1]\!]$,
$\left|(\mathrm{MX})_{i}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} m_{i,k} x_{k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |m_{i,k} x_{k}| \leqslant (n-1)\,||\mathrm{M}||_\infty\,||\mathrm{X}||_\infty$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$.
Soit $i \in [\![1\,;\ n-1]\!]$.
Par l'inégalité de Taylor-Lagrange
$\left|f(x+i) - f(x) - if'(x) - \cdots - \dfrac{i^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)\right| \leqslant \dfrac{i^n}{n!}\left|\left|f^{(n)}\right|\right|_\infty,$
et par l'inégalité triangulaire
$\left|if'(x) + \cdots + \dfrac{i^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)\right| \leqslant 2\,||f||_\infty + \dfrac{i^n}{n!}\left|\left|f^{(n)}\right|\right|_\infty$, donc

$$\left|if'(x) + \cdots + \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)\right| \leqslant 2\,||f||_\infty + \frac{n^n}{n!}\left|\left|f^{(n)}\right|\right|_\infty$$

Or $if'(x) + \cdots + \dfrac{i^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$ est la $i-$ème coordonnées de $\mathrm{WX}(x)$, donc

$$||\mathrm{VX}(x)||_\infty \leqslant \mathrm{K}$$

où $\mathrm{K} \overset{\text{déf.}}{=} 2\,||f||_\infty + \dfrac{n^n\left|\left|f^{(n)}\right|\right|_\infty}{n!}$.

d) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$||\mathrm{X}(x)||_\infty = \left|\left|\mathrm{V}^{-1}\mathrm{VX}(x)\right|\right|_\infty$
$\leqslant (n-1)\left|\left|\mathrm{V}^{-1}\right|\right|_\infty ||\mathrm{VX}(x)||_\infty \leqslant (n-1)\left|\left|\mathrm{V}^{-1}\right|\right|_\infty \mathrm{K}$
D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in [\![1\,;\ n-1]\!]\,, \quad \left|\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\right| \leqslant (n-1)\left|\left|\mathrm{V}^{-1}\right|\right|_\infty \mathrm{K},$$

ce qui prouve que les dérivées f', $f^{(2)}$, ..., $f^{(n-1)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

e) Montrons par récurrence forte que $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités de Kolmogorov

$$(\mathcal{I}_n)\ :\ \forall k \in [\![0\,;\ n]\!]\,, \quad \left|\left|f^{(k)}\right|\right|_\infty \leqslant \sqrt{2^{k(n-k)}}\,||f||_\infty^{1-\frac{k}{n}} \left|\left|f^{(n)}\right|\right|_\infty^{\frac{k}{n}}.$$

• Pour $n=1$, les inégalités sont triviales, et sont en fait des égalités pour $k=0$ et $k=1$: $||f||_\infty = ||f||_\infty$ et $||f'||_\infty = ||f'||_\infty$.
• Même si le raisonnement par récurrence n'oblige pas à envisager séparément le cas $n=2$, je remarque que les cas $k=0$ et $k=2$ sont des égalités triviales et le cas $k=1$ a été établi dans la première question.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons les inégalités de Kolmogorov $(\mathcal{I}_j)$ établies pour tout $j \in [\![1\,;\ n]\!]$.
Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ avec f et $f^{(n+1)}$ bornées sur $\mathbb{R}$.
Pour $k=0$ ou $k=n+1$, les inégalités de Kolmogorov sont vraies, et sont toujours des égalités.
Soit $j \in [\![1\,;\ n]\!]$.
En appliquant $(\mathcal{I}_2)$ avec $k=1$ à $f^{(j-1)}$, on a :

$$\left|\left|f^{(j)}\right|\right|_\infty^2 \leqslant 2\left|\left|f^{(j-1)}\right|\right|_\infty \left|\left|f^{(j+1)}\right|\right|_\infty$$

Par hypothèse de récurrence pour j et $k=j-1$, on a :

$$\left|\left|f^{(j-1)}\right|\right|_\infty \leqslant \sqrt{2^{j-1}}\,||f||_\infty^{\frac{1}{j}} \left|\left|f^{(j)}\right|\right|_\infty^{1-\frac{1}{j}}$$

Utilisons les hypothèses de récurrence pour faire apparaître $||f||_\infty$ et $\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty$ dans le majorant.
Par hypothèse de récurrence pour $n+1-j$ et $k=1$, sur $f^{(j)}$, on a :

$$\left|\left|f^{(j+1)}\right|\right|_\infty \leqslant \sqrt{2^{n-j}}\left|\left|f^{(j)}\right|\right|_\infty^{\frac{n-j}{n+1-j}} \left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty^{\frac{1}{n+1-j}}$$

Du coup :

$$\left|\left|f^{(j)}\right|\right|_\infty^2 \leqslant \sqrt{2^{n+1}}\,||f||^{\frac{1}{j}} \left|\left|f^{(j)}\right|\right|_\infty^{\frac{j-1}{j}+\frac{n-j}{n+1-j}} \left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty^{\frac{1}{n+1-j}}$$

Or $\dfrac{j-1}{j} + \dfrac{n-j}{n+1-j} = 2 - \dfrac{n+1}{j(n+1-j)}$, donc :

$$\left|\left|f^{(j)}\right|\right|_\infty^{\frac{n+1}{j(n+1-j)}} \leqslant \sqrt{2^{n+1}}\,||f||^{\frac{1}{j}} \left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty^{\frac{1}{n+1-j}}$$

Et en élevant à la puissance $\dfrac{j(n+1-j)}{n+1}$, on about à

$$\left|\left|f^{(j)}\right|\right|_\infty \leqslant \sqrt{2^{j(n+1-j)}}\,||f||^{1-\frac{j}{n+1}}\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty^{\frac{j}{n+1}}$$

... *Cqfd*.

Chapitre 16

Développements de sommes et de restes

Exercice 46

Constante γ d'Euler

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \qquad \text{et} \qquad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$?

2. En déduire l'existence $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

3. *Un encadrement de γ*

a) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \dfrac{1}{n}$.

b) En déduire la variation de (u_n).

c) En déduire aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 1 - \ln(2)$.

d) Montrer finalement que : $1 - \ln(2) \leqslant \gamma < 1$.

Solution (**Ex.46 –** *Constante γ d'Euler*)

1. $v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

$v_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{-1}{n(n+1)} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Comme $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, par domination $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

2. Comme $\sum_{n\geq 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge, la suite (u_n) converge.

En notant γ sa limite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma\right) = 0 = o(1)$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

3. a) •*Méthode accroissements finis –*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\ln : [\,n\,;\; n+1] \to \mathbb{R}$ est continue, et dérivable sur $]\,n\,;\; n+1[$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in\,]\,n\,;\; n+1[$ tel que $\ln(n+1) - \ln(n) = f'(c) = \dfrac{1}{c}$.

Or $c \in\,]\,n\,;\; n+1[$, donc $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{n}$, d'où

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

•*Méthode croissance de l'intégrale –*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall t \in \left]\frac{1}{n+1}\,;\,\frac{1}{n}\right[, \frac{1}{n+1} < \frac{1}{t} < \frac{1}{n}$.

Par croissance de l'intégrale, $\frac{1}{n+1} < [n+1]_t^n \ln(t) < \frac{1}{n}$, *i.e.*

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

☞ L'inégalité des accroissements finis ne donne malheureusement pas l'inégalité stricte.

b) Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) < 0$, u est strictement décroissante.

c) Pour tout $n \geqslant 2$,

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) > 1 + \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) - \ln(n) = 1 + \ln(n+1) - \ln(2) - \ln(n) > 1 - \ln(2).$

Comme $u_1 = 1$, l'inégalité est encore vraie pour $n = 1$.

d) Par prolongement des inégalités larges, $\gamma = \lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant 1 - \ln(2)$.

De même, $\forall n \geqslant 2, u_n \leqslant u_2 < u_1 = 1$, donc $\gamma \leqslant u_2 < 1$.

Exercice 47

Développements en séries de ln(2), ln(3) voire ln(p)

On continue de noter, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1. a) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

c) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

2. Proposer une démonstration de l'identité

$$\ln(3) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k}\right)$$

3. Et, pour p entier supérieur ou égal à 2, de

$$\ln(p) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} - \frac{p-1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{p-1}{2p} + \ldots ?$$

Solution (**Ex.47** – *Développements en séries de ln(2), ln(3) voire ln(p)*)

1. a) La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante de limite nulle, donc d'après le théorème de Leibniz, la série alternée de t.g. $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

b) $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} = \left(\sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}\right) - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$, d'où

$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = u_{2n} + \ln(2n) - \big(u_n + \ln(n)\big) = u_{2n} - u_n + \ln(2).$

c) Comme la série alternée converge et la suite u converge vers γ, l'égalité précédente entraîne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \gamma - \gamma + \ln(2) = \ln(2)$$

2. $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k}\right) = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_{3n} + \ln(3n) - u_n - \ln(n) = u_{3n} - u_n + \ln(3)$, et

$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k}\right) = \gamma - \gamma + \ln(3) = \ln(3)$

3. Remplaçons les « 3 » des dénominateurs ci-dessus par « p » et les « 2 » des numérateurs par des « $p-1$ ».

Exercice 48

Intégrales de WALLIS *& formule de* STIRLING

On souhaite établir l'équivalent de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \ln\left(\dfrac{n!}{\sqrt{n}(n/\mathrm{e})^n}\right)$.

En étudiant la série de terme général $v_{n+1} - v_n$, montrer qu'il existe une constante K telle que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{K}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

2. On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale de Wallis W_n par

$$\mathrm{W}_n \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$$

a) Justifier que la suite (W_n) est décroissante.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{W}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n \qquad (\heartsuit)$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

d) En déduire que

$$\mathrm{W}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{W}_n$$

e) À l'aide de $(\heartsuit)$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{W}_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{W}_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

f) Déterminer finalement la valeur de la constante K.

Solution (**Ex.48 –** *Intégrales de* WALLIS *& formule de* STIRLING)

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = 1 - (n+\frac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Or $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, donc

$v_{n+1} - v_n = 1 - 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge, par domination $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_{n+1} - v_n$ converge, donc la suite (v_n) converge.

Soit ℓ sa limite. Alors $\mathrm{e}^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\ell}$. En posant $\mathrm{K} = \mathrm{e}^{\ell}$,

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{K}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

2. a) Pour $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0\,;\ \pi/2]$, $\cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t)$ induit $\mathrm{W}_{n+1} \leqslant \mathrm{W}_n$.

b) En intégrant par parties W_{n+2} avec $u : t \mapsto \sin(t)$ et $v : t \mapsto \cos^{n+1}(t)$, on prouve $\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)(\mathrm{W}_n - \mathrm{W}_{n+2})$ donc $\mathrm{W}_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n$.

c) On démontre soit en montrant que la suite $\big((n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n\big)$ est constante, égale à $\mathrm{W}_1\mathrm{W}_0 = \dfrac{\pi}{2}$, soit par récurrence, que $\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.

d) Par décroissance : $(0 <)\ \mathrm{W}_{n+2} \leqslant \mathrm{W}_{n+1} \leqslant \mathrm{W}_n$ donc $\dfrac{n+1}{n+1} \leqslant \dfrac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_n} \leqslant 1$, et par encadrement $\mathrm{W}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{W}_n$.

e) Par récurrence, ou en itérant (1) pour faire apparaître des produits d'entiers pairs et des produits d'entiers impairs, on montre que

$$\mathrm{W}_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{W}_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Remarque : l'une peut se déduire de l'autre par c).

f) De c) et d), $\mathrm{W}_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$ avec $\mathrm{W}_n > 0$ donc $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

g) De e), $\mathrm{W}_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\mathrm{K}\sqrt{2n}}$ et par f), $\mathrm{W}_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$, donc $\mathrm{K} = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 49

Un développement asymptotique du reste des séries de Riemann

Soit α un réel de $]\,1\,;\ +\infty[$. On définit g sur $[\,1\,;\ +\infty[$ par

$$\forall x \geqslant 1, \qquad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{S}_n(\alpha) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \mathrm{S}(\alpha) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_n(\alpha) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Contrairement à l'usage courant, la somme $\mathrm{R}_n(\alpha)$ commence à n et non $n+1$.

1. a) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\int_k^{k+1} g(x)\mathrm{d}x \leqslant g(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} g(x)\mathrm{d}x.$$

b) En déduire, pour $n \geqslant 1$, l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \mathrm{S}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) + 1.$$

c) En déduire un encadrement de $\mathrm{S}(\alpha)$.

2. a) Montrer pour $n \geqslant 1$, l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}.$$

b) En déduire : $\qquad \mathrm{R}_n(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$

3. Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;\ +\infty[$ par : $\quad \forall x \geqslant 1, \quad f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.

a) Par la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $\qquad f(k+1) = f(k) + \dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{\alpha}{2} \times \dfrac{1}{k^{\alpha+1}} + \mathrm{I}_k$,

avec $0 \leqslant \mathrm{I}_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2 \times k^{\alpha+2}}$.

b) En isolant $\dfrac{1}{k^\alpha}$ dans l'expression précédente, montrer finalement que

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Solution (**Ex.49 –** *Un développement asymptotique du reste des séries de Riemann*)

1. a) Soit $k \geqslant 2$. Par décroissance de g sur $[\,k-1\,;\ k]$ et sur $[\,k\,;\ k+1]$,

- $\forall x \in [\,k-1\,;\ k]\,, \quad g(x) \geqslant g(k)$ entraîne $g(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} g(x)\mathrm{d}t$.
- $\forall x \in [\,k\,;\ k+1]\,, \quad g(x) \leqslant g(k)$ entraîne $\displaystyle\int_k^{k+1} g(x)\mathrm{d}x \leqslant g(k)$.

b) Par la relation de Chasles appliquée aux encadrements précédents pour k allant de 1 à n sur la première inégalité, et pour k allant de 2 à n sur la seconde, on a :

$$\int_1^{n+1} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(\alpha) \leqslant \int_1^{n} g(t)\mathrm{d}t + g(1).$$

En calculant les deux intégrales de cet encadrement, on obtient, pour $n \geqslant 1$, l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \mathrm{S}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) + 1.$$

c) En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\alpha-1} \leqslant \mathrm{S}(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}+1.$$

2. a) En sommant à l'aide de la relation de Chasles, pour $n \geqslant 1$,

$$\int_{n}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t.$$

Et en calculant ces deux intégrales, on obtient l'encadrement

$$\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}.$$

b) $0 \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) - \dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$

Or $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)}{\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}} = \dfrac{1}{\alpha-1}\left(1-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{\alpha-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

3. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. f étant de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[\,k\,;\ k+1]$, la formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire :

$$f(k+1) = f(k) + f'(k)(k+1-k) + \frac{f''(k)}{2}(k+1-k)^2 + \int_{k}^{k+1} \frac{(t-k)^2}{2} f^{(3)}(t)\mathrm{d}t.$$

Or $f'(k) = \dfrac{1}{k^\alpha}$, $f''(k) = \dfrac{-\alpha}{k^{\alpha+1}}$,

$$\int_{k}^{k+1} \frac{(t-k)^2}{2} f^{(3)}(t)\mathrm{d}t = \int_{k}^{k+1} \frac{(t-k)^2}{2}\,\frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}\mathrm{d}t,$$

et $\forall t \in [\,k\,;\ k+1\,]$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{(t-k)^2}{2}\,\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}} \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$, ce qui donne par croissance de l'intégrale,

$$f(k+1) = f(k) + \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} + \mathrm{I}_k, \text{ avec } 0 \leqslant \mathrm{I}_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2 \times k^{\alpha+2}}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{N} \geqslant n$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^\alpha} &= \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \left(f(k+1) - f(k) + \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} - \mathrm{I}_k\right)\\ &= f(\mathrm{N}+1) - f(n) + \frac{\alpha}{2}\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^{\alpha+1}} - \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \mathrm{I}_k \qquad (1).\end{aligned}$$

Que peut-on dire de chaque terme lorsque N tend vers $+\infty$?

- $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} f(\mathrm{N}+1) = 0$, sans souci.
- $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} -f(n) = -f(n) = \dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$, no problem.
- $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{2}\mathrm{R}_n(\alpha+1) = \frac{1}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ par 4.b).
- De $0 \leqslant \mathrm{I}_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2 \times k^{\alpha+2}}$, on tire, par comparaison avec la série de Riemann convergente $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{\alpha+2}}$ la convergence

de $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \mathrm{I}_k$, et on a, en sommant pour $k \geqslant n$ l'encadrement,

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{I}_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\mathrm{R}_n(\alpha+2) \leqslant \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{(n-1)^{\alpha+1}},$$

la dernière majoration résultant de 4.a).

Alors $0 \leqslant n^\alpha \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{I}_k \leqslant \frac{\alpha}{2} \times \frac{n^\alpha}{(n-1)^{\alpha+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ montre que par encadrement,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{I}_k = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Conclusion : en passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$, il vient

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Exercice 50

Équivalence des termes généraux, application à $\zeta(2)$ et γ

1. *Question préliminaire*

Soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles ne s'annulant pas.

On rappelle qu'alors,

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \Longleftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Montrer l'équivalence

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists \mathrm{N}_0 \geqslant n_0, \forall n \geqslant \mathrm{N}_0, \quad |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon\,|b_n|.$$

2. Soit $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} b_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs.

On note $\mathrm{R}_n \overset{\text{déf.}}{=} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $\mathrm{R}'_n \overset{\text{déf.}}{=} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k$ leur reste respectif.

On suppose que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n.$$

Montrer que

$$\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{R}'_n.$$

3. *Application à $\zeta(2)$.*

On note, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{R}_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k-1)k} = \dfrac{1}{n}$.

b) En déduire un équivalent de R_n.

c) Déterminer le reste d'ordre n de la série $\sum\limits_{k\geq 2} \dfrac{1}{(k-1)k(k+1)}$.

d) En déduire que le reste d'ordre n de la série $\sum\limits_{k\geq 2} \dfrac{1}{(k-1)k} - \dfrac{1}{k^2}$ est équivalent à $\dfrac{1}{2n^2}$.

e) En déduire que

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

f) En s'inspirant de ce qui précède, déterminer une constante α telle que

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{\alpha}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

4. *Application à la constante γ d'Euler*

Soit $w_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $\quad w_n = \dfrac{1}{n} - \big(\ln(n) - \ln(n-1)\big)$.

a) Déterminer un équivalent simple de w_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En déduire que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

On note γ sa limite, appelée *constante γ d'*Euler.

c) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Solution (**Ex.50 –** *Équivalence des termes généraux, application à $\zeta(2)$ et γ*)

1. • Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite

$$\exists N_0 \geqslant n_0, \forall n \geqslant N_0, \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon,\ i.e.\ |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon\, |b_n|.$$

- Si $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \geqslant n_0, \forall n \geqslant N_0, |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon\, |b_n|$,

alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \geqslant n_0, \forall n \geqslant N_0, \left|\dfrac{a_n}{b_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$,

donc $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, *i.e.* $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

2. Utilisons la caractérisation précédente.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_0 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant N_0, |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon b_n$.

Alors : $\forall n \geqslant N_0$, $|R_n - R'_n| = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k - b_k| \leqslant \varepsilon R'_n$

Ce qui entraîne, toujours par la caractérisation que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$.

3. *Application à $\zeta(2)$.*

a) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{n}$.

b) En notant $R'_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n}$, comme $\dfrac{1}{(k-1)k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2}$, $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$, *i.e.* $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

c) En décomposant en éléments simples :

$\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1/2}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1/2}{k+1}\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}$

Et $\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2(n+1)} = \dfrac{1}{2n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

d) $\dfrac{1}{(k-1)k} - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{k^2(k-1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(k-1)k(k+1)}$ donc par la question précédente le reste d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k^2}$ est équivalent à $\dfrac{1}{2n^2}$.

e) $R_n - \dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k-1)k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$ que l'on peut écrire

$$R_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

f) J'exploite les restes que je sais calculer explicitement :

$R_n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k-1)k} + \frac{1}{(k-1)k(k+1)}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{(k-1)k^2(k+1)}$ et $\dfrac{-1}{(k-1)k^2(k+1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{k^4}$.

J'introduis une série de t.g. équivalent dont je sais calculer le reste, par exemple :

$\dfrac{1}{k^4} \underset{k\to+\infty}{\sim} u_k = \dfrac{1}{(k-1)k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1/6}{k-1} - \dfrac{1/2}{k} + \dfrac{1/2}{k+1} - \dfrac{1/6}{k+2}$

$\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right]$

$$= \frac{1}{6n} - \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2) - 2n(n+2) + n(n+1)}{6n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2}{6n(n+1)(n+2)}$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^3}$.

Ceci permet d'écrire :

$\mathrm{R}_n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{3n^3}$, d'où

$\mathrm{R}_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n(n+1)} - \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Il reste à transformer le terme $\dfrac{1}{2n(n+1)}$:

$\dfrac{1}{2n(n+1)} - \dfrac{1}{2n^2} = \dfrac{-1}{2n^2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n^3}$, d'où

$\dfrac{1}{2n(n+1)} = \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{2n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, et finalement

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

4. a) *Application à la constante γ d'Euler*

$w_n = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$

b) Par équivalence de t.g. de signe constant et par la série de référence de Riemann de paramètre 2 (alias $\zeta(2)$), la série de t.g. w_n converge.

Or $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k \overset{\text{télesc.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$... c'est notre suite !

c) Notons $\mathrm{T}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$ le reste de cette série, et toujours R_n le reste de la série de Riemann de paramètre 2.

De $w_k \underset{k\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2k^2}$ on tire $\mathrm{T}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$, donc $\mathrm{T}_n = -\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On peut écrire : $\mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n = \gamma$, donc $\mathrm{S}_n = \gamma - \mathrm{T}_n$, et donc, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 51

Convexité et encadrement du reste d'une série de Riemann

Pour tout $\alpha \in]\,0\,;\ +\infty[$, on note f_α la fonction

$$f_\alpha : [\,1\,;\ +\infty[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}.$$

On note aussi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{S}_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{I}_k = [\,k\,;\ k+1]$.

a) Représenter l'allure de la courbe $\mathcal{C}_\alpha$ représentative de f_α sur I_k.

b) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_\alpha$ en $k+1$ ainsi que l'équation de la corde à $\mathcal{C}_\alpha$ passant par $(k, f_\alpha(k))$ et $(k+1, f_\alpha(k+1))$, et les tracer sur le dessin précédent.

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{I}_k$,

$$f'_\alpha(k+1)(x-(k+1)) + f_\alpha(k+1) \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \big(f_\alpha(k+1) - f_\alpha(k)\big)(x-k) + f_\alpha(k)$$

d) En déduire finalement

$$\frac{\alpha}{2(k+1)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{2k^\alpha} + \frac{1}{2(k+1)^\alpha}$$

2. a) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\alpha}{2}\mathrm{R}_n(\alpha+1) + \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant \frac{1}{2n^\alpha} + \mathrm{R}_n(\alpha)$$

b) En déduire finalement

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{\alpha}{4n^{\alpha+1}}$$

3. a) Ce dernier encadrement est-il un résultat plus précis que ceux obtenus dans les deux exercices précédents ?

b) Sachant que $\mathrm{S}_n(4) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$, justifier que

$$\frac{\pi^4}{90} \simeq 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2.4^4} + \frac{1}{3.4^3} \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

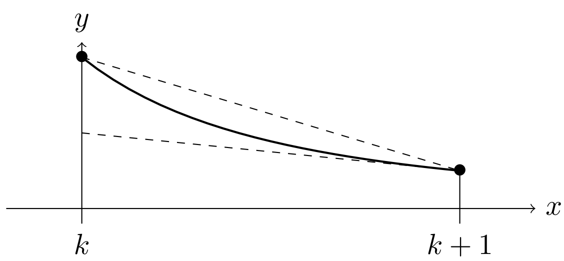
Solution (**Ex.51** – *Convexité et encadrement du reste d'une série de Riemann*)
Pour tout $\alpha \in \,]\,0\,;\, +\infty[$, on note f_α la fonction

$$f_\alpha : [\,1\,;\, +\infty[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}.$$

On note aussi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{S}_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{I}_k = [\,k\,;\, k+1]$.



L'équation de la tangente correspond au membre de gauche, tandis que l'équation de la corde correspond au membre de droite, de l'encadrement

$$f'_\alpha(k+1)(x-(k+1)) + f_\alpha(k+1) \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \big(f_\alpha(k+1) - f_\alpha(k)\big)(x-k) + f(k)$$

• Soit g la fonction obtenue en formant la différence du membre de droite et du membre central.
Sur I_k, $g'' = -f'' < 0$, donc g' est strictement croissante, et comme $g(k) = g(k+1) = 0$, g' s'annule au moins une fois (Rolle), donc g' s'annule exactement une fois entre k et $k+1$. Donc g' est strictement positive puis strictement négative, donc g est strictement croissante puis strictement décroissante, donc est positive. Ce qui fournit la majoration.
• Soit h la fonction obtenue en formant la différence du membre central et du membre de gauche.
Sur I_k, $h'' = f'' > 0$ donc h' est strictement croissante. Mais $h' = f' - f'(k+1)$ donc $h'(k+1) = 0$, donc h' est négative. Donc h est décroissante, mais $h(k+1) = 0$, donc h est positive. Ce qui fournit la minoration.
• Par croissance de l'intégrale sur I_k, en remplaçant f_α et f'_α par leur expression, puisque $\displaystyle\int_k^{k+1} x - k\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_k^{k+1} x-(k+1)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$,

$$\frac{\alpha}{2(k+1)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{2k^\alpha} + \frac{1}{2(k+1)^\alpha}$$

2. a) En sommant les encadrements précédents pour k allant de n à $+\infty$, comme $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

• pour l'inégalité de gauche :

$$\frac{\alpha}{2}\mathrm{R}_n(\alpha+1) + \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

• pour l'inégalité de droite, provoquons un télescopage :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k^\alpha}+\frac{1}{2(k+1)^\alpha}\right)=\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k^\alpha}-\frac{1}{2(k+1)^\alpha}\right)+\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^\alpha}$$

$$=\frac{1}{2n^\alpha}+\mathrm{R}_n(\alpha)$$

Si on n'a pas vu cette astuce, une récurrence sur n fonctionne, c'est moins élégant.

Bilan :

$$\frac{\alpha}{2}\mathrm{R}_n(\alpha+1)+\mathrm{R}_n(\alpha)\leqslant\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\leqslant\frac{1}{2n^\alpha}+\mathrm{R}_n(\alpha)$$

b) On isole $\mathrm{R}_n(\alpha)$:

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}-\frac{1}{2n^\alpha}\leqslant\mathrm{R}_n(\alpha)\leqslant\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}-\frac{\alpha}{2}\mathrm{R}_n(\alpha+1)$$

Mais comme ceci est vrai pour tout $\alpha>1$, on a :

$$\mathrm{R}_n(\alpha+1)\geqslant\frac{1}{\alpha n^\alpha}-\frac{1}{2n^{\alpha+1}},\text{ donc }-\frac{\alpha}{2}\mathrm{R}_n(\alpha+1)\leqslant-\frac{1}{2n^\alpha}+\frac{\alpha}{4n^{\alpha+1}}$$

D'où finalement

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}-\frac{1}{2n^\alpha}\leqslant\mathrm{R}_n(\alpha)\leqslant\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}-\frac{1}{2n^\alpha}+\frac{\alpha}{4n^{\alpha+1}}$$

3. a) Ce résultat est plus précis si l'on veut encadrer l'erreur commise. Il permet aussi d'écrire en particulier

$$\mathrm{R}_n(\alpha)=\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}-\frac{1}{2n^\alpha}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

Comme développement asymptotique, il est moins précis que tout développement en $o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ (ou plus).

b) $\dfrac{\pi}{90}=\mathrm{S}_4(4)+\mathrm{R}_4(4)=1+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{4^4}+\mathrm{R}_4(4)$

Or $\mathrm{R}_4(4)\simeq\dfrac{1}{3.4^3}-\dfrac{1}{2.4^4}$ à $\dfrac{4}{4.4^5}=\dfrac{1}{2^{10}}=\dfrac{1}{1024}\leqslant 10^{-3}$ près. D'où :

$$\frac{\pi^4}{90}\simeq 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2.4^4}+\frac{1}{3.4^3}\text{ à }10^{-3}\text{ près.}$$

Chapitre 17

Série harmonique alternée et réarrangements à la Riemann

Exercice 52

Sept méthodes pour la somme de la série harmonique alternée

L'objectif de ce problème est d'établir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$$

par sept méthodes différentes qui permettent de parcourir une grande partie des programmes d'analyse de première et de seconde année.

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ s'appelle *série harmonique alternée.*

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

et pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Par une méthode élémentaire et astucieuse

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

a) Pour n dans $\mathbb{N}$, calculer $\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1}$ et en déduire que la suite (I_n) converge en précisant sa limite.

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2(-1)^{n-1}\mathrm{I}_n = \mathrm{S}_{n-1} - \ln(2).$$

c) Conclure.

2. Par une SOMME[1] de Riemann...

a) Justifier, pour $n \geqslant 1$, que $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et en déduire

$$\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}.$$

b) Montrer, pour $n \geqslant 1$, que $\mathrm{S}_{2n-1} = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n$.

c) En déduire la convergence de la série harmonique alternée ainsi que sa somme.

3. En passant par un développement asymptotique de $\mathbf{H_n}$

1. Je n'ai pas écrit une SÉRIE de Riemann.

a) Établir la convergence de la suite $\big(\mathrm{H}_n - \ln(n)\big)$ et en déduire l'existence d'une constante γ telle que

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o\,(1)\,.$$

b) À l'aide de $\mathrm{S}_{2n-1} = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n$ (établi dans la question précédente), en déduire la convergence de la série harmonique alternée ainsi que sa somme.

4. En passant par une formule de Taylor avec reste intégral

a) Montrer que les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes.

b) Soit

$$\begin{array}{rccl} g: & [\,0\,;\;1\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{array}$$

Calculer, pour tout k de $\mathbb{N}$, $g^{(k)}$ et vérifier que $g^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.

c) Établir par récurrence que, pour $n \geqslant 1$,

$$\forall x \in [\,0\,;\;1\,]\,,\quad g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

d) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leqslant \ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

e) Justifier alors que

$$\mathrm{S}_{2n-1} \leqslant \ln(2) \leqslant \mathrm{S}_{2n}.$$

f) Conclure.

5. À l'aide d'une écriture intégrale du terme général

a) Que vaut, pour $n \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 (-t)^n \mathrm{d}t$?

b) En déduire, pour $n \geqslant 0$,

$$\mathrm{S}_n = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

c) Conclure.

6. À l'aide d'une seconde écriture intégrale du terme général

a) Rappeler, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-nx)\mathrm{d}x$.

b) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-nx}$.
Montrer que la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement et préciser sa somme.

c) Peut-on appliquer le théorème d'intégration terme à terme à la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

d) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{F}_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Expliciter F_n et montrer que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(\mathrm{F}_n)_{n\geqslant 1}$.

e) Conclure.

7. Du côté des séries entières

a) Rappeler la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour $x \in \,]-1\,;\;0]$.

b) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$ converge uniformément sur $[-1\,;\ 0]$.

c) Conclure.

Solution (**Ex.52 –** *Sept méthodes pour la somme de la série harmonique alternée*)

$$\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

et pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$\mathrm{H}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

1. Par une méthode élémentaire et astucieuse

a) • $\mathrm{I}_n+\mathrm{I}_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+2}$.

• Par postivité de l'intégrale, $0\leqslant \mathrm{I}_n\leqslant \mathrm{I}_n+\mathrm{I}_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2n+2}$.

• Par encadrement : $\mathrm{I}_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

b) • Pour $n=1$: $\mathrm{I}_1=\dfrac12-\mathrm{I}_0=\dfrac12-\dfrac12\displaystyle\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac12(1-\ln(2))$ donc $2\mathrm{I}_1=1-\ln(2)=\mathrm{S}_0-\ln(2)$ et la propriété est vraie au rang $n=1$.

• Supposons la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}^*$ fixé.

$2(-1)^n\mathrm{I}_{n+1}=2(-1)^n\left(\dfrac{1}{2n+2}-\mathrm{I}_n\right)=\dfrac{(-1)^n}{n+1}+\mathrm{S}_{n-1}-\ln(2)=\mathrm{S}_n-\ln(2)$: la propriété est vraie au rang 2.

c) On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{S}_n=2(-1)^n\mathrm{I}_{n+1}+\ln(2)\text{ avec }|2(-1)^n\mathrm{I}_{n+1}|=2\mathrm{I}_{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

donc (S_n) converge et sa limite est $\ln(2)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln(2).$$

2. Par une SOMME[2] de Riemann...

a) $\mathrm{H}_{2n}-\mathrm{H}_n=\displaystyle\sum_{i=n+1}^{2n}\frac1i\overset{k=i-n}{=}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac1n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)}=\sigma_n$

où σ_n est la n-ième somme de Riemann associée à la fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{1+t}$ continue sur $[0\,;\ 1]$.

Donc $\mathrm{H}_{2n}-\mathrm{H}_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=\ln(2)$.

b) Séparons les termes pairs des termes impairs de la série harmonique :

$\mathrm{P}_n=\displaystyle\sum_{k\leqslant 2n,k\text{ pair}}\frac1k=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}=\frac12\mathrm{H}_n,$

$\mathrm{I}_n=\displaystyle\sum_{k\leqslant 2n,k\text{ impair}}\frac1k=\mathrm{H}_{2n}-\mathrm{P}_n=\mathrm{H}_{2n}-\frac12\mathrm{H}_n,$

Alors $\mathrm{S}_{2n-1}=\mathrm{P}_n-\mathrm{I}_n=\mathrm{H}_{2n}-\mathrm{H}_n$.

c) • On a $\mathrm{S}_{2n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(2)$ par a).

• $\mathrm{S}_{2n}=\mathrm{S}_{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(2)+0=\ln(2)$.

• Donc la suite (S_n) converge et sa limite est $\ln(2)$, i.e. la série harmonique alternée converge et sa somme $\ln(2)$.

3. En passant par un développement asymptotique de $\mathbf{H_n}$

a) Posons $u_n=\mathrm{H}_n-\ln(n)$ pour tout $n\geqslant 1$.

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac1n\right)=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac1n+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

2. Je n'ai pas écrit une SÉRIE de Riemann.

$$= \frac{-1}{n(n+1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par domination et convergence de la série de Riemann de paramètre 2, la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge, donc la suite (u_n) converge. On notant γ sa limite, on peut écrire

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o\,(1)\,.$$

b) $\mathrm{S}_{2n-1} = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2n) - \ln(n) + o\,(1) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(2) + o\,(1)$
donc $\mathrm{S}_{2n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.
On conclut comme dans la question précédente.

4. En passant par une formule de Taylor avec reste intégral

a) $\forall n \geqslant 1, \mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n-1} = -\dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} \geqslant 0,$
$\forall n \geqslant 0, \mathrm{S}_{2n+2} - \mathrm{S}_{2n} = \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n+2} \leqslant 0,$
$\mathrm{S}_{2n-1} - \mathrm{S}_{2n} = -\dfrac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
donc les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes.

b) Notons que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car ln l'est sur $[\,1\,;\ 2]$.
On montre par récurrence sur k que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, g^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

On a alors bien $g^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.

c) • Le second membre pour $n = 1$ vaut
$x + \displaystyle\int_0^x \frac{-(x-t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} x + \left[\frac{x-t}{1+t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = x - x + \ln(1+x) = g(x).$
Donc la propriété est vraie au rang 1.
• Supposons-là vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé. Alors
$\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}g^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$
$= \displaystyle\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}(-1)^n + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$ ce qui prouve la formule au rang $n+1$.
... et je viens de démontrer la formule de Taylor avec reste intégrale...
Variante − On a le droit d'invoquer la formule de Taylor avec reste intégrale.

d) Toujours pour $x \in [\,0\,;\ 1]$,
• En prenant $2n$ dans la formule précédente :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k - \ln(1+x) = -\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}g^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t$ or $g^{(2n+1)}$ est positive d'après l'expression trouvée en b), donc cette intégrale est positive, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k - \ln(1+x) \leqslant 0.$
• De façon analogue en prenant $2n-1$ dans la formule précédente :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k - \ln(1+x) = -\int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}g^{(2n)}(t)\mathrm{d}t$ or $g^{(2n)}$ est négative d'après l'expression trouvée en b), donc cette intégrale est négative, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k - \ln(1+x) \geqslant 0.$
• Donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k \leqslant \ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$

e) En prenant $x = 1$ dans l'encadrement précédent et après un décalage d'indice,

$$\mathrm{S}_{2n-1} \leqslant \ln(2) \leqslant \mathrm{S}_{2n}.$$

f) (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes donc convergentes de même limite ℓ.
Par prolongement des inégalités larges, en passant à la limite dans l'encadrement précédent, $\ell \leqslant \ln(2) \leqslant \ell$ donc $\ell = \ln(2)$.

On en conclut, comme dans les deux questions précédentes, que la série harmonique alternée converge et sa somme est $\ln(2)$.

5. À l'aide d'une écriture intégrale du terme général

a) Pour $n \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 (-t)^n \mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

b) $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-t)^k \mathrm{d}t$ et par linéarité de l'intégrale (il s'agit d'une somme finie),

$\mathrm{S}_n = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \mathrm{d}t$ et par somme de termes géométriques de raison $-t$ différente de 1

$\mathrm{S}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{-(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$, donc

$\mathrm{S}_n = \ln(2) + (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

c) $\displaystyle\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{t^{n+1}}{1+t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2(n+2)}$

donc par encadrement $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

La relation précédente fournit alors $\mathrm{S}_n = \ln(2) + o(1)$, donc (S_n) converge et sa limite est $\ln(2)$.

Variante – $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ s'établit facilement avec le théorème de convergence dominée.

6. À l'aide d'une seconde écriture intégrale du terme général

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$.

b) Soit $x \in \,]\,0\,;\,+\infty[$. $f_n(x) = \big(-\mathrm{e}^{-x}\big)^n$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est une série géométrique de raison $-\mathrm{e}^{-x} \in \,]\,0\,;\,1[$, donc convergente.

La série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement, vers la fonction

$$\mathrm{S} :]\,0\,;\,+\infty[\, \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{\boxed{n=\mathbf{1}}}^{+\infty} \big(-\mathrm{e}^{-x}\big)^n = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

Attention ! Cette série commence avec l'indice $n = 1$.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty} |f_n|$ diverge et on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme à la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Pour tout x de $]\,0\,;\,+\infty[$,

$\mathrm{F}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-\mathrm{e}^{-x})^k = -\mathrm{e}^{-x}\frac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Sur $]\,0\,;\,+\infty[$, on a

① pour tout n F_n est continue ;

② $\sum \mathrm{F}_n$ converge simplement vers $\mathrm{F} : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$;

③ F est continue ;

④ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty[$, $\big|\mathrm{F}_n(x)\big| \leqslant \left|-\mathrm{e}^{-x}\dfrac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-x}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \leqslant 2\mathrm{e}^{-x}$.

Par conséquent, le théorème de convergence dominée s'applique à la suite (F_n) :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{F}_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{F}(x)\mathrm{d}x.$$

e) Par linéarité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{F}_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{n} = -\mathrm{S}_{n-1}$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(x)\mathrm{d}x = \big[\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\big]_0^{+\infty} = -\ln(2)$.

Ainsi la suite (S_n) converge, et sa limite est $\ln(2)$.

7. Du côté des séries entières

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ pour $x \in \,]-1\,;\,0]$.

b) En posant $g_n(x) = \dfrac{(-1)^n(-x)^n}{n}$ pour $x \in [-1\,;\,0]$, la suite $\left(\dfrac{(-x)^n}{n}\right)$ est décroissante et par le théorème des séries alternées, en notant $\mathrm{R}_n(x)$ le reste d'ordre n de cette série, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1\,;\,0]\,, \left|\mathrm{R}_n(x)\right| \leqslant \dfrac{(-x)^{n+1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$,

donc la fonction R_n est bornée sur $[-1\,;\,0]$, et $||\mathrm{R}_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Donc par encadrement $||\mathrm{R}_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément vers $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ sur $[-1\,;\,0]$.

Attention ! Le cours n'affirme pas qu'une série entière converge uniformément sur $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$ où R est son rayon de convergence. Contre-exemple : $\sum x^n$, $\mathrm{R}_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$ donc R_n n'est même pas une fonction bornée sur $]-1\,;\,1[$.

c) Par convergence uniforme et continuité des fonctions g_n, g est continue sur $[-1\,;\,0]$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ existe et

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = -g(-1) = -\lim_{x\to-1^+} g(x) = -\lim_{x\to-1^+} -\ln(1-x) = \ln(2)$.

Variante – On peut invoquer le théorème de la double limite en -1.

Exercice 53

Reliquat : reste de la série harmonique alternée

On pose $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \mathrm{S}_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que la série de terme général R_n converge.

2. Montrer que

$$\mathrm{S}_n \underset{+n\to\infty}{=} \ln(2) + \frac{(-1)^n}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Solution (**Ex.53** – *Reliquat : reste de la série harmonique alternée*)

On pose $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \mathrm{S}_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Reprenons la première méthode de l'exercice précédent avec les mêmes notations :

$$\mathrm{R}_n = 2(-1)^{n+1}\mathrm{I}_{n+1}$$

où on sait que (I_n) est une suite positive de limite nulle.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}(1-x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale, donc (I_n) est décroissante.

Le théorème de Leibniz permet d'affirmer que la série de terme général R_n est une série alternée convergente.

2. $\mathrm{S}_n = \ln(2) - \mathrm{R}_n = \ln(2) + 2(-1)^n\mathrm{I}_{n+1}$: cherchons un équivalent de I_{n+1}.

On a : $\dfrac{1}{2n+2} \leqslant \mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1} \leqslant 2\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2n}$ donc $\dfrac{1}{4n+4} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{4n}$.

Par encadrement : $4n\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$, donc $\mathrm{I}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$.

Autrement dit : $\mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{1}{4n} + o\left(\dfrac{1}{4n}\right) = \dfrac{1}{4n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, d'où

$$\mathrm{S}_n \underset{+n\to\infty}{=} \ln(2) + \frac{(-1)^n}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 54

Réarrangement de la série semi-convergente

1. La série harmonique alternée est-elle absolument convergente ?
Une série convergente non absolument convergente est parfois qualifiée de « série semi-convergente ». Une particularité d'une telle série est qu'un réarrangement de l'ordre de la sommation peut modifier la somme, voire faire diverger la série. Ce résultat s'appelle parfois le théorème de réarrangement de Riemann.

2. Calculer la somme obtenue en réarrangeant l'ordre des termes de la série harmonique alternée comme ci-dessous :

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}_{=a_0}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)}_{=a_1}+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+4}\right)}_{=a_k}+\ldots$$

3. On se donne deux entiers naturels non nuls p et q et on s'intéresse à la série obtenue en sommant dans l'ordre et successivement p termes positifs puis q termes négatifs de la série harmonique alternée, de sorte que la série harmonique alternée correspond à $p=q=1$ et que la série de la question précédente correspond $p=1$ et $q=2$.
Montrer que la série ainsi obtenue a pour somme $\ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$. On pourra utiliser $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+o(1)$.

4. Étudier la série obtenue en réarrangeant l'ordre des termes de la série harmonique alternée en sommant successivement 2^k termes positifs puis un terme négatif comme ci-dessous :

$$\underbrace{1}_{=u_0}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)}_{=u_1}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)}_{=u_2}+\ldots$$
$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}-\frac{1}{2k}\right)}_{=u_k}+\ldots$$

5. Proposer un réarrangement des termes de la série harmonique alternée conduisant à une série divergente vers $-\infty$.

Solution (**Ex.54 –** *Réarrangement de la série semi-convergente*)

1. Puisque la série harmonique $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k+1}$ diverge, la série harmonique alternée n'est pas absolument convergente.

2. $a_k=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{(2k+1)+1}}{2k+1}+\frac{(-1)^{(2k+2)+1}}{2k+2}\right)$
donc $2a_k$ est la somme de deux termes consécutifs de la série harmonique alternée.
La série de terme général a_k est donc convergente de somme $\frac{\ln(2)}{2}$.

3. Il s'agit d'étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de :

$$\mathrm{T}_n=\sum_{k=1}^{pn}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{qn}\frac{1}{2k}$$

Classiquement, $\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}\mathrm{H}_\mathrm{N}$
et $\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{2k-1}=\sum_{k=1}^{2\mathrm{N}}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{2k}=\mathrm{H}_{2\mathrm{N}}-\frac{1}{2}\mathrm{H}_\mathrm{N}$, donc
$\mathrm{T}_n=\mathrm{H}_{2pn}-\frac{1}{2}\mathrm{H}_{pn}-\frac{1}{2}\mathrm{H}_{qn}=\ln(2pn)-\gamma-\frac{1}{2}(\ln(pn)+\ln(qn))+\gamma+o(1)$
$\mathrm{T}_n=\ln\left(\frac{2pn}{\sqrt{pqn^2}}\right)+o(1)=\ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right)+o(1)$ d'où

$$\sum_{k=1}^{pn}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{qn}\frac{1}{2k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right).$$

4. Dans la définition de u_k :

$$\underbrace{1}_{=u_0} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)}_{=u_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right)}_{=u_2} + \dots$$
$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}-1} - \frac{1}{2k}\right)}_{=u_k} + \dots$$

j'observe que $u_k \geqslant 2^k \times \dfrac{1}{2^{k+1}-1} - \dfrac{1}{2k} \geqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2k}$ donc u_k ne tend pas vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.
Cette série à terme général positif diverge grossièrement, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

5. Un raisonnement analogue au précédent en réarrangeant l'ordre des termes de la série harmonique alternée en sommant successivement un terme positif puis 2^k termes négatifs conduit à une série divergente vers $-\infty$.

Chapitre 18

Sommation par parties et transformation d'Abel

On rappelle qu'une somme vide $\sum_{k=a}^{b} u_k$ avec $a > b$ est nulle.

Exercice 55

Transformation d'Abel

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de nombres de $\mathbb{C}$. Établir la formule de sommation par parties

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1}(u_{k+1} - u_k) + \sum_{k=0}^{n-1} u_k(v_{k+1} - v_k) = u_n v_n - u_0 v_0 \tag{18.1}$$

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de nombres de $\mathbb{C}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, ainsi que $\mathrm{B}_0 = 0$ (comme toute somme vide).

Établir, à l'aide de la relation (1), la formule appelée *transformation d'Abel*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n \mathrm{B}_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\mathrm{B}_k \tag{18.2}$$

Un mot de cette intégration par parties discrète

En considérant que la sommation est le pendant discret de l'intégration et la différenciation discrète d'une suite - définie pour une suite u par $u_{k+1} - u_k$ - est le pendant de la dérivation, l'analogie entre la formule (1) et l'intégration par parties est frappante :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)v_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} u_k(v_{k+1} - v_k) = u_n v_n - u_0 v_0$$

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

La même remarque vaut pour la transformation d'Abel :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n \mathrm{B}_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\mathrm{B}_k \tag{18.3}$$

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = [f(t)\mathrm{G}(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)\mathrm{G}(t)\mathrm{d}t$$

Solution (**Ex.55 –** *Transformation d'Abel*)

1. Cette formule s'établit par télescopages ou par récurrence sans difficulté.

2. Appliquons l'identité précédente avec $v_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$ $v_n = \mathrm{B}_n$ de sorte que $v_{k+1} - v_k = b_{k+1}$ ainsi que pour tout $n \geqslant 0$ $u_n = a_{n+1}$. On obtient :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{B}_{k+1}(a_{k+2} - a_{k+1}) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}b_{k+1} = a_{n+1}\mathrm{B}_n - 0.$$
D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_{n+1}\mathrm{B}_n - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k(a_{k+1} - a_k) = a_n\mathrm{B}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{B}_k(a_{k+1} - a_k)$.

Exercice 56

Application aux calculs de sommes finies classiques

1. a) En prenant : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = k$ et $b_k = 1$ dans la formule (2), retrouver la valeur de la somme $\mathrm{U}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

b) En prenant : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = k^2 - k$ et $b_k = 1$ dans la formule (2), retrouver la valeur de la somme $\mathrm{C}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

2. On définit la *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\geqslant 0}$ par
$$\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n.$$

a) En prenant : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = \mathrm{F}_k$, ainsi que : $b_1 = 1$ et $\forall k \geqslant 2, \quad b_k = 0$ dans la formule (2), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{F}_k = \mathrm{F}_{n+2} - 1$.

b) En prenant : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = \mathrm{F}_k$, ainsi que : $b_1 = 0$ et $\forall k \geqslant 2, \quad b_k = \mathrm{F}_{k-2}$ dans la formule (2), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{F}_k^2 = \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{n+1}$.

Solution (**Ex.56 –** *Application aux calculs de sommes finies classiques*)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n\mathrm{B}_n - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\mathrm{B}_k \tag{18.4}$$

1. a) En prenant : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = k$ et $b_k = 1$ dans la formule (2),
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} k = \mathrm{U}_n$, $a_n\mathrm{B}_n = n^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\mathrm{B}_k = \sum_{k=1}^{n-1} k = \mathrm{U}_n - n$.
Il s'ensuit : $2\mathrm{U}_n - n = n^2$ donc $\mathrm{U}_n = \dfrac{n^2 + n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) En prenant : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = k^2 - k$ et $b_k = 1$ dans la formule (2),
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \mathrm{C}_n - \mathrm{U}_n$, $a_n\mathrm{B}_n = n^3 - n^2$ et
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\mathrm{B}_k = \sum_{k=1}^{n-1} 2k^2 = 2\mathrm{C}_n - 2n^2$.
Il s'ensuit : $3\mathrm{C}_n - 2n^2 - \mathrm{U}_n = n^3 - n^2$ donc
$\mathrm{C}_n = \dfrac{1}{3}\left(n^3 + n^2\right) + \dfrac{1}{6}(n^2 + n) = \dfrac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. On définit la *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\geqslant 0}$ par
$$\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n.$$

a) En prenant : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = \mathrm{F}_k$, ainsi que : $b_1 = 1$ et $\forall k \geqslant 2, \quad b_k = 0$ dans la formule (2),
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \mathrm{F}_1 = 1$, $a_n\mathrm{B}_n = \mathrm{F}_n$ et
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\mathrm{B}_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{F}_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-2} \mathrm{F}_k$.

Il s'ensuit : $1 = \mathrm{F}_n - \sum_{k=0}^{n-2} \mathrm{F}_k$ donc en décalant l'indice $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{F}_k = \mathrm{F}_{n+2} - 1$.

b) En prenant : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = \mathrm{F}_k$, ainsi que : $b_1 = 0$ et $\forall k \geqslant 2, \quad b_k = \mathrm{F}_{k-2}$ dans la formule (2), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{F}_k^2 = \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{n+1}$.

Par la question précédente, $\mathrm{B}_n = \mathrm{F}_n - 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{F}_k\mathrm{F}_{k-2} = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{F}_k(\mathrm{F}_k - \mathrm{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{F}_k^2 - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{F}_k\mathrm{F}_{k-1}$,

$a_n\mathrm{B}_n = \mathrm{F}_n(\mathrm{F}_n - 1) = \mathrm{F}_n^2 - \mathrm{F}_n$ et

$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\mathrm{B}_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{F}_{k-1}(\mathrm{F}_k - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{F}_k\mathrm{F}_{k-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \mathrm{F}_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{F}_k\mathrm{F}_{k-1} - \mathrm{F}_n + 1.$

Il s'ensuit, en simplifiant les termes $\mathrm{F}_k\mathrm{F}_{k-1}$:

$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{F}_k^2 - \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{n-1} = \mathrm{F}_n^2 - \mathrm{F}_n + \mathrm{F}_n - 1$ donc $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{F}_k^2 = \mathrm{F}_n(\mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n-1}) - 1$

Comme $\mathrm{F}_0 = 1$ et $\mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n-1} = \mathrm{F}_{n+1}$, $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{F}_k^2 = \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{n+1}$.

Exercice 57

Formule sommatoire d'Abel et constante d'Euler

1. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. Pour tout x réel strictement positif, on pose

$$\mathrm{A}(x) = \sum_{1\leqslant n\leqslant x} a_n = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} a_n$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.
En particulier, si $x < 1$, cette définition entraîne que $\mathrm{A}(x) = 0$, comme toute somme vide.
Soit φ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\,+\infty[$.
Montrer, à l'aide de la transformation d'Abel (2), que

$$\forall x \in \,]\,0\,;\,+\infty[\,, \qquad \sum_{1\leqslant n\leqslant x} a_n\varphi(n) = \mathrm{A}(x)\varphi(x) - \int_1^x \mathrm{A}(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u \tag{18.5}$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule sommatoire d'Abel*.

2. Démontrer à l'aide d'une série que la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

est convergente.
On note γ sa limite, appelée *constante d'Euler*.

3. a) Montrer que : $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

b) Déterminer la nature des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor u \rfloor}{u^2}\mathrm{d}u$ et $\int_1^{+\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^2}\mathrm{d}u$.

c) Montrer à l'aide de (3) que, pour tout $x \geqslant 1$,

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} \frac{1}{n} = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor u \rfloor}{u^2}\mathrm{d}u.$$

d) En déduire

$$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^2}\mathrm{d}u.$$

Solution (**Ex.57 –** *Formule sommatoire d'Abel et constante d'Euler*)

1. Soit $x \in \,]\,0\,;\,+\infty[$ et $\mathrm{N} = \lfloor x \rfloor$. Par la transformation d'Abel (2) où je substitue a_n à b_n de sorte que $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}(n)$, et on substitue $\varphi(n)$ à a_n, j'obtiens

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} a_n\varphi(n) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n\varphi(n) \overset{(2)}{=} \mathrm{A}(\mathrm{N})\varphi(\mathrm{N}) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1}(\varphi(n+1)-\varphi(n))\mathrm{A}(n)$$

Constatons alors que, puisque sur les intervalles $[\,n\,;\ n+1[$ A est constante égale à $\mathrm{A}(n)$, on a : $\big(\varphi(n+1)-\varphi(n)\big)\times \mathrm{A}(n) = \mathrm{A}(n)\displaystyle\int_n^{n+1}\varphi'(u)\mathrm{d}u = \int_n^{n+1}\mathrm{A}(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$, ce qui conduit à

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} a_n\varphi(n) = \mathrm{A}(\mathrm{N})\varphi(\mathrm{N}) - \int_1^{\mathrm{N}}\mathrm{A}(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

De même : $\varphi(\mathrm{N}) = \varphi(x) - (\varphi(x)-\varphi(\mathrm{N})) = \varphi(x) - \displaystyle\int_{\mathrm{N}}^{x}\varphi'(u)\mathrm{d}u$, et comme sur $[\,\mathrm{N}\,;\ x]$, $\mathrm{A}(\mathrm{N}) = \mathrm{A}(u)$, on a : $\mathrm{A}(\mathrm{N})\varphi(\mathrm{N}) = \mathrm{A}(x)\varphi(x) - \displaystyle\int_{\mathrm{N}}^{x}\mathrm{A}(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$. On obtient alors la formule voulue :

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} a_n\varphi(n) = \mathrm{A}(x)\varphi(x) - \int_1^{x}\mathrm{A}(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

2. $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\big(1+\dfrac{1}{n}\big) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = -\dfrac{1}{n(n+1)} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Or la série de Riemann de t.g. $\dfrac{1}{n^2}$ est absolument convergent donc la série de t.g. $u_{n+1}-u_n$ converge. Donc la suite u converge.

3. a) $\forall x > 0, x-1 \leqslant \lfloor x\rfloor \leqslant x$ donc $1-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} \leqslant 1$. Ce qui prouve par encadrement que $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, donc $\lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

b) • $f\ :\ u \mapsto \dfrac{\lfloor u\rfloor}{u^2}$ est c.p.m. et positive sur $]\,0\,;\ +\infty[$. De plus, $f(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u}$ est divergente. Par équivalence de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\lfloor u\rfloor}{u^2}\mathrm{d}u$ diverge.

• $\forall u \in\ ]\,1\,;\ +\infty[\,, 0 \leqslant u-\lfloor u\rfloor \leqslant 1$ donc $\dfrac{u-\lfloor u\rfloor}{u^2} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$. Comme $u\mapsto 1/u^2$ est intégrable sur $[\,1\,;\ +\infty[$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\lfloor u\rfloor}{u^2}\mathrm{d}u$ converge par domination.

c) Prenons $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_n = 1$ de sorte que $\mathrm{A}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor} 1 = \lfloor x\rfloor$, et $\varphi :]\,0\,;\ +\infty[\ \to\mathbb{R}, x\mapsto \dfrac{1}{x}$.

Alors (3) conduit exactement à $\displaystyle\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{n} = \frac{\lfloor x\rfloor}{x} + \int_1^{x}\frac{\lfloor u\rfloor}{u^2}\mathrm{d}u$.

d) La formule précédente prise en $x = n\in\mathbb{N}^*$ quelconque donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \int_1^{n}\frac{\lfloor u\rfloor}{u}\mathrm{d}u$.

Retranchons $\ln(n) = \displaystyle\int_1^{n}\frac{\mathrm{d}u}{u}$ aux deux membres : $u_n = 1 - \displaystyle\int_1^{n}\frac{u-\lfloor u\rfloor}{u^2}\mathrm{d}u$

Comme (u_n) et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{u-\lfloor u\rfloor}{u^2}\mathrm{d}u$ convergent, on obtient en passant à la limite

$$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty}\frac{u-\lfloor u\rfloor}{u^2}\mathrm{d}u.$$

Exercice 58

Critère de Dirichlet et application

1. On reprend les notations de la formule (2) et on suppose d'une part que la suite (a_n) est une suite de réels décroissante et convergente de limite nulle, et d'autre part que la suite (B_n) est bornée.
Démontrer que la série de terme général a_nb_n converge.
Cette propriété est connue sous le nom de *critère de Dirichlet.*

2. Soit $x\in[\,0\,;\ 2\pi[$ et $p\in\,]\,0\,;\ +\infty[$. On s'intéresse à la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{\mathrm{e}^{inx}}{n^p}$.

a) On suppose dans cette question que $x = 0$. Étudier la convergence de la série précédente.
Dans toute la suite de cette question, on suppose $x \in \,]0\,;\; 2\pi[$.

b) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\sum_{n=1}^{m} \mathrm{e}^{inx}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sin(x/2)}$.

c) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n^p}$.

d) À quelle condition nécessaire et suffisante cette série est-elle absolument convergente ?

e) Quelle est la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^p}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^p}$?

Solution (**Ex.58 –** *Critère de Dirichlet et application*)

1. Puisque (a_n) converge, la série de t.g. $a_n - a_{n+1}$ converge. Comme elle est à termes positifs puisque (a_n) décroît, cette convergence est absolue.
Puisque (B_n) est bornée, $(a_{n+1} - a_n)\mathrm{B}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(a_n - a_{n+1}\right)$.
Par le critère de domination, la série de t.g. $(a_{n+1} - a_n)\mathrm{B}_n$ converge.
Enfin comme (a_n) converge vers 0 et (B_n) est bornée, $(a_n\mathrm{B}_n)$ converge vers 0.
Ainsi, le membre de droite de (2) admet une limite finie donc le membre de gauche aussi. Autrement dit la série de t.g. $a_n b_n$ converge.

2. a) Lorsque $x = 0$, il s'agit de la série de Riemann de paramètre p, qui converge si, et seulement si, $p > 1$. *Dans toute la suite de cette question, on suppose* $x \in \,]0\,;\; 2\pi[$.

b) Comme $x \in \,]0\,;\; 2\pi[$, $\mathrm{e}^{ix} \neq 0$ et

$$\left|\sum_{n=1}^{m} \mathrm{e}^{inx}\right| = \left|\mathrm{e}^{ix}\frac{1-\mathrm{e}^{inx}}{1-\mathrm{e}^{ix}}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{inx/2}}{\mathrm{e}^{ix/2}} \times \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)} \text{ car } \sin(x/2) > 0.$$

c) Comme la suite $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante de limite nulle et la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\mathrm{B}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$ est bornée,

le critère de Dirichlet entraîne que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n^p}$ converge.

d) Cette série converge absolument si, et seulement si, la série de Riemann de paramètre p converge, donc si, et seulement si, $p > 1$.

e) Les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^p}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^p}$ étant les parties réelles et imaginaires d'une série convergente, elles convergent.

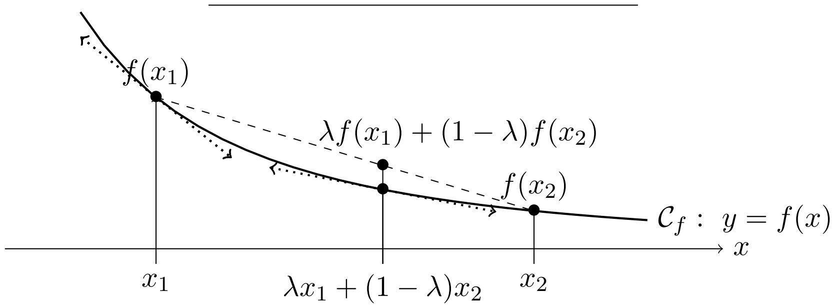
☞ Si on a un doute, en notant (S_n) la suite des sommes partielles de la série complexe précédente, puisque (S_n) converge, $(\overline{\mathrm{S}_n})$ converge, et par linéarité les suites $\left(\dfrac{\mathrm{S}_n + \overline{\mathrm{S}_n}}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{\mathrm{S}_n - \overline{\mathrm{S}_n}}{2}\right)$ convergent, *i.e.* les séries partie réelle et partie imaginaire convergent.

Chapitre 19

Convexité et applications très classiques

Exercice 59

Convexité, cordes & tangentes



Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si toute corde joignant deux points de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_f$.
Autrement dit, f est convexe si, et seulement si,

$$\forall (x_1,x_2)\in \mathrm{I}^2, \forall \lambda \in [0\,;\ 1], \quad f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

f est dite *concave* si $-f$ est convexe, autrement dit, si

$$\forall (x_1,x_2)\in \mathrm{I}^2, \forall \lambda \in [0\,;\ 1], \quad f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

1. a) On suppose que f est dérivable et que f' est croissante sur I.
Montrer que f est convexe. *On pourra fixer $x_1 \leqslant x_2$ dans I et raisonner sur $g : \lambda \mapsto \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$.*
b) Que peut-on dire si f est deux fois dérivable et $f'' \geqslant 0$? Et si $f'' \leqslant 0$?

2. On suppose f dérivable et f' croissante sur I. Soit $x_1 \in \mathrm{I}$.
Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_1 est située sous $\mathcal{C}_f$,*i.e.*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1) \leqslant f(x)$$

Solution (**Ex.59** – *Convexité, cordes & tangentes*)

1. a) On fixe $x_1 \leqslant x_2$ dans I et on pose

$$g : \lambda \mapsto \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2).$$

- $g(0)=g(1)=0$ et g est dérivable, donc par le théorème de Rolle, g' s'annule au moins une fois.
- $g' : \lambda \mapsto \underbrace{f(x_1)-f(x_2)}_{=cte} + \underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} f'(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$, or f' est croissante et $\lambda \mapsto \lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ est décroissante, donc g' est décroissante.
- Donc g' est positive, puis s'annule, puis est négative sur $[0\,;\ 1]$.
- Donc g est croissante, puis éventuellement constante, puis décroissante sur $[0\,;\ 1]$ avec $g(0)=g(1)=0$.
- Donc g est positive. *Cqfd*.

b) Si $f'' \geqslant 0$, alors f' est croissante donc f est convexe. Et si $f'' \leqslant 0$, $-f'' \geqslant 0$ donc $-f$ est convexe et f est concave.

2. Soit $h : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - \big(f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)\big)$.
• $h(x_1) = 0$ (logique : point de contact entre la courbe et sa tangente)
• $h' = f' - f'(x_1)$ donc comme f' est croissante, $h'(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant x_1$ et $h'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant x_1$.
• Donc h est décroissante puis croissante, en atteignant son minimum valant 0 en x_1, donc h est positive. *Cqfd.*

Exercice 60

Quelques inégalités très classiques

Justifier rapidement, à l'aide de l'exercice précédent et sans étude de fonctions auxiliaires, les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant x + 1.$

2. $\forall x \in \,]-1\,;\,+\infty[\,, \quad \ln(x+1) \leqslant x.$

3. $\forall x \in [\,0\,;\,\pi/2]\,, \quad \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x.$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \geqslant -1, \quad (1+x)^n \geqslant nx + 1.$

Solution (**Ex.60 –** *Quelques inégalités très classiques*)

1. $\exp'' = \exp > 0$ donc exp est convexe sur $\mathbb{R}$. Or $y = x + 1$ est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_{\exp}$ en 0.

2. $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln(x+1) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0$ donc $f : x \mapsto \ln(x+1)$ est concave sur $]-1\,;\,+\infty[$. Or $y = x$ est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

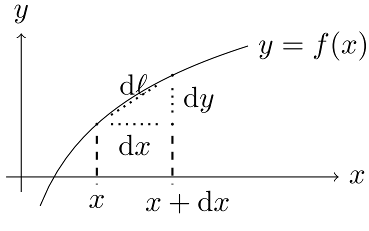
3. $\sin'' = -\sin$ donc sin est concave sur $[\,0\,;\,\pi/2]$. Or $y = x$ est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_{\sin}$ tandis que $y = \dfrac{2}{\pi}x$ est l'équation de la corde sur $[\,0\,;\,\pi/2]$.

4. Pour $n = 0$ et $n = 1$, l'inégalité est triviale (c'est une égalité).
Pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(1+x)^n = n(n-1)(x+1)^{n-2}$ donc $f : x \mapsto (x+1)^n$ est convexe sur $]-1\,;\,+\infty[$. Or $y = nx + 1$ est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

Exercice 61

Le plus court chemin...

Longueur d'une courbe



On admet que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,a\,;\,b]$, alors la longueur de la courbe de f est donnée par

$$\ell_{f,[\,a\,;\,b]} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Intuitivement, par Pythagore, $\mathrm{d}\ell^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \big(1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2\big)\mathrm{d}x^2$
ce qui donne $\mathrm{d}\ell = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$.
On se donne $\mathrm{A} = (a, \alpha)$ et $\mathrm{B} = (b, \beta)$ deux points du plan.
On note F l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,a\,;\,b]$ telles que $\begin{cases} f(a) = \alpha \\ f(b) = \beta \end{cases}$, autrement dit F est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ joignant A à B.
L'objectif de l'exercice est de montrer que

$$\min_{f\in \mathrm{F}} \left\{ \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x \right\}$$

est atteint par l'unique fonction affine de F, autrement dit que *le plus court chemin* $\mathcal{C}^1$ *de* A *à* B *est la ligne droite.*

1. Étudier la convexité de $\varphi : u \mapsto \sqrt{1+u^2}$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$\forall (u,m) \in \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{1+u^2} - \sqrt{1+m^2} \geqslant \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}(u-m)$$

2. Soit $f \in \mathrm{F}$ et soit g l'unique fonction affine de F. Montrer que

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b \sqrt{1+g'(x)^2}\mathrm{d}x$$

Solution (**Ex.61** – *Le plus court chemin...*)

1. • φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ par composition, puisque $\forall u \in \mathbb{R}, 1+u^2 \geqslant 1$.

• $\forall u \in \mathbb{R}, \varphi'(u) = \dfrac{2u}{2\sqrt{1+u^2}} = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$

• $\forall u \in \mathbb{R}, \varphi''(u) = \dfrac{1}{(1+u^2)^{3/2}} \geqslant 0$

Donc φ est convexe sur $\mathbb{R}$.

• Soit $m \in \mathbb{R}$. L'équation de la tangente à φ en m est, en appelant u la 'variable des abscisses',

$$y = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}(u-m) + \sqrt{1+m^2}$$

Cette tangente étant située sous la courbe de φ, on a bien

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{1+u^2} - \sqrt{1+m^2} \geqslant \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}(u-m)$$

2. g est la fonction affine joignant A à B :

$$g : x \mapsto \frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a) + \alpha$$

Posons $m = g' = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$.

Soit f une fonction quelconque de F.

$\ell_{f,[\,a\,;\,b]} - \ell_{g,[\,a\,;\,b]} = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} - \sqrt{1+m^2}\mathrm{d}x$, et par 1.,

$\geqslant \dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}} \displaystyle\int_a^b f'(x) - m\mathrm{d}x$

Or $\displaystyle\int_a^b f'(x) - m\mathrm{d}x = f(b) - f(a) - m(b-a) = \beta - \alpha - (\beta-\alpha) = 0$.

Donc $\ell_{f,[\,a\,;\,b]} - \ell_{g,[\,a\,;\,b]}$: le plus court chemin $\mathcal{C}^1$ est le segment...

Exercice 62

NEWTON *& la superattraction, algorithme de* HÉRON

Soit $[\,c\,;\,d]$ un segment de R, $f : [\,c\,;\,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :

(i) $f(c) < 0 < f(d)$;

(ii) $\forall x \in [\,c\,;\,d]\,, \quad f'(x) > 0$;

(iii) $\forall x \in [\,c\,;\,d]\,, \quad f''(x) \geqslant 0$.

On pose pour tout $x \in [\,c\,;\,d]$, $\mathrm{F}(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

1. Justifier que f possède un unique zéro dans $[\,c\,;\,d]$.

2. *Méthode de* NEWTON – On pose $\mathrm{C} = \dfrac{\max\limits_{[\,c\,;\,d]} f''}{2\min\limits_{[\,c\,;\,d]} f'}$.

a) Que valent $F(a)$ et $F'(a)$?
Montrer que, pour tout x de $[\,a\,;\;d]$,

$$F(x) - a = \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)}.$$

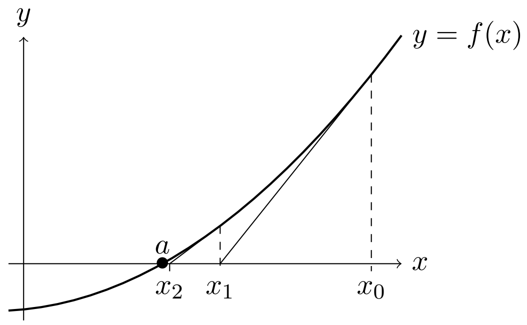
b) En déduire grâce à la formule de Taylor avec reste intégral que, pour tout $x \in [\,a\,;\;d]$,

$$0 \leqslant F(x) - a \leqslant C(x-a)^2.$$

c) Montrer que $[\,a\,;\;d]$ est stable par F.

d) Soit $x_0 \in [\,a\,;\;d]$. On construit par récurrence la suite (x_n) de la façon suivante :

« x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe de f passant par $(x_n, f(x_n))$. »



Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

e) Donner une majoration de l'erreur $x_n - a$ en fonction de n, de x_0 et de a.

3. *Méthode de Héron* – La méthode de Héron d'Alexandrie (Premier siècle ap. J.C.) consiste à calculer une valeur approchée de $a = \sqrt{y}$ où $y \in \,]\,0\,;\;+\infty[$ par la suite définie par :

$$x_0 = y \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right).$$

a) Montrer qu'il s'agit d'un cas particulier de la méthode de Newton appliquer à la fonction $f : x \mapsto x^2 - y$.

b) Vérifier que $F(x) - a = \dfrac{(x-a)^2}{2x}$ et $F(x) + a = \dfrac{(x+a)^2}{2x}$, puis que $\dfrac{x_n - a}{x_n + a} = \left(\dfrac{x_0 - a}{x_0 + a}\right)^{2^n}$.

c) Proposer une majoration de l'erreur dépendant de x_0 et a.

d) Écrire un algorithme en `Python` calculant $\sqrt{y}$ par l'algorithme de Héron.

Solution (**Ex.62 –** *Newton & la superattraction, algorithme de Héron*)
Soit $[\,c\,;\;d]$ un segment de R, $f : [\,c\,;\;d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :
(i) $f(c) < 0 < f(d)$;
(ii) $\forall x \in [\,c\,;\;d]\,, \quad f'(x) > 0$;
(iii) $\forall x \in [\,c\,;\;d]\,, \quad f''(x) \geqslant 0$.
On pose pour tout $x \in [\,c\,;\;d]$, $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

1. f est continue, strictement croissante, donc réalise une bijection de $[\,c\,;\;d]$ sur $[\,f(c)\,;\;f(d)]$. Or $0 \in [\,f(c)\,;\;f(d)]$, donc 0 admet un unique antécédent dans $[\,c\,;\;d]$.

2. *Méthode de Newton* – On pose $C = \dfrac{\max\limits_{[\,c\,;\,d]} f''}{2 \min\limits_{[\,c\,;\,d]} f'}$.

a) $F(a) = a$, $F' = 1 - \dfrac{f'^2 - ff''}{f'^2} = \dfrac{ff''}{f'^2}$ donc $F'(a) = 0$.

$$F(x) - a = F(x) - F(a) = x - a - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ puisque } f(a) = 0.$$

$$= \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)}$$

b) Écrivons la formule de Taylor en x à l'ordre 1 pour calculer $f(a)$:

$$F(x) - a = \frac{f(x) + f'(x)(a-x) + \displaystyle\int_x^a (a-t)f''(t)\mathrm{d}t - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)}$$

$\mathrm{F}(x) - a = \dfrac{1}{f'(x)} \displaystyle\int_x^a (a-t) f''(t) \mathrm{d}t$

Or : $\forall t \in [\,a\,;\ x]$, on a $a - t \leqslant 0$, d'où

$0 \leqslant f''(t) \leqslant \max\limits_{[\,c\,;\,d]} f''$, donc $0 \geqslant (a-t)f''(t) \geqslant (a-t)\max\limits_{[\,c\,;\,d]} f''$, donc puisque $x \geqslant a$, $0 \leqslant \displaystyle\int_x^a (a-t)f''(t)\mathrm{d}t \leqslant \max\limits_{[\,c\,;\,d]} f'' \displaystyle\int_x^a a - t\mathrm{d}t \leqslant \max\limits_{[\,c\,;\,d]} f'' \dfrac{(x-a)^2}{2}$

D'où $0 \leqslant \mathrm{F}(x) - a \leqslant \mathrm{C}(x-a)^2$.

c) Pour tout $x \in [\,a\,;\ d]$, $\mathrm{F}(x) \geqslant a$.

Pour tout $x \in [\,a\,;\ d]$, $\mathrm{F}(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \leqslant x$ car $f(x) \geqslant 0$ et $f'(x) > 0$.

Enfin $\mathrm{F}' = 1 - \dfrac{f'^2 - ff''}{f'^2} = \dfrac{ff''}{f'^2} \geqslant 0$ sur $[\,a\,;\ d]$, donc F est croissante.

Donc $[\,a\,;\ d]$ est stable par F.

d) Tangente en x_n : $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$.

$y = 0 \Longrightarrow x - x_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Longrightarrow x = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \mathrm{F}(x_n)$

e) On a :

$0 \leqslant x_1 - a \leqslant \mathrm{C}(x_0 - a)^2$

$0 \leqslant x_2 - a \leqslant \mathrm{C}(x_1 - a)^2 \leqslant \mathrm{C}^3(x_0 - a)^4$

$0 \leqslant x_3 - a \leqslant \mathrm{C}(x_2 - a)^2 \leqslant \mathrm{C}^7(x_0 - a)^8$

$\vdots$

$0 \leqslant x_n - a \leqslant \mathrm{C}^{2^n - 1}(x_0 - a)^{2^n}$

3. *Méthode de Héron* – La méthode de Héron d'Alexandrie (Premier siècle ap. J.C.) consiste à calculer une valeur approchée de $a = \sqrt{y}$ où $y \in \,]\,0\,;\ +\infty[$ par la suite définie par :

$$x_0 = y \quad \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right).$$

a) Soit $f : x \mapsto x^2 - y$.

Alors $\mathrm{F}(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x - \dfrac{x^2 - y}{2x} = \dfrac{x^2 + y}{2x} = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{y}{x}\right)$, $\mathcal{C}qfd$.

b) $\mathrm{F}(x) - a = \dfrac{x^2 + y - 2ax}{2x} = \dfrac{(x-a)^2}{2x}$ puisque $y = a^2$,

et de même $\mathrm{F}(x) + a = \dfrac{x^2 + y + 2ax}{2x} = \dfrac{(x+a)^2}{2x}$.

Il s'ensuit $\dfrac{x_{n+1} - a}{x_{n+1} + a} = \left(\dfrac{(x_n - a)^2}{(x_n + a)}\right)^2$, puis par récurrence sur n

$$\frac{x_n - a}{x_n + a} = \left(\frac{x_0 - a}{x_0 + a}\right)^{2^n}.$$

c) On a déjà vu que (x_n) est décroissante de limite a. Donc

$$0 \leqslant x_n - a \leqslant (x_0 + a)\left(\frac{x_0 - a}{x_0 + a}\right)^{2^n}.$$

Comme $\left|\dfrac{x_0 - a}{x_0 + a}\right| < 1$, la convergence est très rapide. On parle de convergence *quadratique*, car si on note $\varepsilon_n = \left(\dfrac{x_0 - a}{x_0 + a}\right)^{2^n}$, alors $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n^2$, par exemple si x_n est une approximation avec une précision de l'ordre de 10^{-p}, alors x_{n+1} sera une approximation avec une précision de l'ordre de 10^{-2p} : on double le nombre de décimales à chaque itération.

d) Vu la rapidité de la convergence, on peut prendre comme test d'arrêt $x_{n+1} - x_n \leqslant \varepsilon$, où ε est la précision recherchée.

```
import numpy as np

def Heron(y,e):                  # e : pr\'ecision
x = y                          # x0=y
xx = (y+1)/2                   # x1=(x0+y/x0)/2=(y+1)/2
while np.abs(xx-x) > e:        # pr\'ecision non atteinte ?
x, xx = xx, (xx+y/xx)/2 # termes suivants
```

```
    return xx
```

Exercice 63

Inégalité de Jensen

1. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
Démontrer l'*inégalité de* Jensen *discrète* :

$$\forall n \geqslant 1, \begin{cases} \forall (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathrm{I}^n, \\ \forall (\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in [\,0\,;\ 1]^n \\ \textit{avec } \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1, \end{cases} \qquad f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

2. a) Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, I un intervalle tel que $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et continue.
On suppose que X et $f(\mathrm{X})$ possèdent une espérance. Montrer que

$$f\big(\mathbb{E}(\mathrm{X})\big) \leqslant \mathbb{E}\big(f(\mathrm{X})\big)$$

b) Quelle propriété retrouve-t-on en prenant $f : x \mapsto x^2$.

3. Soit $g : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$ continue et soit $f : g([\,a\,;\ b]) \to \mathbb{R}$ convexe et continue.
Démontrer l'*inégalité de* Jensen *continue* (qui raconte la même histoire – image de la moyenne inférieure à moyenne de l'image) :

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f\big(g(x)\big)\mathrm{d}x$$

On pourra penser aux sommes de Riemann et commencer par le cas $[\,a\,;\ b] = [\,0\,;\ 1]$.

Solution (**Ex.63** – *Inégalité de* Jensen)

1. Par récurrence sur n.
Pour $n = 1$, $\lambda_1 = 1$ et l'inégalité est vérifiée.
Pour $n = 2$, $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ et l'inégalité est vérifiée par définition de la convexité.
Soit $n \geqslant 2$. Supposons la propriété vraie. On se donne $n + 1$ points et $n + 1$ coefficients.

Idée : couper en 2 – Soit $\Lambda = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 - \lambda_{n+1}$ et $y = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\Lambda}$.

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f\left(\Lambda y + (1-\Lambda)x_{n+1}\right) \leqslant \Lambda f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Or en posant $\mu_k = \dfrac{\lambda_k}{\Lambda}$, $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1$. Donc par convexité :

$$f(y) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_k f(x_k), \text{ et } \Lambda f(y) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

On a bien prouvé $f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$.
Par récurrence, on a gagné.

2. a) Notons $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \mathbb{P}([\mathrm{X} = x_n])$.
Comme l'inégalité de Jensen est valable pour un nombre fini de valeurs, on va raisonner sur les sommes partielles.
Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.

Afin d'avoir une somme de coefficients égale à 1, soit $p_{\mathrm{N}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \lambda_n$.

Par convexité : $p_{\mathrm{N}} f\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\lambda_n}{p_{\mathrm{N}}} x_n\right) \leqslant p_{\mathrm{N}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\lambda_n}{p_{\mathrm{N}}} f(x_n)$

Par les hypothèses :
$p_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda_n}{p_N} x_n = \frac{1}{p_N}\sum_{n=0}^{N} \lambda_n x_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathbb{E}(X)$ et par continuité
$\displaystyle p_N f\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda_n}{p_N} x_n\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(\mathbb{E}(X))$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda_n}{p_N} f(x_n) = \frac{1}{p_N}\sum_{n=0}^{N} \lambda_n f(x_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$ par transfert
Par prolongement des inégalités larges : $f\big(\mathbb{E}(X)\big) \leqslant \mathbb{E}\big(f(X)\big)$

b) $\big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)$ donc par König-Huygens $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$: positivité de la variance...

3. Écrivons les sommes de Riemann pour les fonctions $\dfrac{1}{b-a}g$ et $\dfrac{1}{b-a}f\circ g$.

Soit $\displaystyle S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b-a} g\big(a + \frac{k(b-a)}{n}\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} g\big(a+\frac{k(b-a)}{n}\big)$

et $\displaystyle T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\circ g\big(a+\frac{k(b-a)}{n}\big)$.

Par convexité, puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = 1$, $f(S_n) \leqslant T_n$.

Comme $\dfrac{1}{b-a}g$ est continue que $[\,a\,;\ b]$, la somme de Riemann S_n tend vers $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{b-a}g(x)\mathrm{d}x$ et par continuité de f, $f(S_n)$ tend vers $\displaystyle f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)$.

Comme $\dfrac{1}{b-a}f\circ g$ est continue que $[\,a\,;\ b]$, la somme de Riemann T_n tend vers $\displaystyle\int_a^b f(g(x))\mathrm{d}x$.

Par prolongement des inégalités larges,

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f\big(g(x)\big)\mathrm{d}x.$$

Exercice 64

Moyennes arithmétique, géométrique & harmonique

Cet exercice utilise l'inégalité de Jensen.

1. a) Justifier que la fonction ln est concave.

b) En déduire que, pour tout $(a,b) \in \,]\,0\,;\ +\infty[$,

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

c) Déduire de l'inégalité précédente

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}.$$

2. Soit $n \geqslant 1$ et soit $x_1, \ldots, x_n$ n nombres réels strictement positifs.
Montrer que

$$\frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Solution (**Ex.64 –** *Moyennes arithmétique, géométrique & harmonique*)

1. a) $\forall x > 0, \quad \ln''(x) = -1/x^2 < 0.$

b) Par l'inégalité de concavité avec $\lambda = \dfrac{1}{2}$, $\ln(\sqrt{ab}) = \dfrac{1}{2}\ln(a) + \dfrac{1}{2}\ln(b)) \leqslant \ln(\dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}b)$, que l'on compose par exp, croissante.

c) En prenant $a' = \dfrac{1}{a}$ et $b' = \dfrac{1}{b}$ dans $\sqrt{a'b'} \leqslant \dfrac{a'+b'}{2}$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{ab}} \leqslant \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$ qui donne par inversion $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$.

2. En appliquant l'inégalité de Jensen à ln (concave) avec $\forall k \in [\![1\,;\,n]\!]\,, \lambda_k = \dfrac{1}{n}$ aux points (x_k), on a

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)$$

qui donne en composant par exp qui est croissante

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}.$$

Et pour obtenir l'autre comparaison, il suffit d'appliquer cette inégalité aux points $\dfrac{1}{x_k}$ qui sont bien dans $]\,0\,;\,+\infty[$, comme en 1.c).

Exercice 65

Inégalités de Hölder & de Minkowski, normes $||.||_p$

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit $(p,q) \in\,]\,0\,;\,+\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On dit que p et q sont deux exposants *conjugués*.

1. Justifier que $p > 1$, $q > 1$ et $q = \dfrac{p}{p-1}$.

2. a) *En exploitant la convexité du logarithme...*

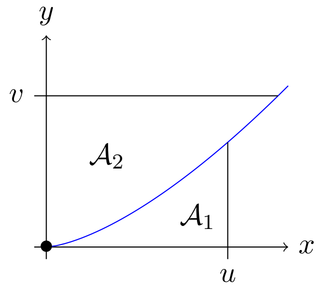
Montrer, en exploitant la concavité de ln, que

$$\forall (u,v) \in\,]\,0\,;\,+\infty[^2\,, \quad uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Qu'en est-il si $u = 0$ ou $v = 0$?

b) *... ou par un argument géométrique*

Soit $(u,v) \in\,]\,0\,;\,+\infty[^2$. Considérons dans le plan la courbe définie par $y = x^{p-1}$, l'aire $\mathcal{A}_1$ située entre la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = u$, ainsi que l'aire $\mathcal{A}_2$ située entre la courbe, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = v$,



En observant que $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \geqslant uv$, montrer que $uv \leqslant \dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q}$

c) Soit $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(v_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ $2n$ réels.

On suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |v_k|^q = 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k v_k| \leqslant 1.$$

d) Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ et $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.

Démontrer l'*inégalité de Hölder*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\right)^{1/q}$$

e) Quelle inégalité obtient-on lorsque $p = 2$?

3. a) On prend encore $p \in]\,0\,;\ +\infty[$ et q l'exposant conjugué de p.
Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ et $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.
En écrivant
$$\forall k \in [[\,1\,;\ n]]\,, \quad |x_k + y_k|^p \leqslant |x_k|\,|x_k + y_k|^{p-1} + |y_k|\,|x_k + y_k|^{q-1},$$
déduire, de l'inégalité de Hölder, l'*inégalité de Minkowski*
$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

b) Sur $\mathbb{R}^n$, on définit $||.||_p$ par
$$||.||_p : (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$
Vérifier que $||.||_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

4. $||.||_1$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par
$$||.||_1 : (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \mapsto \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$
est-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$?

5. Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que
$$||(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}||_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} ||(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}||_\infty \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$$
$||.||_\infty$ est-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$?

6. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et $p \in]\,0\,;\ 1[$. Soit
$$\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \big(\,|x_1|^p + |x_2|^p\,\big)^{1/p}.$$
Soit $\mathrm{A} = (1, 0)$ et $\mathrm{B} = (0, 1)$. Calculer $\mathrm{N(A)}$, $\mathrm{N(B)}$ et $\mathrm{N(A + B)}$. N est-elle une norme ?

Solution (**Ex.65** – *Inégalités de Hölder & de Minkowski, normes* $||.||_p$)

1. $p \in]\,0\,;\ 1] \Longrightarrow \dfrac{1}{p} \geqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > 1$: impossible, donc $p > 1$. Idem pour q.
$\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{p-1}{p}$ donc $q = \dfrac{p}{p-1}$.

2. a) $\forall x > 0, \quad \ln''(x) = \dfrac{1}{x^2} < 0$ donc ln est concave. L'inégalité de concavité appliquée à u^p et v^q donne
$$\ln\left(\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(u^p) + \frac{1}{q}\ln(v^q) \qquad (= \ln u + \ln v)$$
En composant par exp (croissante) :
$$\forall (u, v) \in]\,0\,;\ +\infty[^2\,, \quad uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$
Avec la convention usuelle $0^\alpha = 0$ pour tout $\alpha > 0$, l'inégalité demeure lorsque $u = 0$ ou $v = 0$.

b) *... ou par un argument géométrique*
D'abord : $\mathcal{A}_1 = \displaystyle\int_0^u x^{p-1}\mathrm{d}x = \frac{u^p}{p}$,
Ensuite : $y = x^{p-1} \Leftrightarrow x = y^{1/(p-1)}$, donc puisque $\dfrac{1}{p-1} + 1 = \dfrac{p}{p-1} = q$
$\mathcal{A}_2 = \displaystyle\int_0^v y^{1/(p-1)}\mathrm{d}y = \left[\frac{y^q}{q}\right]_0^v = \frac{v^q}{q}$.
Alors $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \geqslant uv$ donne l'inégalité voulue.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |u_k v_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|u_k|^p}{p} + \frac{|v_k|^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}|u_k|^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}|v_k|^q = 1$

d) On pose pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, $u_k = \dfrac{x_k}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}}$ et $v_k = \dfrac{y_k}{\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}}$. de sorte qu'on puisse appliquer l'inégalité précédente. Alors

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|x_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}}\frac{|y_k|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q\right)^{1/q}}\right) \leqslant 1$$

qui conduit (les dénominateurs sont indépendants de k) à l'inégalité de Hölder

e) Lorsque $p = 2$, on reconnaît l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

3. a) • $\sum_{k=1}^{n}|x_k|\,|x_k+y_k|^{p-1} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$

• $\sum_{k=1}^{n}|y_k|\,|x_k+y_k|^{p-1} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$

• On a : $1 = \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = \dfrac{p+q}{pq}$ d'où $pq = p+q$ et $(p-1)q = p$.

En sommant les inégalités précédentes :

$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p \leqslant \left[\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1-1/p}$

En faisant passer le second facteur du membre de droite à gauche, on obtient l'inégalité de Minkowski.

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}$$

b) • $||.||_p$ vérifie l'axiome de positivité, l'axiome de séparation et l'axiome d'homogénéité (aucun problème).

• L'inégalité de Minkowski n'est autre que l'inégalité triangulaire pour $||.||_p$.

• Donc $||.||_p$ est une bien norme sur $\mathbb{R}^n$.

4. D'après le cours, $||.||_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

5. Soit $\mathrm{M} = \sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{|x_k|\}$ et m le nombre de x_k tels que $|x_k| = \mathrm{M}$.

On a : $\left(\mathrm{M}^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(n.\mathrm{M}^p\right)^{1/p}$,

c'est-à-dire : $\mathrm{M} \leqslant ||(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}||_p \leqslant n^{1/p}\mathrm{M}$.

Or : $n^{1/p} = \exp\ln(n)/p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$, donc par encadrement :

$$||(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}||_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} ||(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}||_\infty.$$

$||.||_\infty$ est, d'après le cours, sur $\mathbb{R}^n$.

6. $\mathrm{N(A)} = 1$, $\mathrm{N(B)} = 1$, $\mathrm{N(A+B)} = 2^{1/p} > 2$ car $\dfrac{1}{p} > 1$, d'où

$$\mathrm{N(A+B)} > \mathrm{N(A)} + \mathrm{N(B)}$$

et N n'est pas une norme car elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire.

Exercice 66

Extremum global sur un convexe, application à la régression linéaire

La première partie de cet exercice fournit une condition suffisante d'extremum global éventuellement strict du second ordre lorsqu'on travaille sur une partie convexe.

1. *Cas d'une variable*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

a) On suppose : $\quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad f''(x) \geqslant 0.$

Justifier que s'il existe $a \in \mathrm{I}$ tel que $f'(a) = 0$, alors f atteint un minimum global en a.

b) Qu'en est-il si : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f''(x) \leqslant 0$?
c) Que dire si l'inégalité vérifiée par f'' est stricte, i.e. $f''>0$ (resp. $f''<0$) sur I ?

2. *Cas de plusieurs variables*
Soit $d \geqslant 2$, U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^d$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
a) *Petites généralités à digérer et savoir retrouver*
i – Soit $a \in \mathrm{U}$ et $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $a+h \in \mathrm{U}$.
Exprimer $f(a+h)$ à l'aide la différentielle $\mathrm{d}f(a)$ et de la hessienne $\mathrm{H}_f(a)$.
ii – On pose $g : [0\,;\ 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(a+th)$. Justifier que
$$g'(0) = \mathrm{d}f(a)(h) \text{ et } g''(0) = h\mathrm{H}_f(a)h^{\mathrm{T}}.$$
b) On suppose, de façon analogue à 1.a), que
$$\forall x \in \mathrm{U}, \quad \mathrm{H}_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$
Soit $a \in \mathrm{U}$. On suppose que a est un point critique de f. Soit $b \in \mathrm{U}$. On pose
$$g : [0\,;\ 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto g((1-t)a+tb).$$
Justifier à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral que
$$g(1) = g(0) + \int_0^1 (1-t)g^{(2)}(t)\mathrm{d}t,$$
et en déduire que g atteint un minimum global en a.
c) Qu'en est-il si : $\forall x \in \mathrm{U}, \quad \mathrm{Sp}\big(\mathrm{H}_f(x)\big) \in \,]-\infty\,;\ 0]$?
d) Que dire si de plus $\mathrm{H}_f(x)$ est définie pour tout x de U ?

3. *Application à la régression linéaire par la méthode des moindres carrés*
Soit $n \geqslant 2$. On dispose d'une série statistique $\mathcal{S} = \{(x_i, y_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de n points tels que les x_i ne soient pas tous égaux. On souhaite déterminer une droite $\Delta_{a,b}$ d'équation $y = ax+b$ passant aux plus près des n points de $\mathcal{S}$.
On mesure la distance de $\Delta_{a,b}$ au nuage de points $\mathcal{S}$ par
$$d(a,b) = \sum_{i=1}^n \big(ax_i + b - y_i\big)^2.$$
L'objectif est de trouver, s'ils existent, les réels a et b minimisant cette distance.
a) Faire un dessin et justifier le nom de cette méthode : « *méthode des moindres carrés en y* » , due à Gauβ.
b) On pose, pour $k \in [\![0\,;\ 2]\!]$,
$$s_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \text{ et } t_k = \sum_{i=1}^n x_i^k y_i.$$
Montrer, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $s_2 s_0 - s_1^2 > 0$.
c) En déduire que d possède un unique point critique.
d) À l'aide de la question 2., montrer que d possède un minimum global strict, atteint en un unique point (a_0, b_0) que l'on explicitera à l'aide des s_k et t_k.

Solution (**Ex.66 –** *Extremum global sur un convexe, application à la régression linéaire*)

1. *Cas d'une variable*
a) f' est croissante et s'annule en a donc est négative sur $\mathrm{I} \cap \,]-\infty\,;\ a]$ et positive sur $\mathrm{I} \cap [a\,;\ +\infty[$, donc f est décroissante sur $\mathrm{I} \cap \,]-\infty\,;\ a]$ et croissante sur $\mathrm{I} \cap [a\,;\ +\infty[$.
Ainsi f atteint un minimum global en a.
b) Si : $f'' \leqslant 0$ et $f'(a) = 0$, alors f atteint un maximum global en a.
c) L'extremum en a est alors strict, et par conséquent f atteint cet extremum uniquement en a.

2. *Cas de plusieurs variables*
a) *Petites généralités à digérer et savoir retrouver*
i – $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \dfrac{1}{2}h\mathrm{H}_f(a)h^{\mathrm{T}} + o\left(||h||^2\right)$
ii – On pose $g : [0\,;\ 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(a+th)$.
$g(t) = f(a) + t\mathrm{d}f(a)(h) + \dfrac{t^2}{2}h\mathrm{H}_f(a)h^{\mathrm{T}} + o\left(t^2\right)$ ($\mathrm{d}f(a)$ est linéaire...)
or le développement limité à l'ordre 2 de g en 0 est
$g(t) = g(0) + g'(0)t + g''(0)\dfrac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$.
Par unicité du développement limité d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$,

$g(0) = f(a)$ (fatal), $g'(0) = \mathrm{d}f(a)(h)$ et $g''(0) = h\mathrm{H}_f(a)h^{\mathrm{T}}$.
Notons que $g(t) = g(a + t(b - a)) = g(a + th)$ en posant $h = (b - a)$.
La formule de Taylor avec reste intégral fournit
$g(1) = g(0) + g'(0) \times (1 + 0) + \displaystyle\int_0^1 (1 - t)g^{(2)}(t)\mathrm{d}t$,
$g'(0) = \mathrm{d}f(a)(h) = 0$ puisque a est critique.
Pour $t \in [0\,;\ 1]$, $g^{(2)}(t) = h\mathrm{H}_f(a + th)h^{\mathrm{T}}$.
En effet, pour t fixé dans $[0\,;\ 1]$, quitte à poser $\varphi : x \mapsto g(t+x) = f((a+th)+xh)$, $\varphi''(0) = g''(t) = h\mathrm{H}_f(a+th)h^{\mathrm{T}}$.
Par l'hypothèse sur H_f, $\forall t \in [0\,;\ 1]\,, g''(t) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 (1 - t)g^{(2)}(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.
Ainsi $g(1) \geqslant g(0)$ i.e. $f(b) \geqslant f(a)$.
Ce résultat étant vrai pour tout $b \in \mathrm{U}$, f atteint un minimum global en a.

b) En appliquant ce qui précède à $-f$, on montre que si a est un point critique de f alors f atteint un maximum global en a.

d) En reprenant le raisonnement précédent avec des inégalités strictes car $h\mathrm{H}_f(a)h^{\mathrm{T}} \neq 0$ pour tout $h \neq 0$, on montre que l'extremum en a est alors strict, et par conséquent f atteint cet extremum uniquement en a.

3. *Application*

Soit $n \geqslant 2$. On dispose d'une série statistique $\mathcal{S} = \{(x_i, y_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de n points non tous égaux.
On souhaite déterminer une droite $\Delta_{a,b}$ d'équation $y = ax + b$ passant aux plus près des n points de $\mathcal{S}$.
On mesure la distance de $\Delta_{a,b}$ au nuage de points $\mathcal{S}$ par

$$d(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b - y_i\right)^2.$$

L'objectif est de trouver, s'ils existent, les réels a et b minimisant cette distance.

a) On projette verticalement (suivant l'axe de y) les point sur $\Delta_{a,b]}$ et d est la somme des carrés des distances, on cherche à minimiser les carrés des distances en y.

b) $s_2 s_0 - s_1^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = ||\mathrm{X}||^2 . ||\mathrm{U}||^2 - \left(\mathrm{X} \mid \mathrm{U}\right)^2$ où $\mathrm{X} = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathrm{U} = (1)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Comme les x_i ne sont pas tous identiques, X et U ne sont pas colinéaires, donc l'inégalité de Cauchy-Scwarz assure que $s_2 s_0 - s_1^2 > 0$.

c) Pour tout (a, b) de $\mathbb{R}^2$,
$d(a, b) = s_2 a^2 + s_0 b^2 + 2s_1 ab - 2t_1 a - 2t_0 b + \displaystyle\sum_i y_i^2$
$\nabla d(a, b) = (2s_2 a + 2s_1 b - 2t_1, 2s_0 b + 2s_1 a - 2t_0)$
$\nabla d(a, b) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} s_2 a + s_1 b = t_1 \\ s_1 a + s_0 b = t_0 \end{cases}$
Le déterminant de ce système est $s_2 s_0 - s_1^2 \neq 0$ donc il admet un unique solution. d possède un unique point critique (a_0, b_0).

d) Pour tout (a, b) de $\mathbb{R}^2$,
$\mathrm{H}_d(a, b) = \begin{pmatrix} 2s_2 & 2s_1 \\ 2s_1 & 2s_0 \end{pmatrix}$ donc $\det(\mathrm{H}_d(a, b)) = 4(s_2 s_0 - s_1^2) > 0$ et $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{H}_d(a, b)) = 2(s_2 + s_0) = 2\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n\right) > 0$.
Donc les valeurs propres de $\mathrm{H}_d(a, b)$ sont strictement positives :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{H}_d(a, b) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$$

donc d atteint un minimum global strict en son point critique, strict car s'il était atteint en un autre point, cet autre point serait un point critique, ce qui est impossible.
La résolution du système donne

$$a_0 = \frac{s_0 t_1 - s_1 t_0}{s_2 s_0 - s_1^2} \quad \text{et} \quad b_0 = \frac{s_0 t_0 - s_1 t_1}{s_2 s_0 - s_1^2}.$$

Chapitre 20

Extremums liés et multiplicateurs de Lagrange

On s'intéresse à la recherche des extremums d'une fonction lorsque les variables elles-mêmes liées par certaines relations, ce qui est souvent le cas dans les problèmes pratiques d'optimisation.

Exercice 67

Extremum lié en réduisant les variables

Soit $\mathrm{I} = [\,0\,;\ +\infty[^2$ et

$$f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 \text{ et } g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y$$

On note $\Sigma = \{(x, y) \in \mathrm{I}/f(x, y) = 1\}$ et $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathrm{I}/g(x, y) = 1\}$.

1. a) Justifier que g atteint un maximum et un minimum sur Σ.

b) Déterminer les extremums de g sur l'ensemble Σ.

c) Pour l'extremum atteint à l'intérieur de I, comparer le gradient de f et celui de g.

2. a) Justifier que g atteint un maximum et un minimum sur Σ.

b) Déterminer les extremums de g sur l'ensemble Σ.

c) Pour l'extremum atteint à l'intérieur de I, comparer le gradient de f et celui de g.

On dit qu'on a déterminé les extremums de f (respectivement g) liés par la contrainte (ou sous la contrainte) $g = 1$ (resp. $f = 1$).

Solution (**Ex.67** – *Extremum lié en réduisant les variables*)

1. a) g est continue et Σ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

b) $(x, y) \in \Sigma \Leftrightarrow (x \in [\,0\,;\ 1]$ et $y = 1 - x)$: il suffit d'étudier

$$h : [\,0\,;\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto g(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

$h(x) = 2(x - 1/2)^2 + \dfrac{1}{2}$

Donc h prend ses valeurs entre $\dfrac{1}{2}$, atteinte en $\dfrac{1}{2}$ et 1 atteinte en 0 atteinte en 0 et en 1.

Le minimum de g sur Σ est $\dfrac{1}{2}$ atteint en $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ et son maximum est 1 atteint en $(0, 1)$ et en $(1, 0)$.

c) $\nabla f(1/2, 1/2) = (1, 1)$ et $\nabla g(1/2, 1/2) = (1, 1)$: ces deux gradients sont égaux.

2. a) f est continue donc atteint un maximum et un minimum sur le fermé borné $\mathcal{S}$.

b) Déterminer les extremums de g sur l'ensemble Σ.

c) Pour l'extremum atteint à l'intérieur de I, comparer le gradient de f et celui de g.

d) $(x, y) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (x \in [\,0\,;\ 1]$ et $y = \sqrt{1 - x^2})$: il suffit d'étudier

$$h : [\,0\,;\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto g(x, 1 - x) = x + \sqrt{1 - x^2}.$$

$h'(x) = 1 + \dfrac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > x^2 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Donc h prend ses valeurs entre 1, atteinte en 0 et en 1, et $\sqrt{2}$ atteinte en $1/\sqrt{2}$.

Le minimum de f sur $\mathcal{S}$ est 1 atteint en $(0, 1)$ et en $(1, 0)$, et son maximum est $\sqrt{2}$ atteint en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

e) $\nabla f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $\nabla g(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (1, 1)$: ces deux gradients sont proprtionnels.

Exercice 68

Multiplicateur de Lagrange pour une contrainte

Dans cette approche, on admettra quelques résultats de géométrie différentielle liés aux (hyper-)plans tangents à une (hyper-)surface. Pour mieux visualiser cela dans l'espace usuel de la géométrie classique, on peut omettre le préfixe « *hyper* » dans les énoncés.
On travaille dans $\mathbb{R}^n$ et pour tout x de R^n, on note $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ses coordonnées dans la base canonique, de sorte que

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Soit Ω un ouvert de R^n, et $f,g:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points de Ω satisfaisant la contrainte $g=0$:

$$\mathcal{C}=\{x\in\Omega/g(x)=0\}\,.$$

On s'intéresse aux points de Ω où f atteint un extremum sous la contrainte $g=0$, autrement dit aux extremums locaux de la restriction de f à $\mathcal{C}$.
Visualisation : $\mathcal{C}$ peut être vue comme une hypersurface[1] de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que a est un point où f atteint un extremum sous la contrainte $g=0$, vérifiant $\nabla g(a)\neq 0$ (a est un point *régulier*[2]).
Soit γ un arc dérivable tracé sur $\mathcal{C}$ passant par a à dérivée non nul en ce point. Autrement dit, soit un intervalle ouvert I et

$$\gamma:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}^n \text{ dérivable, tel que}$$

$$\begin{cases}\forall t\in\mathrm{I},\quad g\big(\gamma(t)\big)=0 \quad (\text{qui traduit } \gamma(\mathrm{I})\subset\mathcal{C} \text{ i.e. } \gamma \text{ tracé sur } \mathcal{C})\\ \exists t_0\in\mathrm{I},\gamma(t_0)=a \quad (\text{qui traduit « } \gamma \text{ passe par } a)\\ \gamma'(t_0)\neq 0 \quad (\text{qui traduit que le vecteur tangent est non nul})\end{cases}$$

a) Justifier que $\nabla g(a)\perp\gamma'(t_0)$.
b) En considérant $h:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R},t\longmapsto f\circ\gamma(t)$, montrer que $\nabla f(a)\perp\gamma'(t_0)$.

On note $\mathcal{H}_a$ l'hyperplan tangent à l'hypersurface $\mathcal{C}$ en a.
On admet :

① comme l'arc γ est tracé sur $\mathcal{C}$, son vecteur tangent $\gamma'(t_0)$ appartient à $\mathcal{H}_a$;

② lorsqu'on considère tous les arcs γ possibles satisfaisant les hypothèses précédentes, les vecteurs tangents $\gamma'(t_0)$ parcourt $\mathcal{H}_a$ tout entier. Dit autrement, tout vecteur de $\mathcal{H}_a$ peut être obtenu comme vecteur tangent à un arc γ passant par a.

c) Justifier que $\nabla g(a)$ est orthogonal à $\mathcal{H}_a$ (donc[3] à l'hyperplan tangent en a à l'hypersurface définie par $g=0$).
d) Justifier de même que $\nabla f(a)\in\big(\mathcal{H}_a\big)^{\perp}$.
e) En déduire l'existence d'un réel λ tel que

$$\nabla f(a)=\lambda\nabla g(a).$$

Le réel λ est appelé **multiplicateur** de Lagrange.

Bilan : Si a est un extremum de f sous la contrainte $g=0$ tel que $\nabla g(a)\neq 0$, alors il existe un *multiplicateur de Lagrange* λ tel que $\nabla f(a)=\lambda\nabla g(a)$.
Un point a de Ω vérifiant

$$\begin{cases}g(a)=0\\ \exists\lambda\in\mathrm{R},\quad \nabla f(a)=\nabla g(a)\end{cases}$$

1. Comme pour le terme hyperplan, ce terme généralise la notion de surface dans l'espace. Ainsi une hypersurface d'un plan est une courbe, une hypersurface de l'espace géométrique de dimension 3 est une surface (dans le sens usuel du terme). Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, l'hypersurface d'équation $y-x^2=0$ est une parabole, et dans $\mathbb{R}^3$, l'hypersurface d'équation $x^2+y^2-1=0$ est la sphère unité.

2. Lorsque le point a de l'hypersurface $\mathcal{C}$ vérifie $\nabla g(a)$, on dit que a est régulier ou que l'hypersurface $\mathcal{C}$ est lisse en a. En particulier, $\mathcal{C}$ admet un hyperplan tangent en a.

3. Cette propriété est déjà manifeste pour un plan de l'espace. Si $ax+by+cz=d$ est l'équation d'un plan P, alors $\mathrm{P}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/f(x,y,z)=0\big\}$ où $f(x,y,z)=ax+by+cz-d$. On a alors $\nabla f=(a,b,c)$ et il est de notoriété publique que le vecteur (a,b,c) est normal au plan P.

est appelé **point critique de f sous la contrainte g=0**.

Ainsi, être un point critique de f sous la contrainte $g = 0$ est une condition nécessaire d'extremum sous la contrainte... mais pas suffisante.

2. Reprendre l'exercice précédent et déterminer les points critiques pour les fonctions et les contraintes de chacune des deux questions.

3. On généralise l'exercice précédent à $n \geqslant 2$ quelconque.
Soit $\mathrm{J} =]\,0\,;\ +\infty[^n$, et

$$f : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ et } g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

a) Déterminer les points critiques pour f sous la contrainte $g = 1$ puis les points critiques de g sous la contrainte $f = 1$.

b) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, conclure quant à la nature de ces points.

Solution (**Ex.68** – *Multiplicateur de Lagrange pour une contrainte*)

1. a) Soit $k = g \circ \gamma$. k est dérivable par composition. On a d'une part :
$\forall t \in \mathrm{I}, k'(t) = \mathrm{d}g(\gamma(t))(\gamma'(t)) = < \nabla g(\gamma(t)), \gamma'(t) >$,
et d'autre part $k' = 0$ puisque $g \circ \gamma = 0$ par hypothèse.
Donc : $\forall t \in \mathrm{I}, \quad < \nabla g(\gamma(t)), \gamma'(t) >= 0$ et en particulier en $t = t_0$: $< \nabla g(a), \gamma'(t_0) >= 0$, i.e. $\nabla g(a) \perp \gamma'(t_0)$.

b) h est dérivable par composition. On a d'une part :
$\forall t \in \mathrm{I}, h'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t)) = < \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) >$,
et d'autre part $h'(t_0) = 0$ puisque f atteignant en a un extremum sous la contrainte $g = 0$, h atteint un extremum en t_0 vu que $\gamma(t_0) = a$ et $\gamma(t)$ satisfait la contrainte $g = 0$ pour tout t.
Donc : $< \nabla f(a), \gamma'(t_0) >= 0$, i.e. $\nabla f(a) \perp \gamma'(t_0)$.

c) $\nabla g(a)$ est orthogonal à tout vecteur $\gamma'(t_0)$ pour tout arc γ et tout vecteur de $\mathcal{H}_a$ est un $\gamma'(t_0)$ pour au moins un arc γ, donc $\nabla g(a)$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{H}_a$: $\nabla g(a) \in \left(\mathcal{H}_a\right)^{\perp}$.

d) Pour exactement les mêmes raisons, $\nabla f(a) \in \left(\mathcal{H}_a\right)^{\perp}$.

e) $\mathcal{H}_a$ étant un hyperplan, $\dim\left(\left(\mathcal{H}_a\right)^{\perp}\right) = 1$, donc $\nabla f(a)$ et $\nabla g(a)$ sont colinéaires, et comme par hypothèse $\nabla g(a) \neq 0$, il existe un réel λ tel que

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

2. • g sous la contrainte $f = 1$:
Notons que $f = 1$ au lieu de $f = 0$ ne change que peu de chose : on peut considérer $f_1 = f - 1$ et alors $f = 0$ devient $f_1 = 0$, tandis que $\nabla f = \nabla f_1$.
Soit $a = (x, y) \in]\,0\,;\ +\infty[^2 = \overset{\circ}{\mathrm{I}}$ (on a raisonné sur des ouverts dans tout ce qui précède !). On a $\nabla f(a) = (2x, 2y) \neq 0$.

$$\begin{cases} f(a) = 1 \\ \exists \lambda \in \mathrm{R}, \quad \nabla g(a) = \lambda \nabla f(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ \exists \lambda \in \mathrm{R}, \quad (1, 1) = \lambda(2x, 2y) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$: on retrouve le seul point intérieur à I ayant amené un extremum de g lié par $f = 1$.

• f sous la contrainte $g = 1$:
Soit $a = (x, y) \in]\,0\,;\ +\infty[^2 = \overset{\circ}{\mathrm{I}}$. On a $\nabla g(a) = (1, 1) \neq 0$.

$$\begin{cases} g(a) = 1 \\ \exists \lambda \in \mathrm{R}, \quad \nabla f(a) = \lambda \nabla g(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \exists \lambda \in \mathrm{R}, \quad (2x, 2y) = \lambda(1, 1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/\sqrt{2} \\ y = 1/\sqrt{2} \end{cases}$: on retrouve le seul point intérieur à I ayant amené un extremum de f lié par $g = 1$.

3. a) Les mêmes raisonnements que dans la question précédente conduisent à $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, donc
• l'unique point critique pour f sous la contrainte $g = 1$ est

$$x = \frac{1}{n}(1, 1, \ldots, 1);$$

- l'unique point critique pour g sous la contrainte $f = 1$ est

$$x = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \dots, 1);$$

b) • Soit $u = \frac{1}{n}(1, 1, \dots, 1)$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{J}$ tel que $g(x) = 1$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à u et x donne $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ donc $\frac{1}{n} \leqslant f(x)$ i.e. $f(u) \leqslant f(x)$: sous la contrainte $g = 1$, le minimum de f est $f(u) = \frac{1}{n}$ et est atteint en u, et uniquement en u par a).
• Soit $u = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \dots, 1)$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{J}$ tel que $f(x) = 1$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à u et x donne $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ donc $\frac{1}{n}g(x)^2 \leqslant 1$ i.e. $g(x) \leqslant g(u)$: sous la contrainte $f = 1$, le maximum de g est $g(u) = \sqrt{n}$ et est atteint en u, et uniquement en u par a).

Exercice 69

Une démonstration du théorème spectral

Le théorème spectral assure que tout endomorphisme symétrique u de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable. On le démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, le point clé de l'hérédité étant l'existence d'une valeur propre réelle. Démontrons ce point clé.
On suppose $n \geqslant 2$ et on se donne un endomorphisme symétrique u de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^n$.
Soit $\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R}^n / \, ||x|| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \langle u(x), x\rangle$ et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto ||x||^2 - 1$.

1. Justifier que f atteint un maximum sur $\mathcal{S}$.

2. Justifier que $\nabla f(x) = 2u(x)$ et $\nabla g(x) = 2x$.

3. En déduire, à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange, que u admet une valeur propre réelle λ.

Solution (**Ex.69 –** *Une démonstration du théorème spectral*)

1. f est continue car u est linéaire et $\mathcal{S}$ est fermée (puisque $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n / \, ||x|| = 1\}$ et $||.||$ est continue) et bornée. Donc f est bornée et atteint un maximum sur $\mathcal{S}$.

2. Comme u est linéaire et $\langle ., .\rangle$ est bilinéaire, la différentiation donne
$$\mathrm{d}f(x).h = \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), x\rangle = 2\,\langle u(x), h\rangle$$
car u est symétrique. Cette dernière écriture montre que $\nabla f(x) = 2u(x)$.
Comme g est polynomiale, on a directement $\nabla g(x) = (2x_1, \dots, 2x_n) = 2x$.

3. Notons x un vecteur de $\mathcal{S}$ où f atteint son maximum. Il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \text{ donc } u(x) = \lambda x.$$

Comme $x \in \mathcal{S}$, x est non nul et λ est une valeur propre de u.
On peut même justifier que λ est la plus grande valeur propre de u...

Exercice 70

Généralisation à p contraintes

On se donne cette fois p contraintes indépendantes et on cherche les extremums d'une fonction liés à ces p contraintes.
Concrètement, soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et

$$f, g_1, g_2, \dots, g_p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$p + 1$ fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall x \in \Omega, \quad (\nabla g_1(x), \nabla g_2(x), \dots, \nabla g_p(x)) \text{ est libre.}$$

Cette dernière hypothèse exprime l'indépendance des contraintes.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points vérifiant les contraintes :

$$\mathcal{C} = \{x \in \Omega / g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \dots, g_p(x) = 0\}.$$

On peut aussi voir $\mathcal{C}$ comme une intersection d'hypersurfaces :

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{p} \{x \in \Omega / g_i(x) = 0\}.$$

De même qu'en général l'intersection de deux surfaces est une courbe, et l'intersection de deux courbes sont des points, on **admet** que la condition sur les ∇g_i assure que $\mathcal{C}$ est un objet de dimension[4] $n-p$, et que son sous-espace tangent en un point a est[5]

$$\mathcal{T} = \bigcap_{i=1}^{p} \left(\nabla g_i(a)\right)^{\perp}.$$

On **admet**, et on le justifierait que la même façon en considérant des arcs γ parcourant $\mathcal{C}$, que si f admet en a un extremum lié à la contrainte $\mathcal{C}$, alors

$$\nabla f(a) \in \mathcal{T}^{\perp}.$$

1. Montrer que, si F_1, F_2, …, F_p sont p sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie m, alors

$$\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i^{\perp} = \left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i\right)^{\perp}.$$

2. En déduire l'existence de p scalaires $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ tels que

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \lambda_2 \nabla g_i(a) + \dots + \lambda_p \nabla g_i(a).$$

Les réels $\lambda_i (1 \leqslant i \leqslant p)$ sont appelés **multiplicateurs** de Lagrange.

Exercice 71

Inégalité de Hadamard

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on souhaite établir l'inégalité de Hadamard

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}^n)^n, \quad |\det(u_1, u_2, \dots, u_n)| \leqslant ||u_1||\,||u_2|| \dots ||u_n||$$

où $||.||$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour $n = 1$?

2. On s'intéresse au cas $n = 2$: objectif

$$\forall (u, u') \in \mathbb{R}^2, \quad \left|\det(u, u')\right| \leqslant ||u||\,\left|\left|u'\right|\right|$$

où la norme employée est la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$.

Pour $v = (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, on pose $f(v) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{v = (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 / \; ||(x, y)|| = 1 \text{ et } \left|\left|(x', y')\right|\right| = 1\right\}.$$

On pose enfin, toujours pour $v = (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, $g_1(v) = x^2 + y^2 - 1$ et $g_2(v) = x'^2 + y'^2 - 1$

a) Justifier que f atteint un minimum et un maximum sur $\mathcal{C}$.

4. Les notions « objet » et « dimension » introduits ici sont étudiés en *géométrie différentielle*. L'objet en question ici qui généralise les notions de courbes et surfaces s'appelle une *variété différentiable*, et celle de dimension généralise la dimension définie pour les espaces vectoriels, mais c'est une bien longue histoire...

5. Pour $p = 1$, on retrouve $\mathcal{H}_a = \left(\nabla g(a)\right)^{\perp}$ de l'exercice précédent.

b) En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, montrer que les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$ ne peuvent être atteints que si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ forment une base orthonormale.
c) En déduire les extremums de f sur $\mathcal{C}$.
d) En déduire l'inégalité de Hadamard et préciser les cas d'égalité.

3. On s'intéresse maintenant au cas général avec $n \geqslant 3$.
On utilise la version *différentielles* plutôt que *gradients* des multiplicateurs de Lagrange, dont l'énoncé est le suivant :

> Soit Ω un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, $g_1, g_2, \ldots, g_p$ et f des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
> Alors une condition nécessaire pour que f admette en un point u de Ω un extremum sous la contrainte
> $$g_1 = 0, g_2 = 0, \ldots, g_{p-1} = 0 \text{ et } g_p = 0$$
> et tel que les différentielles $\mathrm{d}g_i(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ soient linéairement indépendantes est
> $$\exists (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \mathrm{d}f(u) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathrm{d}g_i(u).$$

Soit $\mathrm{E} = (\mathbb{R}^n)^n$. Soit
$$\mathcal{C} = \{u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E} / \forall \in [\![1\,;\, n]\!]\,, ||u_i|| = 1\}$$
Soit pour tout i de $[\![1\,;\, n]\!]$
$$g_i : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, u = (u_1, \ldots, u_n) \longmapsto ||u_i||^2 - 1$$
et
$$f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, u = (u_1, \ldots, u_n) \longmapsto \det(u_1, \ldots, u_n)\,.$$

a) Justifier que f atteint un maximum sur $\mathcal{C}$, et que ce maximum est au moins égal à 1.
b) Justifier que f et les g_i sont de classe $\mathcal{C}^1$.
On pourra utiliser les projections $p_i : u = (u_1, \ldots, u_n) \longmapsto u_i$.
c) Montrer que, pour tout i de $[\![1\,;\, n]\!]$, et tout u et h de E,
$$\mathrm{d}g_i(u)(h) = 2\langle u_i, h_i\rangle\,.$$
d) Soit u un point de $\mathcal{C}$. Justifier que les formes linéaires $\mathrm{d}g_i(u)$ pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ sont linéairement indépendantes.
e) Soit $u \in \mathrm{E}$. On suppose que f atteint un maximum sous la contrainte $\mathcal{C}$ en u. On note $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les multiplicateurs de Lagrange liant la différentielle de f en u à celles des $g_i(u)$.
Justifier que, pour tout i de $[\![1\,;\, n]\!]$, et tout $h_i \in \mathbb{R}^n$,
$$f(u_1, \ldots, u_{i-1}, h_i, u_{i+1}, \ldots, u_n)(0, \ldots, 0, h_i, 0, \ldots, 0) = \lambda_i \langle u_i, h_i\rangle\,.$$
f) En déduire que les multiplicateurs λ_i sont tous strictement positifs, puis que $(u_1, \ldots, u_n)$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
g) En déduire l'inégalité de Hadamard et préciser les cas d'égalité.

Solution (**Ex.71** – *Inégalité de Hadamard*)

1. Si $n = 1$, on a $\forall u \in \mathbb{R}, \quad |\det(u)| = |u| = ||u||$ donc l'inégalité est vérifiée et est une égalité.

2. a) $\mathcal{C}$ est fermée et bornée donc f qui est polynomiale donc continue atteint un minimum et un maximum sur $\mathcal{C}$.
b) f, g_1 et g_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ et
$\nabla f(v) = (y', -x', -y, x)$, $\nabla g_1(v) = (2x, 2y, 0, 0)$ et $\nabla g_2(v) = (0, 0, 2x', 2y')$.
La condition nécessaire d'extremum sous contrainte s'écrit
$$(y', -x', -y, x) = \lambda(2x, 2y, 0, 0) + \mu(0, 0, 2x', 2y').$$
On a alors $xx' + yy' = x(-2\lambda y) + y2\lambda x) = 0$ donc $u \perp u'$.
Comme u et u' sont unitaires puisque dans $\mathcal{C}$, (u, u') est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.

c) Réciproquement, si (u, u') est orthonormale, $f(v) = \pm 1$ selon que cette base est directe ou indirecte. Comme par 1.a) les extremums sont atteints, j'en déduis que les extremums de f dans $\mathcal{C}$ sont -1 et 1, atteints si, et seulement si, (u, u') est orthonormale indirecte ou indirecte respectivement.

3. • Si u ou u' est nul, alors l'inégalité de Hadamard est vérfifiée : c'est même une égalité.

• Si ni u ni u' ne sont nuls, alors avec $k = \dfrac{1}{||u||}$ et $k' = \dfrac{1}{||u'||}$, puisque ku et $k'u'$ sont unitaires,

$$\left|\det\left(ku, k'u'\right)\right| \leqslant ||ku||\,\left||k'u'\right||$$

Par bilinéarité du déterminant et homogénéité de la norme,

$$\left|\det\left(u, u'\right)\right| \leqslant ||u||\,\left||u'\right||$$

• L'étude des extremums liés montre qu'il y a égalité si, et seulement si, ils forment une famille orthogonale (ce qui inclut le cas où l'un d'eux est nul).

4. a) f est continue et $\mathcal{C}$ est une partie fermée bornée donc f y atteint un maximum. Et en prenant $e = (e_1, \ldots, e_n)$ les n vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $f(e) = 1$ et $e \in \mathcal{C}$ ce maximum vaut au moins 1.

b) Par n-linéarité du déterminant, f est de classe $\mathcal{C}^1$.
$||.||^2$ est polynomiale dans de classe $\mathcal{C}^1$ sur R^n et les projections $p_i : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{R}^n$ sont linéaires donc de classe $\mathcal{C}^1$. Par composition, chaque $g_i = ||.||^2 \circ p_i - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

c) $g_i : u \longmapsto \langle p_i(u), p_i(u)\rangle - 1$ donc par différentiation de la forme bilinéaire *produit scalaire*, et puisque les p_i sont linéaires :
$\mathrm{d}g_i(u)(h) = \langle p_i(h), p_i(u)\rangle + \langle p_i(u), p_i(h)\rangle = 2\,\langle u_i, h_i\rangle$.

d) Supposons que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j \mathrm{d}g_j(u) = 0 \quad (\heartsuit)$.

Soit $i \in [[\,1\,;\ n]]$. En prenant $h = (0, \ldots, 0, u_i, 0, \ldots, 0)$ (u_i en i-ème place), $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j\,\langle u_i, h_j\rangle = 2\mu_i\,||u_i||^2 = 2\mu_i$ et $(\heartsuit)$ donne $\mu_i = 0$.
Ainsi la famille de formes linéaire $\big(\mathrm{d}g_i(u)\big)_i$ est libre.

e) On a : $\mathrm{d}f(u_1, \ldots, u_n)(h_1, \ldots, h_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\langle u_i, h_i\rangle$.
Comme le déterminant est n-linéaire par rapport à ses colonnes v_i,
$\mathrm{d}f(u_1, \ldots, u_n)(0, \ldots, 0, h_i, 0, \ldots, 0) = \det(u_1, \ldots, u_{i-1}, h_i, u_{i+1}, \ldots, u_n)$.
On en déduit $f(u_1, \ldots, u_{i-1}, h_i, u_{i+1}, \ldots, u_n) = \lambda_i\,\langle u_i, h_i\rangle$

f) Soit $i \in [[\,1\,;\ n]]$.
En prenant $h_i = u_i$ dans l'égalité précédente, $f(u) = \lambda_i\,||u_i||^2 = \lambda_i$, et d'après a), $f(u) \geqslant 1$, donc $\lambda_i \geqslant 1$.
Et en prenant $h_i = u_j$ avec $j \neq i$,
$f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_n) = 0 = \lambda_i\,\langle u_i, u_j\rangle$ avec $\lambda_i \neq 0$, donc $\langle u_i, u_j\rangle = 0$.
Ceci étant valable pour tout i de $[[\,1\,;\ n]]$, la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est orthogonale. Comme les u_i sont tous unitaires puisque $u \in \mathcal{C}$, la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

g) • Le maximum de f sur $\mathcal{C}$ est obtenu pour une base orthonormale de R^n. Or si u est une telle base, $f(u) = \pm 1$ selon que u est directe ou indirecte. Donc le maximum de f sur $\mathcal{C}$ est vaut 1 et est atteint pour toute base orthonormale directe de $\mathbb{R}^n$.
Ainsi : $\forall u \in \mathcal{C}, \quad f(u) \leqslant ||u_i|| \ldots ||u_n||$.
Quitte à remplacer u_i par $-u_i$, on a :
$\forall u \in \mathcal{C}, \quad -f(u) \leqslant ||u_i|| \ldots ||u_n||$.
Donc : $\forall u \in \mathcal{C}, \quad |f(u)| \leqslant ||u_i|| \ldots ||u_n||$.
• Soit maintenant une famille $u = (u_1, \ldots, u_n)$ quelconque de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Si l'un des u_i est nul, l'inégalité de Hadamard est vérifiée : c'est l'égalité $0 = 0$.
Si tous les u_i sont non nuls, posons : $\forall i \in [[\,1\,;\ n]]\,, u'_i = \dfrac{1}{||u_i||} u_i$, et $u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$. Alors u' vérifie $\mathcal{C}$. Donc $|f(u')| \leqslant 1$, i.e. $\left|\det(u)'\right| \leqslant 1$.
Par linéarité du déterminant par rapport à ses n colonnes,

$$|\det(u)| \leqslant ||u_1|| \ldots ||u_n||\,.$$

• Dans ce dernier cas, c'est-à-dire si aucun des u_i n'est nul, il y a égalité si, et seulement si, u' est une base orthonormale, donc si, et seulement si, u est une base orthogonale.
• On conclut comme dans le cas $n = 2$ qu'il y a égalité dans l'inégalité de Hadamrd si, et seulement si, la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est orthogonale.

Chapitre 21

Variation des constantes et wronskien

Dans ce paragraphe, on étudie les équations différentielles linéaires scalaires. Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle ouvert éventuellement non borné I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Par convention, la variable de ces fonctions sera notée t, et on l'ometra fréquemment lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Ainsi « $t^2y' - 2ty = f$ » signifiera « $t^2y'(t) - 2ty(t) = f(t)$ ».

De même, l'intervalle de définition des fonctions ne sera pas systématiquement rappelé. Ainsi, si a, b, c et y sont définies sur un intervalle I,

$$\text{« } y'' + ay' + by = c \text{ »}$$

doit s'interpréter

$$\text{« } \forall t \in \mathrm{I}, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \text{ ».}$$

Enfin, pour désigner une primitive quelconque de la fonction continue $f : t \mapsto f(t)$, on écrira éventuellement

$$\mathrm{F} : t \mapsto \int^t f(s)\mathrm{d}s$$

en vertu du théorème fondamental de l'analyse, puisque la borne inférieure de l'intervalle ne sert qu'à fixer une constante.

Exercice 72

Wronskien : définition et propriétés essentielles

Soit $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continues. On considère l'équation différentielle homogène

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\mathcal{H})$$

d'inconnue $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable.
On note H l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$.
Soit y_1 et y_2 deux solutions de $(\mathcal{H})$. On appelle *wronskien* de y_1 et y_2 la fonction définie sur I par

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

autrement dit

$$w : \mathrm{I} \to \mathbb{K}, \quad t \mapsto y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t).$$

1. *Annulation du wronskien – I*
 a) Justifier que si y_1 et y_2 sont liées, alors w est nul sur I.
 b) Soit $t_0 \in \mathrm{I}$. Soit $\varphi : \mathrm{H} \to \mathbb{K}^2, y \mapsto \big(y(t_0); y'(t_0)\big)$.
 Justifier que φ est un isomorphisme.
 En déduire que si (y_1, y_2) est libre, alors $w(t_0) \neq 0$.
 c) Justifier que (y_1, y_2) est système fondamental de solutions de $(\mathcal{H})$ si, et seulement si, il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $w(t_0) \neq 0$, et que dans ce cas, on a : $\forall t \in \mathrm{I}, \quad w(t) \neq 0$.

2. *Annulation du wronskien – II*
 On se propose de retrouver la propriété précédente par une explicitation du wronskien.
 a) Former une équation différentielle du premier ordre dont w est une solution.

b) En déduire que pour tout t_0 fixé dans I, on a

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad w(t) = w(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right).$$

c) Retrouver alors qu'on a l'alternative :
- soit $\forall t \in \mathrm{I}, w(t) = 0$;
- soit $\forall t \in \mathrm{I}, w(t) \neq 0$.

Solution (**Ex.72 –** *Wronskien : définition et propriétés essentielles*)

1. *Annulation du wronskien – I*

a) Supposons pour fixer les idées qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $y_2 = \lambda y_1$. Alors pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix}$
donc $w(t) = 0$.

b) On sait que $\dim(\mathrm{H}) = 2 = \dim \mathbb{K}^2$.
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, $(\mathcal{H})$ admet une unique solution y vérifiant $y(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$, *i.e.* $\varphi(y) = 0$. Comme la fonction nulle vérifie cette propriété, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est réduit à $\{0\}$ et φ est injectif. Avec l'égalité des dimensions, cela prouve que φ est un isomorphisme.
Si (y_1, y_2) est libre, c'est une base de H et son image $(\varphi(y_1), \varphi(y_2))$ par l'isomorphisme φ est une base de $\mathbb{K}^2$.
Donc $\det\left(()\, \varphi(y_1), \varphi(y_2)\right) \neq 0$. Or $\det\left(()\, \varphi(y_1), \varphi(y_2)\right) = w(t_0)$ par définition de φ et w. Donc $w(t_0) \neq 0$.

c) (y_1, y_2) est système fondamental de solutions de $(\mathcal{H})$ si, et seulement si, (y_1, y_2) est une base de $(\mathcal{H})$ – et comme $\dim(\mathrm{H}) = 2$ – si, et seulement si, (y_1, y_2) est une famille libre de $(\mathcal{H})$.
a) et b) donnent alors la propriété voulue.

2. *Annulation du wronskien – II*

On se propose de retouver la propriété précédente par une explicitation du wronskien.

a) Former une équation différentielle du premier ordre dont w est une solution.
On observe que : $\forall t \in \mathrm{I},\ w'(t) = y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1''(t)$
$$\begin{aligned} w'(t) &= y_1(t)\big(-a(t)y_2'(t) - b(t)y_2(t)\big) - y_2(t)\big(-a(t)y_1'(t) - b(t)y_1(t)\big) \\ &= -a(t)w(t) \end{aligned}$$
Donc w est solution différentielle linéaire homogène d'ordre 1

$$w' + aw = 0.$$

b) On sait que les solutions de cette équation sont toutes les fonctions

$$t \mapsto k \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right)$$

où k est une constante de $\mathbb{K}$.
Donc

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad w(t) = w(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right).$$

c) Soit $t_0 \in \mathrm{I}$.
- Si $w(t_0) = 0$, alors $w = 0$ sur I.
- Si $w(t_0) \neq 0$, alors $w \neq 0$ sur I puisqu'une exponentielle ne s'annule jamais.

Cqfd.

Exercice 73

Recherche d'une seconde solution à $(\mathcal{H})$

1. *Un exemple –*

a) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. À quelle condition

$$y'' + ay' + by = 0$$

admet-elle $t \mapsto \exp(\alpha t)$ comme solution ?

b) On considère sur $\mathrm{I} =]\,0\,;\ +\infty[$ l'équation

$$y'' - \left(1 + \frac{1}{t}\right) y' + \frac{1}{t} y = 0 \quad (\mathcal{H})$$

Donner une solution y_1 (quasi-)évidente de $(\mathcal{H})$.

c) Soit y_2 une solution de $(\mathcal{H})$ et w le wronskien de y_1 et y_2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que

$$w : t \mapsto kt\mathrm{e}^{-t}.$$

d) En déduire une solution y_2 de $(\mathcal{H})$, indépendante de y_1.

e) Donner les solutions de $(\mathcal{H})$.

2. On suppose que y_1 est une solution ne s'annulant pas sur I de l'équation

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\mathcal{H})$$

Soit $t_0 \in \mathrm{I}$ et $w : t \mapsto \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right)$.

a) Montrer que

$$y_2 : t \mapsto y_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{w(u)}{y_1^2(u)} \mathrm{d}u$$

est une solution de $(\mathcal{H})$ linéairement indépendante de y_1.

b) *Explication –*
Expliquer l'origine de cette formule, en analysant l'exemple initial.

3. *Application –*
On considère sur $\mathrm{I} =]\,1\,;\ +\infty[$ l'équation

$$2t(t+1)y'' - (t-1)y' + y = 0 \quad (\mathcal{H})$$

où $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable.

a) Déterminer les solutions polynomiales de $(\mathcal{H})$.

b) Déterminer deux constantes a et b telles que

$$\forall u \in \mathrm{I}, \quad \frac{u^2+1}{(u^2-1)^2} = \frac{a}{(u-1)^2} + \frac{b}{(u+1)^2}.$$

c) Déterminer un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H})$

i – en suivant la démarche de la première question ;

ii – en appliquant la formule de la deuxième question.

Solution (**Ex.73 –** *Recherche d'une seconde solution à* $(\mathcal{H})$)

1. *Un exemple –*

a) $y : t \mapsto \exp(\alpha t)$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ si, et seulement si, $\alpha^2 + \alpha a + b = 0$, puisque y n'est jamais nulle.

b) On observe que $1 + a + b = 0$ donc exp est solution de $(\mathcal{H})$.

c) On sait que w est solution de $w' + aw = 0$, donc qu'il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que

$$w : t \mapsto k\exp(-\mathrm{A}(t))$$

où A désigne une primitive de $a : t \mapsto -1 - \dfrac{1}{t}$.

Donc $w(t) = k\exp(t + \ln(t)) = kt\mathrm{e}^t$.

d) Or $w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$ donne

$$\mathrm{e}^t y_2' - \mathrm{e}^t y_2 = kt\mathrm{e}^t.$$

Comme toute fonction proportionnelle à y_2 est encore solution de l'équation HOMOGÈNE $(\mathcal{H})$, on peut faire l'hypothèse que $k = 1$. D'où :

$$y_2' - y_2 = t \quad (\mathcal{E}).$$

Si on ne voit pas de solution évidente, utilisons la méthode de la variation de la constante et posons $y_2 = \lambda(t)\mathrm{e}^t$ avec λ fonction dérivable sur I. On a : $y_2' = \big(\lambda' + \lambda\big)\mathrm{e}^t$.
y_2 vérifie $(\mathcal{E})$ si, et seulement si, $\lambda'\mathrm{e}^t = t$ si, et seulement si, $\lambda' = t\mathrm{e}^{-t}$.
En intégrant par parties, $\lambda = -(t+1)\mathrm{e}^{-t}$ convient donc $y_2 = -(t+1)$ convient. H étant un espace vectoriel, on peut proposer $y_2 : t \mapsto t + 1$.
Comme on a raisonné par implication, on vérifie réciproquement que $y_2 : t \mapsto t + 1$ est bien solution, clairement indépendante de $y_1 = \exp$.

e) $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}\big(\exp, t \mapsto t+1\big)$.

2. a) Soit $v : t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{w(u)}{y_1^2(u)}\mathrm{d}u$.

Pour plus de lisibilité, j'omets la variable $t(\in \mathrm{I})$. On a :

$y_2 = y_1 v$

$y_2' = y_1'v + y_1\dfrac{w}{y_1^2} = y_1'v + \dfrac{w}{y_1}$

$y_2'' = y_1''v + y_1'\dfrac{w}{y_1^2} + \dfrac{w'}{y_1} - \dfrac{wy_1'}{y_1^2} = y_1''v - \dfrac{aw}{y_1}$

D'où : $y_2'' + ay_2' + by_2 = v\big(y_1'' + ay_1' + by_1\big) - \dfrac{aw}{y_1} + \dfrac{aw}{y_1} = v \times 0 = 0.$

y_2 est bien solution de $(\mathcal{H})$.

De plus : $y_2 = y_1 v$ avec $v' = \dfrac{w}{y_1^2} \neq 0$ par définition de w. Comme v n'est pas constante, y_2 est linéairement indépendante de y_1.

b) Par l'exercice 1, w est le wronskien de y_1 et y_2 donc y_2 est solution de l'équation

$$y_1y' - y_1'y = w \quad (\mathcal{E}).$$

y_1 est une solution évidente non nulle de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$. Cherchons une solution de $(\mathcal{E})$ par variation de la constante. Soit f dérivable et $y = fy_1$.

$$y_1y' - y_1'y = w \iff f'y_1^2 = w \iff f' = \frac{w}{y_1^2}$$

Donc $f : t \mapsto \displaystyle\int^{t} \frac{w(s)}{y_1(s)^2}\mathrm{d}s$ (*i.e.* une primitive de $\dfrac{w}{y_1^2}$) convient.

D'où la formule annoncée.

3. *Application –*

a) Soit y une solution polynomiale non nulle (s'il en existe !) de $(\mathcal{H})$. Je note d son degré et a_d son coefficient dominant. Le coefficient de degré d de $2t(t+1)y'' - (t-1)y' + y$ est

$$2d(d-1)a_d - da_d + a_d.$$

Il vaut 0 puisque y vérifie $(\mathcal{H})$ et comme $a_d \neq 0$, on a :

$$2d^2 - 3d + 1 = 0.$$

La seule solution entière est $d = 1$, donc s'il existe une telle solution, elle est de degré 1.

Posons $y(t) = at + b$.

$$y \in \mathrm{H} \iff -(t-1)a + at + b = 0 \iff (a = 1, b = -1).$$

L'unique solution polynomiale de $(\mathcal{H})$ est $y : t \mapsto t - 1$.

b) $\forall u \in \mathrm{I}, \quad \dfrac{u^2+1}{(u^2-1)^2} = \dfrac{1/2}{(u-1)^2} + \dfrac{1/2}{(u+1)^2}$.

c) Déterminer un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H})$.

Soit $y_1 : t \mapsto t - 1$.

$(\mathcal{H})$ s'écrit sous forme « normalisée »

$$y'' + \frac{1-t}{2t(t+1)}y' + \frac{1}{2t(t+1)}y = 0$$

Une primitive de $a : t \mapsto \dfrac{1-t}{2t(t+1)}$ est $\mathrm{A} : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{2} - \ln(t+1)$, obtenue par la décomposition classique $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$.

Soit y_2 une autre solution indépendante de y_1. Comme y_2 est définie à une constante multiplicative près, je peux choisir pour wronskien

$$w : t \mapsto \exp(-\mathrm{A}(t)) = \frac{t+1}{\sqrt{t}}.$$

i – $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = w \iff (t+1)y_2' - y_2 = w \iff y_2' - \dfrac{1}{t-1}y_2 = \dfrac{t+1}{(t-1)\sqrt{t}}$

L'équation homogène $y_2' - \dfrac{1}{t-1}y_2 =$ admet $t \mapsto t-1$ comme solution.

Par la méthode de variation de la constante, en posant $y(t) = k(t)(t-1)$ où k est dérivable, y est solution particulière si et seulement si $(t-1)k'(t)(t-1) = 0$, *i.e.* $k'(t) = \dfrac{t+1}{(t-1)^2\sqrt{t}}$.

Primitivons cette dernière fonction.

$$\begin{aligned}\int^t \frac{s+1}{\sqrt{s}(s-1)^2}\mathrm{d}s &\overset{s=u^2}{=} 2\int^{\sqrt{t}} \frac{u^2+1}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u\\ &= \int^{\sqrt{t}} \frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}\mathrm{d}u\\ &= -\frac{1}{\sqrt{t}-1}-\frac{1}{\sqrt{t}+1}\\ &= -\frac{2\sqrt{t}}{t-1}\end{aligned}$$

Donc $y(t) = -2\sqrt{t}$ est une solution. Donc $y_2 : t \mapsto \sqrt{t}$ est une solution de $(\mathcal{H})$, indépendante de y_1.

$$\left(t \mapsto t-1, t \mapsto \sqrt{t}\right) \text{ est un système fondamental de solutions de } (\mathcal{H}).$$

ii – Soit j'utilise la formule de la question précédente

$\displaystyle\int^t \frac{w(s)}{y_1(s)^2}\mathrm{d}s = \int^t \frac{s+1}{\sqrt{s}(s-1)^2}\mathrm{d}s = -\frac{2\sqrt{t}}{t-1}$ par le calcul précédent.

Donc $\displaystyle y_2(t) = y_1(t)\int^t \frac{w(s)}{y_1(s)^2}\mathrm{d}s = -2\sqrt{t}$ convient, et on peut simplifier par linéarité en prenant $y_2 : t \mapsto \sqrt{t}$.

$$\left(t \mapsto t-1, t \mapsto \sqrt{t}\right) \text{ est un système fondamental de solutions de } (\mathcal{H}).$$

Remarque : on constate - sans surprise - que les « deux » méthodes conduisent exactement aux mêmes calculs.

Exercice 74

Variation des constantes alias méthode de Lagrange

1. *Un exemple –*

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y'' + y = \cos(t) \quad (\mathcal{E})$$

où $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable.

a) Donner l'ensemble H des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{H})$ associée à $(\mathcal{E})$.

b) Soit $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles quel

$$\lambda' \sin + \mu' \cos = 0.$$

On pose

$$y = \lambda \sin + \mu \cos.$$

Montrer que y est une solution de $(\mathcal{E})$ si, et seulement si,

$$\begin{cases}\lambda' \sin + \mu' \cos = 0\\ \lambda' \cos - \mu' \sin = \cos\end{cases}$$

c) Résoudre $(\mathcal{E})$.

2. *Méthode de Lagrange, ou variation des constantes –*

Soit $a, b, c : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continues. On considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = c \quad (\mathcal{E})$$

d'inconnue $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable.

On note $(\mathcal{H})$ l'équation homogène associée.

Soit y_1 et y_2 formant un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H})$. On note w le wronskien de y_1 et y_2, défini sur I par

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} : t \mapsto y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t).$$

On suppose connus les résultats du premier exercice.

Soit $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles quel

$$\lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0.$$

On pose

$$y = \lambda y_1 + \mu y_2.$$

a) Montrer que y est une solution de $(\mathcal{E})$ si, et seulement si,

$$\begin{cases}\lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0\\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = c\end{cases}$$

b) Justifier que ce dernier système possède un unique solution.
c) Exprimer λ' et μ' à l'aide de c, y_1, y_2 et w.
d) Montrer que si y est solution, alors on peut l'écrire
$$y : t \mapsto \int^t \frac{y_1(s)y_2(t) - y_2(s)y_1(t)}{w(s)} c(s)\mathrm{d}s.$$
e) Réciproquement, soit $t_0 \in \mathrm{I}$ et
$$y : t \mapsto \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)y_2(t) - y_2(s)y_1(t)}{w(s)} c(s)\mathrm{d}s.$$
Vérifier que y est une solution de $(\mathcal{E})$... *prudence dans la dérivation...*
f) Soit $t_0 \in \mathrm{I}$. Justifier que le problème
$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(t_0) = y'(t_0) = 0 \end{cases}$$
possède une unique solution et indiquer cette solution.

3. *Application –*
On ne retient en général pas la formule intégrale précédente et on préfère raisonner en faisant varier les constantes.
Soit sur $\mathrm{I} =]\,0\,;\ +\infty[$ l'équation
$$t^2y'' + 4ty' + 2y = \ln(t) \quad (\mathcal{E})$$
d'inconnue $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.
a) Déterminer les solutions du type $t \mapsto t^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$) de l'équation homogène $(\mathcal{H})$ associée à $(\mathcal{E})$.
b) Résoudre $(\mathcal{E})$.

Solution (**Ex.74 –** *Variation des constantes alias méthode de Lagrange*)

1. *Un exemple –*
a) $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}(\cos, \sin) = \left\{t \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) / (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$.
b) $y = \lambda\sin + \mu\cos$,
$y' = \lambda'\sin + \lambda\cos + \mu'\cos - \mu\sin = \lambda\cos - \mu\sin$ car $\lambda'\sin + \mu'\cos = 0$,
$y'' = \lambda'\cos - \lambda\sin - \mu'\sin - \mu\cos$, d'où
$y'' + y = \lambda'\cos - \mu'\sin$
On a bien
$$y \text{ solution de } (\mathcal{E}) \text{ ssi } (\mathcal{S}) \begin{cases} \lambda'\sin + \mu'\cos = 0 \\ \lambda'\cos - \mu'\sin = \cos \end{cases}.$$
c) • Déterminons une solution particulière de $(\mathcal{E})$.
Dans $(\mathcal{S})$, $\sin \mathrm{L}_1 + \cos \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_1$ et $\cos \mathrm{L}_1 - \sin \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2$ donne
$$\begin{cases} \lambda' = \cos^2 \\ \mu' = -\sin\cos \end{cases}$$
Primitivons en prenant
$$\begin{cases} \lambda(t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin(2t)}{4} \\ \mu(t) = \dfrac{\cos(2t)}{4} \end{cases}$$
Posons alors $f : t \mapsto \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin(2t)}{4}\right)\sin(t) + \dfrac{\cos(2t)}{4}\cos(t)$.
$f(t) = \dfrac{t\sin(t)}{2} + \dfrac{\cos(t)}{4}$, et comme $\dfrac{\cos}{4} \in \mathrm{H}$, on peut proposer
$$g : t \mapsto \frac{t\sin(t)}{2}.$$
Ayant raisonné par implication et fixé quelques constantes au passage, je vérifie la réponse obtenue.
$g : t \mapsto \dfrac{t\sin(t)}{2}$,
$g' : t \mapsto \dfrac{\sin(t) + t\cos(t)}{2}$
$g'' : t \mapsto \dfrac{\cos(t) + \cos(t) - t\sin(t)}{2} = \cos(t) - y(t)$
donc g est bien solution de $y'' + y = \cos$.
• Par le principe de superposition, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est
$$\mathrm{E} = \left\{t \mapsto \lambda\sin(t) + \mu\cos(t) + \frac{t\sin(t)}{2}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

2. a) $y = \lambda y_1 + \mu y_2$,
$y' = \lambda' y_1 + \lambda y_1' + \mu' y_2 + \mu y_2' = \lambda y_1' + \mu y_2'$ car $\lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0$,
$y'' = \lambda' y_1' + \lambda y_1'' + \mu' y_2' + \mu y_2''$, d'où
$y'' + ay + by = \lambda(y_1'' + ay_1' + by_1) + \mu(y_2'' + ay_2' + by_2) + \lambda' y_1' + \mu' y_2'$
$\qquad = \lambda' y_1' + \mu' y_2'$ car $(y_1, y_2) \in \mathrm{H}^2$.
On a bien :

$$y \text{ est une solution de } (\mathcal{E}) \text{ ssi } \begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = c \end{cases}$$

b) Soit $t \in \mathrm{I}$. Le déterminant du système $\begin{cases} \lambda'(t) y_1(t) + \mu'(t) y_2(t) = 0 \\ \lambda'(t) y_1'(t) + \mu'(t) y_2'(t) = c(t) \end{cases}$

est $\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = w(t) \neq 0$ par l'exercice premier.
Donc ce système possède un unique solution.

c) La résolution du système conduit à

$$\begin{cases} \lambda'(t) = \dfrac{-c(t) y_2(t)}{w(t)} \\ \mu'(t) = \dfrac{c(t) y_1(t)}{w(t)} \end{cases}$$

d) En primitivant,
$y(t) = y_1(t) \left(\displaystyle\int^t \frac{-c(s) y_2(s)}{w(s)} \mathrm{d}s + k_1 \right) + y_2(t) \left(\displaystyle\int^t \frac{c(s) y_1(s)}{w(s)} \mathrm{d}s + k_2 \right)$,
et comme $k_1 y_1 + k_2 y_2$ est solution de $(\mathcal{H})$, on peut simplement écrire

$$y(t) = \int^t \frac{y_1(s) y_2(t) - y_2(s) y_1(t)}{w(s)} c(s) \mathrm{d}s.$$

e) Soit $v_1 : t \mapsto -\displaystyle\int_{t_0}^t \frac{y_2(s)}{w(s)} c(s) \mathrm{d}s$ et $v_2 : t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^t \frac{y_1(s)}{w(s)} c(s) \mathrm{d}s$ de sorte que
$y = v_1 y_1 + v_2 y_2$.

$y = v_1 y_1 + v_2 y_2$,
$y' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2' = -\dfrac{y_2}{w} c y_1 + v_1 y_1' + \dfrac{y_1}{w} c y_2 + v_2 y_2' = v_1 y_1' + v_2 y_2'$
$y'' = v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' + y_2' + v_2 y_2'' = \dfrac{-y_2 c y_1' + y_1 c y_2'}{w} + v_1 y_1'' + v_2 y_2''$
$\quad = \dfrac{cw}{w} + v_1 y_1'' + v_2 y_2'' = c + v_1 y_1'' + v_2 y_2''$
Il vient alors :
$y'' + ay' + by = v_1 \big(y_1'' + ay_1' + by_1 \big) + v_2 \big(y_2'' + ay_2' + by_2 \big) + c = c$
Donc y est solution de $(\mathcal{E})$.

f) D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, ce système possède une unique solution.
En reprenant les calculs précédents, $v_1(t_0) = 0 = v_2(t_0)$ donc y et y' s'annulent en t_0, donc la fonction précédente est la solution cherchée.

3. *Application –*
On ne retient en général pas la formule intégrale précédente et on préfère raisonner en faisant varier les constantes.

4. a) $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont solutions de $(\mathcal{H})$. Étant non colinéaires, elles en forment un système fondamental.

b) *Attention à normaliser l'équation !!!*
Ici : $c(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^2}$.
Avec les mêmes notations qu'en 1.
$\lambda'(t) = \ln(t)$, $\mu'(t) = -t \ln(t)$,
$\lambda(t) = t \ln(t) - t$, $\mu(t) = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t^2 \ln(t)}{2}$ (I.P.P...)
Et $y(t) = \ln(t) - 1 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\ln(t)}{2} = \dfrac{\ln(t)}{2} - \dfrac{3}{4}$ est une solution particulière.
L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est donc

$$\left\{ t \mapsto \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{3}{4}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 75

Sur une autre application du wronskien

On suppose à nouveau connus les résultats de l'exercice premier.
Soit $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ dérivables. On considère l'équation différentielle homogène

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\mathcal{H})$$

d'inconnue $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable.

1. Dans cette question *uniquement*, on suppose que a et b sont constantes.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(\mathcal{H})$ admette un système fondamental de solutions (y_1, y_2) tel que $y_2 : t \mapsto ty_1(t)$.

2. On suppose dans cette question *uniquement* que $(\mathcal{H})$ admet un système fondamental de solutions (y_1, y_2) tel que, pour tout t de I, $y_2(t) = ty_1(t)$.

a) Expliciter le wronskien de w et en déduire une équation différentielle d'ordre 1 faisant intervenir a dont y_1 est solution.

b) En déduire que les fonctions a et b satisfont l'équation

$$2a' + a^2 - 4b = 0.$$

3. On suppose dans cette question *uniquement* que $2a' + a^2 - 4b = 0$.
Soit y_1 une solution non nulle de $y_1' + \dfrac{a}{2}y_1 = 0$.
Soit $y_2 : \mathrm{I} \to \mathbb{K}, t \mapsto ty_1(t)$.
Montrer que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H})$.

4. Résoudre l'équation d'inconnue $y : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0 \quad (\mathcal{H}).$$

5. Résoudre l'équation de la question précédente en cherchant les solutions développables en série entière.

Solution (**Ex.75** – *Sur une autre application du wronskien*)

1. D'après le cours, si l'équation caractéristique $(\mathcal{E}) : x^2 + ax + b = 0$ possède deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors l'ensemble des solutions est

$$\mathrm{Vect}(t \mapsto \mathrm{e}^{r_1 t}, t \mapsto \mathrm{e}^{r_2 t})$$

et aucune solution n'est du type $t \mapsto ty_1(t)$ avec y_1 elle-même solution non nulle.
En effet, si $y_2(t) = t\big(\lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t}\big)$ alors $y_2(0) = 0$ entraîne $\mu = -\lambda$, puis $y_2'(t) = \lambda\big(\mathrm{e}^{r_1 t} - \mathrm{e}^{r_2 t}\big) + t\lambda\big(r_1 \mathrm{e}^{r_1 t} - r_2 \mathrm{e}^{r_2 t}\big)$ donne $y_2'(0) = 0$, donc y_2 est la fonction nulle par unicité de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Ainsi si $y_1 : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t}$ et $y_2 : t \mapsto ty_1(t)$ sont solutions, alors $y_1 = y_2 = 0$.
Mais si $(\mathcal{E})$ admet une solution double r, alors $(t \mapsto \mathrm{e}^{rt}, t \mapsto t\mathrm{e}^{rt})$ est un système fondamental satisfaisant la condition cherchée.
Donc une condition nécessaire et suffisante est $\Delta = 0$, *i.e.*

$$a^2 - 4b = 0.$$

2. On suppose que $(\mathcal{H})$ admet un système fondamental de solutions (y_1, y_2) tel que, pour tout t de I, $y_2(t) = ty_1(t)$.

a) $w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & ty_1(t) \\ y_1'(t) & y_1(t) + ty_1'(t) \end{vmatrix} = y_1^2(t)$.

Par l'exercice 1, puisque w ne s'annule pas, $\dfrac{w'}{w} = -a$ donne $\dfrac{2y_1y_1'}{y_1^2} = -a$ donc $y_1' + \dfrac{a}{2}y_1 = 0$.

b) En dérivant à nouveau cette équation

$$y_1'' + \frac{a}{2}y_1' + \frac{a'}{2}y_1 = 0.$$

Or $y_1'' = -ay_1' - by_1$, donc

$$-\frac{a}{2}y_1' + \left(\frac{a'}{2} - b\right)y_1 = 0.$$

Or $y_1' = -\frac{a}{2}y_1$, donc

$$\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a'}{2} - b\right) y_1 = 0.$$

Si y_1 s'annulait en un point, w s'annulerait aussi, ce qui est exclus.

Donc les fonctions a et b satisfont l'équation

$$2a' + a^2 - 4b = 0.$$

3. • Comme $y_1' = -\frac{a}{2}y_1$, y_1 est deux fois dérivable.

$y_1'' = -\frac{a'}{2}y_1 - \frac{a}{2}y_1' = \left(-\frac{a'}{2} + \frac{a^2}{4}\right) y_1$ donc

$y_1'' + ay_1' + by_1 = \left(-\frac{a'}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b\right) y_1 = \left(\frac{-2a' - a^2 + 4b}{4}\right) y_1 = 0.$

y_1 est bien solution de $(\mathcal{H})$.

• $y_2 : t \mapsto ty_1(t)$, $y_2' : t \mapsto y_1(t) + ty_1'(t)$ et $y_2'' : t \mapsto 2y_1'(t) + ty_1''(t)$, donc

$$y_2''(t) + a(t)y_2'(t) + b(t)y_2(t) = t\big(\underbrace{y_1''(t) + a(t)y_1'(t) + b(t)y_1(t)}_{=0}\big) + \underbrace{2y_1'(t) + ay_1(t)}_{=0}$$

et y_2 est bien solution de $(\mathcal{H})$, linéairement indépendante de y_1 puisque $w = y_1^2$ n'est pas la fonction nulle.

4. $(\mathcal{H})$ satisfait la relation $2a' + a^2 - 4b = 0$.

Soit y_1 est solution non nulle de $y' + \frac{a}{2}y = 0$ *i.e.* $y' - 2xy = 0$, par exemple $y_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$. Et soit $y_2 : t \mapsto t\mathrm{e}^{t^2}$.

Alors par la question précédente (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H})$.

5. En écrivant $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ que l'on suppose de rayon non nul, on obtient

$$y \text{ vérifie } (\mathcal{H}) \iff (\mathcal{S}) \begin{cases} 2a_2 - 2a_0 = 0 \\ 6a_3 - 6a_1 = 0 \\ \forall n \geqslant 2, \\ (n+1)(n+2)a_{n+2} - (4n+2)a_n + 4a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

Le calcul des premiers termes de la suite (a_n) donne

$a_2 = a_0,\ a_4 = \frac{1}{2}a_0,\ a_6 = \frac{1}{6}a_0,\ a_8 = \frac{1}{24}a_0 \dots$

$a_3 = a_1,\ a_5 = \frac{1}{2}a_1,\ a_7 = \frac{1}{6}a_1,\ a_9 = \frac{1}{24}a_1 \dots$

ce qui peut laisser conjecturer $a_{2n} = \frac{1}{n!}a_0$ et $a_{2n+1} = \frac{1}{n!}a_1$, conjecture que l'on peut prouver par récurrence.

On obtient alors

$$y(z) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{n!} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!} = a_0\mathrm{e}^{z^2} + a_1 z\mathrm{e}^{z^2}.$$

On vérifie sans peine que $z \mapsto \mathrm{e}^{z^2}$ et $z \mapsto z\mathrm{e}^{z^2}$ sont solutions (de rayon infini), et comme l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2, ces deux fonctions (indépendantes) engendrent toutes les solutions de $(\mathcal{H})$.

Exercice 76

Jouons au colleur

M. M souhaite proposer des exercices de résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre aux solutions pas trop compliquées.

Il se donne deux fonctions $y_1, y_2 : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ deux fois dérivables et linéairement indépendantes et note $(\mathcal{H})$ une équation différentielle homogène dont (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions. Par ailleurs, il note w le wronskien de ce système.

1. a) Soit $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable. Justifier que y est solution de $(\mathcal{H})$ si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

b) En déduire une équation $(\mathcal{H})$ *normalisée, i.e. dans laquelle le coefficient de y'' vaut 1* dont (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions. On exprimera les coefficients à l'aide de w, w' et $\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$.

c) Justifier que cette écriture normalisée est unique, *i.e.* que si y_1 et y_2 sont aussi solutions d'une équation

$$y'' + ay' + by = 0,$$

alors les fonctions a et b sont exactement celles trouvées dans b).

2. a) Donner une équation différentielle linéaire *normalisée* d'ordre 2 sur $\mathrm{I} =]\,0\,;\,+\infty[$ dont $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ soit solutions.

b) Donner une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec second membre sur $\mathrm{I} =]\,0\,;\,+\infty[$ dont l'ensemble des solutions est

$$\mathrm{E} = \left\{t \mapsto \mathrm{C}_1\sqrt{t} + \frac{\mathrm{C}_2}{\sqrt{t}} + t, (\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Solution (**Ex.76** – *Jouons au colleur*)

1. a) • Par structure de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$, y est solution de $(\mathcal{H})$ si, et seulement si, $y \in \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$.

• $(\mathcal{H}') : \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0$ définit clairement une équation différentielle linéaire homogène du second ordre car le coefficient de y'' est $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = w \neq 0$.

• y_1 et y_2 sont clairement solutions de $(\mathcal{H}')$, et étant linéairement indépendantes, y est solution de $(\mathcal{H}')$ si, et seulement si, $y \in \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$.

Cqfd.

b) En développant le déterminant, avec $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = w \neq 0$ et $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = w'$,

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0 \iff wy'' - w'y' + \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} y = 0$$

Donc

$$(\mathcal{H}) : \quad y'' - \frac{w'}{w}y' + \frac{1}{w}\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} y = 0$$

c) Justifier que cette écriture normalisée est unique, *i.e.* que

Supposons y_1 et y_2 solutions de

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Par différence, y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle homogène d'ordre 1

$$(\mathcal{H}_1) : \quad \left(a + \frac{w'}{w}\right) y' + \left(b - \frac{1}{w}\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}\right) y = 0.$$

Si $(\mathcal{H}_1)$ est une *vraie* équation différentielle homogène d'ordre 1, l'ensemble de ses solutions est un sous-espace vectoriel de dimension 1, or il contient au moins y_1 et y_2 qui sont indépendantes, donc est au moins de dimension 2. Cette contradiction induit que : $\forall t \in \mathrm{I},\ a(t) + \dfrac{w'(t)}{w(t)} = 0$.

Donc $(\mathcal{H}_1)$ devient $\left(b - \dfrac{1}{w}\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}\right) y = 0$. Et comme y_1 et y_2 ne peuvent s'annuler simultanément (car $w \neq 0$), cela induit que sur I, $b - \dfrac{1}{w}\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0$.

D'où $a = -\dfrac{w'}{w}$ et $b = \dfrac{1}{w}\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$. *Cqfd*.

2. a) $w(t) = -\dfrac{1}{t}$, $w'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ et $\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \dfrac{1}{4t^3}$, d'où

$$(\mathcal{H}) : \quad y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{4t^2}y = 0$$

b) La partie homogène est $(\mathcal{H})$.
En prenant $y = t$, on a $y'' + \dfrac{1}{t}y' - \dfrac{1}{4t^2}y = \dfrac{3}{4t}$, donc l'équation suivante

$$(\mathcal{E}) : \quad y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{4t^2}y = \frac{3}{4t}$$

admet

$$\mathrm{E} = \left\{t \mapsto \mathrm{C}_1\sqrt{t} + \frac{\mathrm{C}_2}{\sqrt{t}} + t, (\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

pour ensemble de solutions.

Chapitre 22

Irrationalité de constantes célèbres

Le programme de la filière PC n'est pas orienté vers les questions d'arithmétique, mais donne des outils suffisants pour aborder la question de l'irrationalité de certaines constantes.

Définition –

• Rappelons qu'un nombre réel x est dit rationnel, s'il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{p}{q}$ et la fraction $\dfrac{p}{q}$ soit irréductible.

Autrement dit tel que p et q n'aient pas de diviseurs entiers communs en dehors de 1 et -1.

• Un nombre réel x est dit irrationnel lorsqu'il n'existe pas de couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{p}{q}$.

Exercice 77

Irrationalité de $\sqrt{2}$

On suppose que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ où la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible.

1. Justifier que p^2, puis p, est pair.

2. En déduire que q^2, puis q, est pair.

3. Qu'en déduire ?

Solution (**Ex.77 –** *Irrationalité de* $\sqrt{2}$)

1. On a $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$ donc $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair. Or le carré d'un nombre impair est impair : $(2k+1)^2 = 4\big(k^2+k\big)+1$. Donc p est nécessairement pair.

2. En posant $p = 2p'$, on a $4p'^2 = 2q^2$ donc $q^2 = 2p'^2$ donc q^2 est pair, donc q est pair.

3. p et q sont pairs, donc $\dfrac{p}{q}$ n'est pas irréductible, ce qui est absurde. Donc il n'existe pas de fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ telle que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

Exercice 78

Irrationalité de $\log_{10}(2)$

On rappelle que $\log_{10}(2)$ est le nombre tel que $10^{\log_{10}(2)} = 2$.

Son lien avec le logarithme néperien est $\log_{10}(2) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(10)}$.

Montrer que $\log_{10}(2)$ est irrationnel.

Solution (**Ex.78 –** *Irrationalité de* $\log_{10}(2)$)

Supposons $\log_{10}(2) = \dfrac{p}{q}$ où $\dfrac{p}{q}$ est une fraction irréductible. Comme $\log_{10}(2) \in]\,0\,;\,1[$, $0 < p < q$.

Alors $10^{p/q} = 2$, donc $10^p = 2^q$, donc $5^p = 2^{q-p}$. Or si $p \geqslant 1$ alors 5^p est impair tandis que 2^{q-p} est pair. C'est exclu. Donc $p < 1$ ce qui est absurde. Donc $\log_{10}(2)$ est irrationnel.

Exercice 79

Irrationalité de e

On suppose que $e = \dfrac{p}{q}$ où $\dfrac{p}{q}$ est une fraction irréductible.

On pose $s = q!\left(e - \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right)$.

1. Justifier que s est un entier strictement positif.
2. Justifier que $s = \displaystyle\sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{k!}$ et montrer que $s < \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$.
3. Conclure.

Solution (**Ex.79** – *Irrationalité de e*)

1. $q!e = q!\dfrac{p}{q} = (q-1)!p$ est un entier.

   $q!\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$ or pour tout $k \in [\![0\,;\ q]\!]$, $\dfrac{q!}{k!}$ est un entier.

   Donc s est un entier comme différence d'entiers.

   Comme $e - \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} > 0$ et $q! > 0$, s est strictement positif.

2. $e - \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ donc $s = \displaystyle\sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{k!}$.

   Or $\forall k \geqslant q+1$,

   $$\frac{q!}{k!} = \frac{q!}{q!(q+1)(q+2)\ldots(q+(k-q))} = \frac{1}{(q+1)(q+2)\ldots(q+(k-q))}$$
   $$\leqslant \frac{1}{2^{k-q}} \text{ car nous avons } k-q \text{ facteurs supérieurs à 2.}$$

   De plus, l'inégalité est stricte dès que $k \geqslant q+2$.

   Donc $s = \displaystyle\sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{k!} < \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-q}}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-q}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-1/2} = 1$, donc $s < 1$. Or d'après 1., $s \geqslant 1$. Ceci est absurde et e est irrationnel.

Exercice 80

Irrationalité de π

La première démonstration de l'irrationalité de π est due à Jean Henri Lambert en 1766. Nous étudions ici une démonstration plus accessible attribuée à Ivan Niven en 1946[1].

Pour tout entier $n > 0$, on considère la fonction

$$f_n : [0\,;\ 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

1. Montrer qu'il existe $n+1$ entier c_m où $m \in [\![n\,;\ 2n]\!]$ tels que
   $$\forall x \in [0\,;\ 1], \quad f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{m=n}^{2n} c_m x^m.$$
2. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $f_n^{(m)}(0)$ est un nombre entier.
3. En observant que $f_n(1-x) = f_n(x)$, justifier que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $f_n^{(m)}(1)$ est un nombre entier.

1. Les idées utilisées par Niven ne sont pas nouvelles en 1946 mais il fournit une synthèse très condensée des démonstrations précédentes.

4. On suppose que $\pi^2 = \dfrac{p}{q}$ où $\dfrac{p}{q}$ est une fraction irréductible.

On considère, pour tout $n > 0$, la fonction g_n sur $[0\,;\,1]$:

$$g_n : x \mapsto q^n \left[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right].$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer la dérivée de $h_n : x \mapsto g_n'(x)\sin(\pi x) - \pi g_n(x)\cos(\pi x)$ et en déduire que

$$\mathrm{I}_n \overset{\text{déf.}}{=} \pi \int_0^1 p^n \sin(\pi x) f_n(x) \mathrm{d}x$$

est un entier.

b) Montrer par ailleurs que $0 < \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{\pi p^n}{n!}$.

c) En déduire une contradiction.

5. Justifier finalement que π est irrationnel.

Solution (**Ex.80 –** *Irrationalité de* π)

1. La formule du binôme donne $(1-x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k$,

d'où $f_n(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{k+n} = \dfrac{1}{n!} \sum_{m=n}^{2n} c_m x^m$ où

$$c_m = (-1)^{m-n} \binom{n}{m-n} \in \mathbb{Z}.$$

2. • 0 est racine de multiplicité n de $x^n(1-x)^n$ donc $f_n^{(m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$ pour tout $m \in [[\,0\,;\, n-1]]$.

• $x^n(1-x)^n$ étant de degré $2n$, $f_n^{(m)}$ est nulle pour tout $m > 2n$ donc $f_n^{(m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$ pour tout $m > 2n$.

• Pour $m \in [[\,n\,;\, 2n]]$, $f_n^{(m)}(0) = \dfrac{1}{n!} c_m m! = \dfrac{m!}{n!} c_m$ (terme constant de la dérivée $m-$ième de f_n). Donc $f_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$.

3. En dérivant m fois la relation $f_n(1-x) = f_n(x)$, on a obtient

$$(-1)^m f_n^{(m)}(1-x) = f_n^{(m)}(x),$$

donc $f_n^{(m)}(1) = (-1)^m f_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$.

4. a) • $\forall x \in [0\,;\,1]$,

$$\begin{aligned} h_n'(x) &= g_n''(x)\sin(\pi x) + \pi g_n'(x)\cos(\pi x) - \pi g_n'(x)\cos(\pi x) + \pi^2 g_n(x)\sin(\pi x) \\ &= \big(g_n''(x) + \pi^2 g_n(x)\big)\sin(\pi x) \end{aligned}$$

Or $g_n(x) = q^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2(n-k)} f_n^{(2k)}(x)$, donc

$$g_n''(x) = q^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2(n-k)} f_n^{(2k+2)}(x) = q^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \pi^{2(n-k+1)} f_n^{(2k)}(x)$$

(la sommation s'arrête à n car $f_n^{(2n+2)} = 0$ puisque $\deg(f_n) = 2n$.)

$g_n''(x) = -\pi^2 g_n(x) + q^n \pi^{2n} f_n(x)$

et par conséquent $h_n'(x) = q^n \pi^{2n+2} f_n(x)\sin(\pi x) = \pi^2 p^n f_n(x)\sin(\pi x)$.

• Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_n &\overset{\text{déf.}}{=} \pi \int_0^1 p^n \sin(\pi x) f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[h_n(x)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi}\left[g_n'(x)\sin(\pi x) - \pi g_n(x)\cos(\pi x)\right]_0^1 \\ &= g_n(1) + g_n(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_n(x) &= q^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k p^{2(n-k)} q^{2(k-n)} f_n^{(2k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k p^{2(n-k)} q^{2k-n} f_n^{(2k)}(x) \end{aligned}$$

et comme pour $2k < n$, $f_n^{(2k)}(0) = f_n^{(2k)}(1) = 0$, dans cette somme, pour $x = 0$ ou $x = 1$, les termes tels que $2k < n$ sont nuls, et ceux pour lesquels $2k \geqslant n$ sont tous entiers. Finalement, $g(0)$ et $g(1)$ sont entiers, et I_n est bien un entier.

b) $\mathrm{I}_n \overset{\text{déf.}}{=} \pi \displaystyle\int_0^1 p^n \sin(\pi x) f_n(x)\mathrm{d}x$ et

$\forall x \in [\,0\,;\;1\,]\,,\quad 0 \leqslant \pi p^n \sin(\pi x) f_n(x) \leqslant \dfrac{\pi p^n}{n!}$, donc par croissance de l'intégrale $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{\pi p^n}{n!}$.
Comme $x \mapsto \pi p^n \sin(\pi x) f_n(x)$ est continue positive mais n'est pas la fonction nulle ($\forall x \in \,]\,0\,;\;1\,[\,, \pi p^n \sin(\pi x) f_n(x) > 0$), $\mathrm{I}_n > 0$.

c) Par les croissances comparées, $\dfrac{\pi p^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\pi p^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!} < 1$.
On a alors :
- I_{N} est un entier ;
- $0 < \mathrm{I}_{\mathrm{N}} < 1$.

Ceci est absurde.

5. Ce qui précède montre par l'absurde que π^2 est irrationnel.
Si π était rationnel, disons $\pi = \dfrac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on aurait $\pi^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ rationnel. Ceci est absurde, donc π est irrationnel.

Chapitre 23

Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$

La fonction ζ de Riemann est définie sur $]\,1\,;\ +\infty[$ par
$$\zeta(s) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$
Dans cette partie, nous allons calculer $\zeta(2)$ en n'utilisant que des connaissances de première année. On retrouvera un calcul de ces valeurs dans la partie consacrée aux séries de Fourier. La démonstration suivante est due à Ioannis Papadimitriou, 1973.

Exercice 81

Calcul de $\zeta(2)$

On rappelle que la fonction *cotangente* notée cot est définie sur $]\,0\,;\ \pi/2\,[$ par
$$\forall \theta \in \left]\,0\,;\ \pi/2\,\right[, \quad \cot(\theta) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

1. a) Établir
$$\forall \theta \in \left]\,0\,;\ \pi/2\,\right[, \quad \cot^2(\theta) < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2(\theta).$$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < n + \sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

2. Dans cette question, on se propose de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3} \qquad (\heartsuit)$$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) À l'aide de la formule de De Moivre, montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n tel que
$$\forall \theta \in \left]\,0\,;\ \pi/2\,\right[, \quad \sin\big((2n+1)\theta\big) = \sin^{2n+1}(\theta)\mathrm{P}_n\big(\cot^2(\theta)\big).$$

b) Quelles sont les racines de P_n ?

c) Justifier que si $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ est un polynôme de degré n admettant exactement n racines distinctes, alors la somme de ses racines vaut $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$.

d) Justifier la relation $(\heartsuit)$.

3. Montrer finalement que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Solution (**Ex.81** – *Calcul de $\zeta(2)$*)

1. a) • Ici, $\cot(\theta) > 0$ et $\theta > 0$, donc $\cot^2(\theta) < \dfrac{1}{\theta^2} \iff \tan(\theta) > \theta$.
Cette dernière inégalité se démontre en étudiant $\theta \mapsto \tan(\theta) - \theta$.

- De même
$$\frac{1}{\theta^2} < 1+\cot^2(\theta) \iff \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2(\theta)} \iff \theta > \sin(\theta)$$
qui se démontre par l'étude de $\theta \mapsto \theta - \sin(\theta)$.

b) En sommant les n encadrements précédents aux n points $\theta_k \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{k\pi}{2n+1} \in \left]0\,;\ \pi/2\right[$ où k parcourt $[[1\,;\ n]]$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < n + \sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

2. Dans cette question, on se propose de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3} \qquad (\heartsuit)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\cos\big((2n+1)\theta\big) + i\sin\big((2n+1)\theta\big) = \big(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\big)^{2n+1}$
$= \big(\sin(\theta)(\cot(\theta)+i)\big)^{2n+1}$
$= \sin(\theta)^{2n+1}\big(\cot(\theta)+i\big)^{2n+1}$
$= \sin(\theta)^{2n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} i^k \cot^{2n+1-k}(\theta)$

En prenant la partie imaginaire de chaque membre
$$\sin\big((2n+1)\theta\big) = \sin(\theta)^{2n+1}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\cot^{2n-2p}(\theta)$$
car si $k = 2p+1$, alors $i^k = (-1)^p i$.

Alors $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p \mathrm{X}^{n-p}$ convient.

b) Pour $\theta \in \left]0\,;\ \pi/2\right[$, $\sin^{2n+1}(\theta) \neq 0$ donc
$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n\big(\cot^2(\theta)\big) = 0 &\iff \sin\big((2n+1)\theta\big) = 0\\ &\iff \exists k \in [[1\,;\ n]],\quad (2n+1)\theta = k\pi\\ &\iff \exists k \in [[1\,;\ n]],\quad \theta = \frac{k\pi}{2n+1}\end{aligned}$$
car si $k > n$ ou $k \leqslant 0$, alors $\dfrac{k\pi}{2n+1} \notin \left]0\,;\ \pi/2\right[$.

Comme cot est strictement décroissante et positive sur $\left]0\,;\ \pi/2\right[$ (c'est l'inverse de tan !), les n nombres
$$x_k \overset{\text{déf.}}{=} \cot^2(\theta_k) = \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),\quad k \in [[1\,;\ n]]$$
sont deux à deux distincts et sont n racines de P_n.

P_n étant de degré n, il admet au plus n racines distinctes, donc les nombres x_k pour $k \in [[1\,;\ n]]$ sont exactement les racines de P_n.

c) En notant α_k pour $k \in [[1\,;\ n]]$ les n racines de Q :
$\mathrm{Q} = a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + a_{n-2}\mathrm{X}^{n-2} + \dots$
$= a_n\big(\mathrm{X}-\alpha_1\big)\big(\mathrm{X}-\alpha_2\big)\dots\big(\mathrm{X}-\alpha_n\big)$
$= a_n\big(\mathrm{X}^n - (\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)\mathrm{X}^{n-1}+\dots\big)$

Par unicité du coefficient de X^{n-1}, $-a_n(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n) = a_{n-1}$, *i.e.*
$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

d) Justifier la relation $(\heartsuit)$. En appliquant cette relation à P_n :
$$\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{\dbinom{2n+1}{3}}{\dbinom{2n+1}{1}} = -\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{(2n+1)\times 3!} \text{ d'où}$$
$$\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{(2n-1)n}{3}.$$

3. L'encadrement de 1/b) devient alors

$$\frac{(2n-1)n}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < n + \frac{(2n-1)n}{3}$$

donc

$$\frac{(2n-1)n}{3(2n+1)^2}\pi^2 < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \frac{n}{(2n+1)^2}\pi^2 + \frac{(2n-1)n}{3(2n+1)^2}\pi^2$$

Par encadrement, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 82

Calcul de $\zeta(4)$

On continue en cherchant cette fois la valeur de $\zeta(4)$.
On utilise les mêmes notations que dans l'exercice précédent.

1. En élévant au carré l'encadrement initial, proposer un encadrement de $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}$ à l'aide des nombres x_k.

2. a) Justifier que si $\mathrm{Q} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ est un polynôme de degré n admettant exactement n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, alors

$$\sum_{j\neq k}\alpha_j\alpha_k = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

b) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8}{45}n^4$.

3. Montrer finalement que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Solution (**Ex.82** – *Calcul de $\zeta(4)$*)

1.

$$\sum_{k=1}^{n}\cot^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \frac{(2n+1)^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4} < n + 2\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\cot^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

donc $\frac{\pi^4}{(2n+1)^4}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2\right) < \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4} < \frac{\pi^4}{(2n+1)^4}\left(n + 2\sum\limits_{k=1}^{n}x_k + \sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2\right)$

2. a) On reprend le développement de l'exercice précédent en précisant le coefficient de X^{n-2} :

$$\begin{aligned}\mathrm{Q} &= a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + a_{n-2}\mathrm{X}^{n-2} + \dots\\ &= a_n\big(\mathrm{X}-\alpha_1\big)\big(\mathrm{X}-\alpha_2\big)\dots\big(\mathrm{X}-\alpha_n\big)\\ &= a_n\big(\mathrm{X}^n - (\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)\mathrm{X}^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n)\mathrm{X}^{n-2} + \dots\big)\end{aligned}$$

Par unicité du coefficient de X^{n-2},

$$\sum_{j\neq k}\alpha_j\alpha_k = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}x_k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2 - 2\sum_{j\neq k}x_jx_k = \left(\frac{n(2n-1)}{3}\right)^2 - 2\frac{\binom{2n+1}{5}}{\binom{2n+1}{1}}\\ &= \frac{n^2(2n-1)^2}{9} - 2\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{5!}\\ &= \left(\frac{4}{9} - \frac{2^5}{5!}\right)\left(n^4 + o\left(n^4\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8}{45}n^4\end{aligned}$$

3. Finalement, on a : $u_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} < v_n$ avec

- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^4}{2^4 n^4} \times \frac{8}{45} n^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^4}{90}$
- dans la somme de termes de la parenthèse, les deux premiers termes sont négligeables devant le dernier, donc on a aussi $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^4}{90}$

Par encadrement, $\zeta(4) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 83

De $\zeta(2)$ à $\zeta(4)$, d'après Don Zagier

D'après Quelques conséquences surprenantes de la cohomologie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$[1] de Don Zagier.

Idée

Le mathématicien Don Zagier a proposé à la fin des années 1990 une méthode très élégante pour déduire la valeur de $\zeta(4)$ de celle de $\zeta(2)$ (et réciproquement), méthode qui peut se généraliser et donnant une relation entre $\zeta(2p+2)$ et $\zeta(2p)$ pour tout p de $\mathbb{N}^*$.

On pose :

$$\forall (m,n)^2 \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad f(m,n) = \frac{2}{mn^3} + \frac{1}{m^2n^2} + \frac{2}{m^3n}.$$

On vérifie que :

$$\forall (m,n)^2 \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad f(m,n) - f(m+n,n) - f(m,m+n) = \frac{2}{m^2n^2} \qquad (1)$$

Alors en sommant l'égalité précédente pour (m,n) parcourant $(\mathbb{N}^*)^2$, on obtient :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} f(m,m) = \sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{2}{m^2n^2} \qquad (2)$$

car, de tous les couples (m,n), seuls les couples tels que $m = n$ ne sont pas simplifiés. En effet, si $m > n$ alors (m,n) est du type $(m'+n,n)$ où $m' = m-n \in \mathbb{N}^*$, et si $m < n$ alors (m,n) est du type $(m,m+n')$ où $n' = n-m \in \mathbb{N}^*$.

Or (2) s'écrit

$$5\zeta(4) = 2\zeta(2)^2$$

et il vient

$$\zeta(4) = \frac{2}{5}\zeta(2)^2 \text{ ou } \zeta(2) = \sqrt{\frac{5}{2}\zeta(4)}$$

1. Vérifier l'identité (1).

2. Les familles

$$(f(m,n))_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}, (f(m+n,n))_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ et } (f(m,m+n))_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$$

sont-elles sommables ?

3. a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit S_k défini par

$$\mathrm{S}_k = \sum_{0<m,n\leqslant k} f(m,n) - \sum_{0<m,n\leqslant k} f(m+n,n) - \sum_{0<m,n\leqslant k} f(m,m+n)$$

Montrer que

$$\mathrm{S}_k = 5\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{k^4} - 2\sum_{m=1}^{k} \sum_{n=k+1}^{k+m} f(m,n).$$

b) En déduire

$$\mathrm{S}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 5\zeta(4).$$

1. Pour le texte originel, c'est ici : https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/tex/ConsequencesCohomologySL/fulltext.pdf

c) Justifier finalement que

$$5\zeta(4) = 2\zeta(2)^2.$$

Solution (**Ex.83** – *De* $\zeta(2)$ *à* $\zeta(4)$, *d'après Don* Zagier)

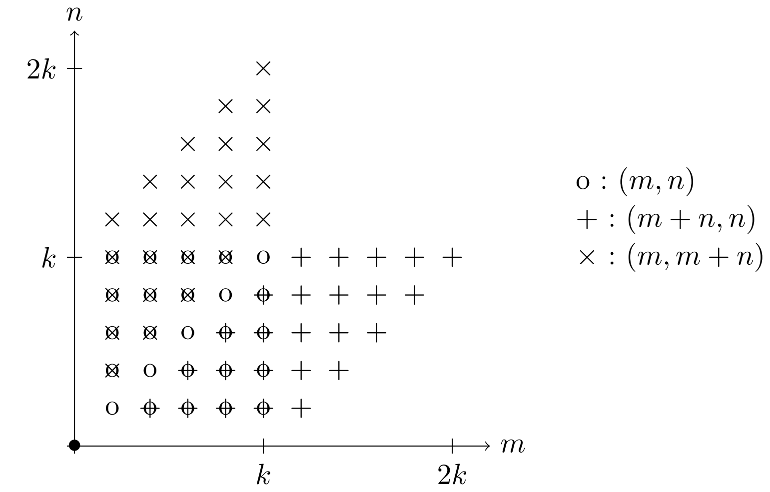
1. l'identité (1) n'est qu'une vérification fastidieuse dont ma vieille *hp-48SX* de 1994 s'est affranchi sans broncher.

2. Les trois familles $(f(m,n))$, $(f(m+n,n))$ et $(f(m,m+n))$ ne sont pas sommables : pour $n=1$, les deux premières contiennent un terme harmonique en $1/m$ et pour $m=1$ la dernière contient un terme harmonique en $1/n$.
Un petit détour par les sommes partielles valide néanmoins l'idée.

3. a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et S_k défini par

$$\mathrm{S}_k = \sum_{0<m,n\leqslant k} f(m,n) - \sum_{0<m,n\leqslant k} f(m+n,n) - \sum_{0<m,n\leqslant k} f(m,m+n),$$

les zones de sommations de ces trois sommes sont :



Il en résulte

$$\mathrm{S}_k = \sum_{m=1}^{k} f(k,k) - \sum_{m=1}^{k}\sum_{n=k+1}^{k+m} f(m,n) - \sum_{m=k+1}^{2k}\sum_{n=m-k}^{k} f(m,n)$$

et par symétrie des points $\times$ et $+$ par rapport à la première bissectrice et symétrie de f par rapport à m et n, et comme $f(k,k) = \dfrac{5}{k^4}$,

$$\mathrm{S}_k = 5\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{k^4} - 2\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=k+1}^{k+m} f(m,n).$$

b) Il reste à se convaincre que la somme double tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

On a sans finesse :

$0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{1}{mn^3} \leqslant m \times \frac{1}{m(k+1)^3}$ donc $0 \leqslant \displaystyle\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{1}{mn^3} \leqslant \frac{k}{(k+1)^3} \leqslant \frac{1}{k^2}$.

$0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{1}{m^2n^2} \leqslant m \times \frac{1}{m^2(k+1)^2}$ donc $0 \leqslant \displaystyle\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{1}{m^2n^2} \leqslant \frac{k}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k}$.

$0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{1}{m^3n} \leqslant m \times \frac{1}{m^3(k+1)}$ donc $0 \leqslant \displaystyle\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=k+1}^{k+m} \frac{1}{m^2n^2} \leqslant \frac{\zeta(2)}{k+1} \leqslant \frac{\zeta(2)}{k}$.

Il s'ensuit par encadrement

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=k+1}^{k+m} f(m,n) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

On a finalement

$$\mathrm{S}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 5\zeta(4).$$

c) Mais par l'identité (1), $\mathrm{S}_k = \displaystyle\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{2}{m^2n^2} = 2\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m^2}\right)^2$ donc

$$\mathrm{S}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 2\zeta(2)^2.$$

Conclusion, par unicité de la limite,

$$5\zeta(4) = 2\zeta(2)^2.$$

Chapitre 24

Les intégrales de Frullani

Dans une lettre datée de 1821, Giuliano FRULLANI indique sans démonstration le résultat qui fait l'objet de l'exercice 2 ci-après. On trouve une démonstration de ce résultat par Louis-Augustion CAUCHY, datant de 1823.

Exercice 84

Premier exemple très classique : avec la fonction exponentielle

Soit a et b deux réels strictement positifs. On s'intéresse, sous réserve d'existence, à l'intégrale

$$\mathrm{I}(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x.$$

1. On pose $q=\dfrac{b}{a}$. Montrer que $\mathrm{I}(a,b)$ est de nature semblable, et égale en cas d'existence, à

$$\mathrm{J}(q)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-qu}}{u}\mathrm{d}u.$$

2. Justifier l'existence de $\mathrm{J}(q)$ et de $\mathrm{I}(a,b)$.

3. Pour tout $\varepsilon>0$, on pose

$$\mathrm{J}_\varepsilon(q)=\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-qu}}{u}\mathrm{d}u.$$

a) Montrer successivement :

$$\mathrm{J}_\varepsilon(q)=\int_\varepsilon^{q\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u=\ln(q)+\int_\varepsilon^{q\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}\mathrm{d}u.$$

b) Justifier que $u\longmapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}$ est bornée sur $]\,0\,;\ 1]$.

c) En déduire

$$\mathrm{I}(a,b)=\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Solution (**Ex.84 –** *Premier exemple très classique : avec la fonction exponentielle*)

1. Il suffit de poser $u=ax$, $\mathcal{C}^1$ strictement croissant donc bijectif.

2. En $+\infty$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-qu}}{u}=o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$.

En 0, $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-qu}}{u}\underset{u\to0}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}^{-u}(1-\mathrm{e}^{(1-q)u})}{u}\underset{u\to0}{\sim}q-1$.

3. a) $\mathrm{J}_\varepsilon(q)=\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u-\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-qu}}{u}\mathrm{d}u=\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u-\int_{q\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u=\int_\varepsilon^{q\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u=\int_\varepsilon^{q\varepsilon}\frac{1}{u}\mathrm{d}u+\int_\varepsilon^{q\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}\mathrm{d}u=$ $\ln(q)+\displaystyle\int_\varepsilon^{q\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}\mathrm{d}u.$

b) $f : u \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u} & \text{si } u \in]\,0\,;\ 1] \\ 1 & \text{si } u = 0 \end{cases}$ est continue sur le segment $[\,0\,;\ 1]$ donc bornée, donc a fortiori bornée sur $]\,0\,;\ 1]$

c) Soit M un majorant de $|f|$ sur $[\,0\,;\ 1[$. Pour $\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{q}$, $[\,\varepsilon\,;\ q\varepsilon] \subset [\,0\,;\ 1]$ donc

$$\left|\int_{\varepsilon}^{q\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}\mathrm{d}u\right| \leqslant \mathrm{M}(q\varepsilon - \varepsilon) \leqslant \mathrm{M}(q-1)\varepsilon$$

Ainsi par encadrement $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{q\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}\mathrm{d}u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ donc $\mathrm{J}_{\varepsilon}(q) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \ln(q)$.

Donc $\mathrm{J}(q) = \ln(q) = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$. Donc $\mathrm{I}(a,b) = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Exercice 85

Propriété générale des intégrale de Frullani

Soit toujours a et b deux réels strictement positifs.
Soit f vérifiant les hypothèses suivantes :

①$f \in \mathcal{C}^0\big([\,0\,;\ +\infty[\,,\mathbb{R}\big)$;

②f admet une limite finie ℓ_∞ en $+\infty$.

Nous allons justifier que

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$$

existe et vaut

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = (f(0)-\ell_\infty)\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Puis en remplaçant la seconde hypothèse par

❷ f admet une primitive F bornée sur $]\,0\,;\ +\infty[$,

nous montrerons qu'alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

1. *Un résultat préliminaire*

a) Montrer que

$$\lim_{\alpha\to 0^+} ||f - f(0)||_{\infty,[\,0\,;\ \alpha]} = 0.$$

b) Montrer que

$$\lim_{x\to +\infty} ||f - \ell_\infty||_{\infty,[\,x\,;\ +\infty[} = 0.$$

2. *En reprenant la démarche du premier exemple*

a) Pour $0 < \varepsilon < \mathrm{X}$, on pose

$$\mathrm{J}_{\varepsilon,\mathrm{X}}(q) = \int_{\varepsilon}^{\mathrm{X}} \frac{f(u)-f(qu)}{u}\mathrm{d}u.$$

Montrer que

$$\mathrm{J}_{\varepsilon,\mathrm{X}}(q) = \int_{\varepsilon}^{q\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u - \int_{\mathrm{X}}^{q\mathrm{X}} \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

b) Déduire de la première question que

$$\int_{\varepsilon}^{q\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(0)\ln(q) \quad \text{et}$$

$$\int_{\mathrm{X}}^{q\mathrm{X}} \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u \xrightarrow[\mathrm{X}\to +\infty]{} \ell_\infty\ln(q).$$

c) Conclure.

3. *Une variante*

On suppose que f vérifie toujours les conditions ① mais on remplace la condition ② par

❷ f admet une primitive F bornée sur $]\,0\,;\;+\infty[$.

a) Montrer que

$$\int_{\mathrm{X}}^{q\mathrm{X}} \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u \xrightarrow[\mathrm{X}\to+\infty]{} 0.$$

b) En déduire que $\mathrm{I}(a,b)$ existe et vaut

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Solution (**Ex.85** – *Propriété générale des intégrale de Frullani*)

1. *Un résultat préliminaire*

a) $\boxed{\text{Soit } \varepsilon>0}$. Comme f est continue en 0, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$, $\boxed{\text{il existe } \mathrm{A}>0}$ tel que $x\in[\,0\,;\;\mathrm{A}]$ entraîne $|f(x)-f(0)|\leqslant\varepsilon$, donc $\boxed{\text{pour tout } \alpha\in[\,0\,;\;\mathrm{A}]}$, $\boxed{||f-f(0)||_{\infty,[\,0\,;\,\alpha]}\leqslant\varepsilon}$.

b) $\boxed{\text{Soit } \varepsilon>0}$. Comme $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_\infty$, $\boxed{\text{il existe } \mathrm{A}>0}$ tel que $x\in[\,\mathrm{A}\,;\;+\infty[$ entraîne $|f(x)-\ell_\infty|\leqslant\varepsilon$, donc $\boxed{\text{pour tout } x\in[\,\mathrm{A}\,;\;+\infty[}$, $\boxed{||f-\ell_\infty||_{\infty,[\,x\,;\,+[}\leqslant\varepsilon}$.

2. *En reprenant la démarche du premier exemple*

a) Couper l'intégrale par linéarité et poser $u:=qu$ dans la seconde pourrait bien amorcer l'affaire. Ensuite la relation de Chasles permet de conclure.

b) $\displaystyle\int_\varepsilon^{q\varepsilon}\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u = \int_\varepsilon^{q\varepsilon}\frac{f(0)+f(u)-f(0)}{u}\mathrm{d}u = \ln(q) + \int_\varepsilon^{q\varepsilon}\frac{f(u)-f(0)}{u}\mathrm{d}u$

et $\displaystyle\left|\int_\varepsilon^{q\varepsilon}\frac{f(u)-f(0)}{u}\mathrm{d}u\right| \leqslant ||f-f(0)||_{\infty,[\,0\,;\,q\varepsilon]}\,|\ln(q)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$

Raisonnement analogue pour $\displaystyle\int_{\mathrm{X}}^{q\mathrm{X}}\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u$.

c) On en déduit l'existence de $\displaystyle\mathrm{J}(q)=\int_0^{+\infty}\frac{f(u)-f(qu)}{u}\mathrm{d}x$, et sa valeur : $(f(0)-\ell_\infty)\ln(q)$... qui induit l'existence et la valeur de $\mathrm{I}(a,b)$ par changement de variable.

3. *Une variante*

On suppose que f vérifie toujours les conditions ① mais on remplace la condition ② par

❷ f admet une primitive F bornée sur $]\,0\,;\;+\infty[$.

a) L'hypothèse ❷ autorise une intégration par parties.

$\displaystyle\int_{\mathrm{X}}^{q\mathrm{X}}\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u = \left[\frac{\mathrm{F}(u)}{u}\right]_{\mathrm{X}}^{q\mathrm{X}} + \int_{\mathrm{X}}^{q\mathrm{X}}\frac{\mathrm{F}(u)}{u^2}\mathrm{d}u \xrightarrow[\mathrm{X}\to+\infty]{} 0$ puisque F est bornée.

b) En 0, on a toujours $\displaystyle\int_\varepsilon^{q\varepsilon}\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ qui est lié à l'hypothèse de continuité de f en 0, donc on conclut de façon analogue à 2. que $\mathrm{I}(a,b)$ existe et vaut

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Exercice 86

Quelques exemples d'intégrales de Frullani

On admet la propriété démontrée dans l'exercice précédent.
Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. Justifier l'existence et donner la valeur de

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}(ax)-\mathrm{Arctan}(bx)}{x}\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x}\mathrm{d}x,$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\mathrm{d}x.$

2. a) Retrouver l'intégrale du premier exercice.

b) Existence et valeur $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^{b-1}-y^{a-1}}{\ln(y)}\mathrm{d}y.$

Remarque : Pour $a=1$ et $b=2$, on retrouve le résultat très classique

$$\int_0^1 \frac{y-1}{\ln(y)}\mathrm{d}y = \ln(2).$$

3. a) Soit $0<p<q$. À l'aide de 1.c), justifier l'existence et donner la valeur de

$$\mathrm{S}_{p,q} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(px)\sin(qx)}{x}\mathrm{d}x.$$

b) Justifier que les intégrales

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x}\mathrm{d}x$$

sont de même nature, et en déduire cette nature.

c) Soit $0<p$. Quelle est la nature de

$$\mathrm{S}_{p,p} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(px)}{x}\mathrm{d}x \ ?$$

Solution (**Ex.86 –** *Quelques exemples d'intégrales de Frullani*)

1. a) Arctan vérifie ① et ② donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(ax)-\mathrm{Arctan}(bx)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{a}{b}\right).$

b) $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ vérifie ① et ② donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x}\mathrm{d}x \overset{u=x^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-au}-\mathrm{e}^{-bu}}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Variante : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ vérifie ① et ② donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(\sqrt{a}x)^2}-\mathrm{e}^{-(\sqrt{b}x)^2}}{x}\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

c) cos vérifie ① et ❷ donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

2. a) Voir 1.b) première version.

b) Existence et valeur $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^{b-1}-y^{a-1}}{\ln(y)}\mathrm{d}y.$

$$\int_0^1 \frac{y^{b-1}-y^{a-1}}{\ln(y)}\mathrm{d}y \overset{x=-\ln(y)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

3. a) $\sin(px)\sin(qx) = \dfrac{1}{2}\big(\cos\big((q-p)x\big)\big) - \cos\big(p+q)x\big)$ donne par 1.c)

$$\mathrm{S}_{p,q} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{q-p}{p+q}\right)$$

b) Justifier que les intégrales

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x}\mathrm{d}x$$

sont de même nature, et en déduire cette nature.

• Ces intégrales sont impropres en $+\infty$. En posant $x = u + \dfrac{\pi}{2}$ dans la première, et puisque $\dfrac{\cos^2(u)}{u+\dfrac{\pi}{2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{\cos^2(u)}{u}$, ces intégrales sont de même nature.

• Par linéarité, si elles convergeaient, alors leur somme $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ convergerait, ce qui est faux. Donc ces intégrales divergent.

c) En posant $u = px$, $\mathrm{S}_{p,p}$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\mathrm{d}x$, donc diverge. Notons que $\dfrac{\sin^2(px)}{x} \underset{x\to0}{\sim} p^2x$ induit que $\mathrm{S}_{p,p}$ est faussement impropre en 0.

Chapitre 25

Quelques expressions sommatoires et intégrales de la constante γ

On s'intéresse dans les exercices suivants à l'expression sous forme de sommes et d'intégrales de la fameuse constante γ de Léonard Euler (1707–1783).

La première apparition de cette constante dans l'œuvre d'Euler date de 1731. Il en donne la définition classique rappelée dans le premier exercice.

Dans toute cette étude, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le n-ième nombre harmonique H_n par

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 87

Définition et intégrales utilisant la partie entière

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n).$$

1. a) Montrer la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.

b) En déduire l'existence d'une constant γ, appelée **constante d'Euler** vérifiant

$$\mathrm{H}_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

2. a) Déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

b) En déduire

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

3. Montrer que

$$\gamma = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \mathrm{d}x.$$

4. Montrer que

$$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2} \mathrm{d}x.$$

Solution (**Ex.87** – *Définition et intégrales utilisant la partie entière*)

1. a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$= \dfrac{-1}{n(n+1)} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc par domination, puisque $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, $\displaystyle\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

b) • Comme $\sum_{n\geq 1}(u_{n+1}-u_n)$ converge, u converge (c'est du cours).

• $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ donc $u_n = \gamma + o(1)$ donc $\mathrm{H}_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$ donc $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

2. a) $\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

donc $\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

b) On en déduit déjà que la somme proposée existe par le critère de négligeabilité.

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{H_N} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}(\ln(n+1)-\ln(n))$$

$$= \mathrm{H_N} - \ln(\mathrm{N}+1) = \mathrm{H_N} - \ln \mathrm{N} - \ln\frac{\mathrm{N}+1}{\mathrm{N}} = u_{\mathrm{N}} - \ln\frac{\mathrm{N}+1}{\mathrm{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma + 0$$

donc $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

3. • Notons que l'intégrande est continue par morceaux et :

$\forall x \geqslant 2,\ \dfrac{1}{\lfloor x\rfloor} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{\lfloor x\rfloor x}$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{\lfloor x\rfloor} - \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\lfloor x\rfloor^2} \leqslant \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Comme $\dfrac{1}{(x-1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, l'intégrale proposée existe.

• Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_1^{\mathrm{N}} \frac{1}{\lfloor x\rfloor} - \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1}\int_n^{n+1} \frac{1}{\lfloor x\rfloor} - \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1}\int_n^{n+1} \frac{1}{n} - \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1}\left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)\right)$, et par télescopage des logarithmes

$$\int_1^{\mathrm{N}} \frac{1}{\lfloor x\rfloor} - \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{S_{N-1}} - \ln(\mathrm{N}) \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{=} \ln(\mathrm{N}-1) + \gamma + o(1) - \ln(\mathrm{N})$$

$$\underset{\mathrm{N}\to+\infty}{=} \ln\left(\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}\right) + \gamma + o(1) \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$$

d'où $\gamma = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\lfloor x\rfloor} - \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

4. • L'intégrale proposée existe puisque $\forall x \geqslant 1, 0 \leqslant \dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

• Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_1^{\mathrm{N}} \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1}\int_n^{n+1} \frac{1}{x} - \frac{\lfloor x\rfloor}{x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1}\int_n^{n+1} \frac{1}{x} - \frac{n}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1}\left(\ln(n+1) - \ln(n) + \frac{n}{n+1} - 1\right)$$

$$\int_1^{\mathrm{N}} \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\mathrm{d}x = \ln(\mathrm{N}) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1}\frac{1}{n+1} = \ln(\mathrm{N}) - \mathrm{S_N} + 1$$

$$\underset{\mathrm{N}\to+\infty}{=} \ln(\mathrm{N}) - \gamma - \ln(\mathrm{N}) - o(1) + 1 \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{=} -\gamma + 1 + o(1)$$

d'où $\gamma = 1 - \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 88

En passant par une intégrale de Frullani

On pose, pour tout $x \in]\,0\,;\ +\infty[$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \dfrac{1}{x}$.

1. a) Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.

On appelle encore φ le prolongement ainsi obtenu.

b) Justifier que φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

c) En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\varphi(x)\mathrm{d}x$.

2. Dans cette question, $a \in]\,0\,;\ +\infty[$ et $n \geq 2$, et on pose

$$\mathrm{I}_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-nx}}{x}\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que $\mathrm{I}_n(a)$ existe.

b) Montrer successivement

$$\mathrm{I}_n(a) = \int_a^{na} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x = \ln(n) - \int_a^{na} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x.$$

3. Montrer que, pour $n \geq 2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-nx}}{x}\mathrm{d}x$ existe et vaut $\ln(n)$.

Cette dernière intégrale fait partie de la famille des intégrales de Frullani.

4. a) Montrer successivement que, pour $n \geq 2$,

$$\mathrm{S}_{n-1} = \int_0^1 \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x.$$

b) Justifier que

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

5. Montrer que

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x.$$

Solution (**Ex.88 –** *En passant par une intégrale de Frullani*)

1. a) $\displaystyle\varphi(x) = \frac{x-(1-\mathrm{e}^{-x})}{x(1-\mathrm{e}^{-x})} = \frac{x^2/2 + o\left(x^2\right)}{x(1-\mathrm{e}^{-x})} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2/2}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$

φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1/2$.

b) $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ donc $\exists \mathrm{X} \in \mathbb{R}^+, \forall x \geq \mathrm{X}, 0 \leq \varphi(x) \leq 2$, φ est bornée sur $[\,\mathrm{X}\,;\ +\infty[$ et comme φ est continue sur $[\,0\,;\ \mathrm{X}]$, elle est aussi bornée sur $[\,0\,;\ \mathrm{X}]$. Donc φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

c) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\varphi(x)$ est continue sur $[\,0\,;\ +\infty[$, et par b), $f(x) = \mathcal{O}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$. Comme $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[\,0\,;\ +\infty[$, f est intégrable par domination : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\varphi(x)\mathrm{d}x$ existe.

2. a) $\mathrm{I}_n(a)$ n'est impropre qu'en $+\infty$ et l'intégrande est $o\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$ en $+\infty$, donc par $\mathrm{I}_n(a)$ existe par négligeabilité.

b) Chacune des intégrales ci-après existent par le même argument que précédemment ($o\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$) :

$\displaystyle\mathrm{I}_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x}\mathrm{d}x.$

Avec le changement de variable $u = nx$ bijectif $\mathcal{C}^1$ strictement croissant dans la seconde intégrale :

$\displaystyle\mathrm{I}_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_{na}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u = \int_a^{na} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x.$

$\displaystyle\mathrm{I}_n(a) = \int_a^{na} \frac{1-(1-\mathrm{e}^{-x})}{x}\mathrm{d}x = \int_a^{na} \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_a^{na} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x = \ln(n) - \int_a^{na} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x.$

3. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-x})/x & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Soit F une de ses primitives, donc continue en 0.

$\mathrm{I}_n(a) = \ln(n) - \mathrm{F}(na) + \mathrm{F}(a) \xrightarrow[a\to 0]{} \ln(n) - \mathrm{F}(0) + \mathrm{F}(0) = \ln n$, ce qui prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-nx}}{x}\mathrm{d}x$ existe et vaut $\ln(n)$.

4. a) $\displaystyle\mathrm{S}_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-2} t^k\mathrm{d}t$

$\displaystyle\mathrm{S}_{n-1} = \int_0^1 \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\mathrm{d}t.$

Posons alors $t :]\,0\,;\ +\infty[\, \to\,]\,0\,;\ 1[\,, x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ changement $\mathcal{C}^1$ bijectif strictement décroissant.

$\displaystyle\mathrm{S}_{n-1} = \int_{+\infty}^0 \frac{1-\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}(-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x.$

b) On soustrait les deux résultats précédents :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{n-1} - \ln(n) &= \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-nx}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\varphi(x)\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\varphi(x)\mathrm{d}x \text{ car ces intégrales existent (cf. 18.a))}\end{aligned}$$

- $\mathrm{S}_{n-1} - \ln(n) = \mathrm{S}_{n-1} - \ln(n-1) + \ln\dfrac{n-1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma.$
- $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \leq \mathrm{K}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x \leq \dfrac{\mathrm{K}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ où K majore $|\varphi|$.

Donc en passant à la limite dans la relation précédente :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

5. $\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$ invite à poser $u = \mathrm{e}^{-x}$, changement de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant donc bijectif de $]\,0\,;\ +\infty[$ sur $]\,0\,;\ 1[$.

On obtient, avec $x = -\ln(u)$, $\mathrm{d}x = \dfrac{-\mathrm{d}u}{u}$:

$\gamma = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{u}{1-u} - \frac{u}{-\ln(u)}\right)\frac{1}{u}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1}{1-u} + \frac{1}{\ln(u)}\mathrm{d}u$ donc

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x.$$

Exercice 89

En lien avec la fonction Gamma d'Euler

1. a) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \ln(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\mathrm{d}x.$$

b) En effectuant le changement de variable $u = 1 - \dfrac{x}{n}$, montrer que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \ln(x)\mathrm{d}x = \ln(n) - \mathrm{H}_n.$$

c) En déduire

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\mathrm{d}x.$$

2. a) On rappelle que la fonction Γ d'Euler, définie sur $]\,0\,;\ +\infty[$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et se dérive par dérivation sous l'intégrale.
Que vaut $\Gamma'(1)$?

b) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c) En déduire

$$\Gamma(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \gamma + o(1).$$

3. Montrer que

$$\gamma = -\int_0^1 \ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x.$$

Solution (**Ex.89 –** *En lien avec la fonction Gamma d'Euler*)

1. a) On pose pour $n \geqslant 1$,

$$f_n :]\,0\,;\ +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-1}\ln(x) & \text{si } x \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

① Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est continue par morceaux.

② Pour tout x de $]\,0\,;\ +\infty[$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)$, donc la suite (f_n) converge simplement vers $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\ln(x)$.

③ f est continue sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

④ De $\ln(1+u) \leqslant u$ pour $u > -1$, on tire pour $n \geqslant 2$ et $0 < x \leqslant n$
$(n-1)\ln(1-x/n) \leqslant -x(n-1)/n$
puis $0 \leqslant \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-1}\ln(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x(1-1/n)}\ln(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x/2}\ln(x)$,
d'où $\forall n \geqslant 2, \forall x > 0, |f_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x/2}\ln(x)$.
Or $\varphi : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x/2}\ln(x) \in \mathrm{L}^1(]\,0\,;\ +\infty[\,,\mathbb{R})$ puisque équivalente à ln en 0 et négligeable devant $x \longmapsto 1/x^2$ en $+\infty$.
Le théorème de convergence dominée s'applique et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\ln(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln(x)\mathrm{d}x.$$

b) $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\ln x\mathrm{d}x \overset{u=1-x/n}{=} \int_0^1 nu^{n-1}\ln\left(n(1-u)\right)\mathrm{d}u$

$\displaystyle= \ln(n) + n\int_0^1 u^{n-1}\ln(1-u)\mathrm{d}u$ puis

$\displaystyle n\int_0^1 u^{n-1}\ln(1-u)\mathrm{d}u = -n\int_0^1 u^{n-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{u^k}{k}\mathrm{d}u = -n\int_0^1\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{u^{n+k-1}}{k}\mathrm{d}u$

Comme $\displaystyle\int_0^1\left|\frac{u^{n+k-1}}{k}\right|\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+k}}{k(n+k)}\right]_0^1 = \frac{1}{k(n+k)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$, la série de terme général $\displaystyle\int_0^1\left|\frac{u^{n+k-1}}{k}\right|\mathrm{d}u$ converge et l'intégration terme à terme est licite, donc

$\displaystyle n\int_0^1 u^{n-1}\ln(1-u)\mathrm{d}u = -n\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+n)} = -\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+n}\right) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$

Ainsi

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\ln(x)\mathrm{d}x = \ln(n) - \mathrm{H}_n.$$

c) On a alors :

$\displaystyle\gamma = \lim_{n\to+\infty}\mathrm{H}_n - \ln(n) = \lim_{n\to+\infty} -\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\ln(x)\mathrm{d}x$ donc

$$\gamma = -\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln(x)\mathrm{d}x.$$

2. a) Par dérivation sous l'intégrale, $\displaystyle\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty}\ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ et

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -\gamma.$$

b) Une intégration par parties montre directement $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c) Γ étant de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 1, elle admet le développement limité :

$$\Gamma(1+x) \underset{x\to0}{=} \Gamma(1)+\Gamma'(1)x + o(x) \underset{x\to0}{=} 1-\gamma x + o(x).$$

Donc $x\Gamma(x) \underset{x\to0}{=} 1-\gamma x+o(x)$ puis en divisant par x

$$\Gamma(x) \underset{x\to0}{=} \frac{1}{x} - \gamma + o(1).$$

3. En posant $u = \mathrm{e}^{-x}$ ($\Leftrightarrow x = -\ln(u)$), on a immédiatement
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\left(\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right) \mathrm{d}u,$
d'où

$$\gamma = -\int_0^1 \ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mathrm{d}x.$$

Chapitre 26

Intégrale de Gauss et fonction Γ d'Euler

[E3A-M1 – 2016 – PC – Exo 1-D] [CCP – 2015 – PC – Partie 1] [CCP – 2015 – PSI – Partie 3] [CCP – 2019 – PSI – Pb 1-P1] [CS-M1 – 2016 – PC – Partie I]

Exercice 90

Calcul de l'intégrale de Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

Une méthode couramment rencontrée s'appuie la démarche suivante, qui serait indiquée dans un sujet.

1. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = f(x^2).$$

Justifier que f de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer f'.

2. Déterminer $f(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Montrer que $x \mapsto g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \right)^2$ est constante sur $\mathbb{R}$.

4. En déduire la valeur de l'*intégrale de Gauss* :

$$\mathrm{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

Solution (**Ex.90 –** *Calcul de l'intégrale de Gauss*)

1. Soit $h : \mathbb{R} \times [0\,;\,1] \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$.

À $t \in [0\,;\,1]$ fixé, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Comme aucune intégrale n'est impropre car nous travaillons avec des fonctions continues (de t) sur le segment $[0\,;\,1]$ donc bornées, le théorème de transfert de la classe s'applique.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)} \mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x} \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2} \mathrm{d}t.$$

2. • $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

• Soit $x \geqslant 0$. $\forall t \in [0\,;\,1]$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$, donc par croissance de l'intégrale $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$. Par encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3. Soit $j : x \mapsto g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \right)^2$.

Par composition, j est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$j'(x) = 2xf'(x^2) + 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2 t^2} \mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$$

Posons $u = xt$ dans la première intégrale :
$j'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$
Donc j est constante sur $\mathbb{R}$.

4. $j(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g(0) = f(0) = \dfrac{\pi}{4}$, donc j est constante égale à $\dfrac{\pi}{4}$.
Or $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} j(x) = \dfrac{\pi}{4}$.
Donc $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$, et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \geqslant 0$,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Et par parité de l'intégrande :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 91

Fonction $\mathbf{\Gamma}$ d'Euler

On appelle *fonction gamma d'Euler* la fonction définie par :

$$\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[,\quad \Gamma(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$ et exprimer ses dérivées successives.

2. Montrer que

$$\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[,\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

3. Monter que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},\quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\quad \Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big) = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}}\sqrt{\pi}.$$

4. Justifier $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
On pourra consulter la partie consacrée aux expressions de la constante γ d'Euler pour préciser la comportement de Γ au voisinage de 0.

Solution (**Ex.91 –** *Fonction $\mathbf{\Gamma}$ d'Euler*)

1. *Existence –*
Soit $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}\times\left]0\,;\,+\infty\right[$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et positive sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$ et $f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$.
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x-1>-1$, i.e. $x>0$. Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x>0$.
De plus : $t^2 f(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ car $t^{x+1} = o\left(\mathrm{e}^t\right)$, donc $f(x,t) = o\left(1/t^2\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ converge.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ existe si, et seulement si, $x>0$.
Classe et dérivées successives –
Pour $t\in\left]0\,;\,+\infty\right[$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$ avec

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \big(\ln(t)\big)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

• Soit $x\in\left]0\,;\,+\infty\right[$. La fonction $t\mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$ car
(i) prenons $\alpha\in\left]1-x\,;\,1\right[$. $t^\alpha\big(\ln(t)\big)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \big(\ln(t)\big)^n t^{\alpha+x-1}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$,
donc $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha<1$, ce qui assure l'intégrabilité sur $\left]0\,;\,1\right]$,
(ii) $t^2\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, ce qui assure l'intégrabilité sur $\left[0\,;\,+\infty\right[$.

• Soit $[\,a\,;\ b]\subset\,]\,0\,;\ +\infty[$.

$$\forall x\in[\,a\,;\ b]\,,\forall t\in\,]\,0\,;\ +\infty[\,,\quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right|\leqslant \big(\ln(t)\big)^n\big(t^{a-1}+t^{b-1}\big)\mathrm{e}^{-t}\overset{\text{déf.}}{=}\varphi_{[\,a\,;\,b]}(t)$$

et $\varphi_{[\,a\,;\,b]}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]\,0\,;\ +\infty[$ (par intégrabilité de $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,t)$ et $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(b,t)$)
Par domination, Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $[\,a\,;\ b]\subset\,]\,0\,;\ +\infty[$, donc sur $]\,0\,;\ +\infty[$, et on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\,]\,0\,;\ +\infty[\,,\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}\big(\ln(t)\big)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

2. Soit $x\in\,]\,0\,;\ +\infty[$. $\Gamma(x+1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Effectuons une intégration par parties avec : $t\mapsto t^x$ et $t\mapsto-\mathrm{e}^{-t}$ $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\ +\infty[$ et

$$-t^x\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[t\to 0]{}0 \text{ et } -t^x\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

$\Gamma(x+1)=\big[-t^x\mathrm{e}^{-t}\big]_0^{+\infty}+x\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=x\Gamma(x)$.

$\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1$, et par une récurrence immédiate

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \Gamma(n)=(n-1)!.$$

3. On passe par l'intégrale de Gauss.
$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\overset{u=t^2}{=}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Gamma(1/2)$ donc $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.
En itérant la formule de 3.a),
$\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big)=\big(n-\frac{1}{2}\big)\Gamma\big(n-\frac{1}{2}\big)=\dfrac{2n-1}{2}\big(n-\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(n-\frac{3}{2}\big)$
$\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big)=\dfrac{(2n-1)(2n-3)}{2^2}\big(n-\frac{5}{2}\big)\Gamma\big(n-\frac{5}{2}\big)=\dots$
$\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big)=\dfrac{(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1}{2^n}\Gamma(1/2)=\dfrac{(2n)!}{n!2^{2n}}\sqrt{\pi}$

4. $\forall x>0,\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, or $\Gamma(x+1)\xrightarrow[x\to 0]{}\Gamma(1)=1$ par continuité de Γ en 1. Donc

$$\Gamma(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{x}.$$

Chapitre 27

Intégrale de Dirichlet et sinus cardinal

[CCP – 2020 – PSI – Pb no1][CCP – 2020 – PC – Exo no1]
Définition – Intégrale de Dirichlet et sinus cardinal
Sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction *sinus cardinal* par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

L'intégrale de Dirichlet est définie par

$$\mathrm{D} \overset{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(t) \mathrm{d}t.$$

Exercice 92

sinc est de classe $\mathcal{C}^\infty$

1. Justifier que sinc est continue en 0.
2. Justifier que sinc est développable en série entière de rayon infini. Quelle est sa classe de dérivabilité ?
3. Justifier que l'intégrale de Dirichlet n'est impropre qu'en $\pm\infty$.

Solution (**Ex.92 –** *sinc est de classe $\mathcal{C}^\infty$*)

1. La continuité en 0 découle de $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ donc $\operatorname{sinc}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$.
   Cette formule étant encore valable pour $x = 0$ car $\operatorname{sinc}(0) = 1$, sinc est DSE sur $\mathbb{R}$ tout entier donc $\mathcal{C}^\infty$.
3. D est faussement impropre en 0.

Exercice 93

Un calcul de l'intégrale de Dirichlet

Soit $f : [0\,;\ +\infty[\to \mathbb{R}$ définie sous réserve d'existence par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t.$$

Justifier les propriétés suivantes.

1. f est définie et continue sur $[0\,;\ +\infty[$.
2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
3. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;\ +\infty[$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

4. $\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\quad f(x) = x\ln x - \dfrac{x}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x) + \dfrac{\pi}{2}$.
Donc $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

5. Finalement
$$\mathrm{D} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(t)\mathrm{d}t = \pi.$$

Solution (**Ex.93** – *Un calcul de l'intégrale de Dirichlet*)

1. Soit $g : [0\,;\,+\infty[\times]0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ et $h :]0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$.
- Pour $x \in [0\,;\,+\infty[$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;\,+\infty[$.
- Pour $t \in]0\,;\,+\infty[$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
- $\forall (x,t) \in [0\,;\,+\infty[\times]0\,;\,+\infty[,\quad |g(x,t)| \leqslant h(t)$,

où h est continue par morceaux sur $]0\,;\,+\infty[$, avec
(i) $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = \dfrac{1}{2}$ car $1-\cos t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, donc $\displaystyle\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$ converge (faussement impropre),
(ii) $\forall t \geqslant 1, 0 \leqslant h(t) \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ converge,
donc h est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;\,+\infty[$.
Ainsi, f est définie et continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 0$, il existe T tel que $\forall t \geqslant \mathrm{T},\quad h(t) \leqslant 1$.
Comme h est continue sur $]0\,;\,\mathrm{T}]$ et est prolongeable en une fonction continue sur $[0\,;\,\mathrm{T}]$, h est majorée sur $[0\,;\,\mathrm{T}]$.
Donc h est majorée sur $]0\,;\,+\infty[$.
Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in]0\,;\,+\infty[, 0 \leqslant h(t) \leqslant \mathrm{M}$.
$\forall x \in [0\,;\,+\infty[, \forall t \in]0\,;\,+\infty[,\quad 0 \leqslant g(x,t) \leqslant \mathrm{M}\mathrm{e}^{-xt}$.
Par croissance de l'intégrale, $\forall x \in [0\,;\,+\infty[, 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{x}$.
Par encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3. Pour $t \in]0\,;\,+\infty[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
Regardons les dérivées par rapport à x de g :
- $\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\quad \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{\cos t - 1}{t}\mathrm{e}^{-xt}\right| = \dfrac{1-\cos t}{t}\mathrm{e}^{-xt} \overset{\text{déf.}}{=} h_1(t)$

h_1 est prolongeable par continuité en 0 (limite nulle) et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ donc continue et intégrable sur $]0\,;\,+\infty[$.
- $\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\quad \left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| = (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt} \leqslant 2\mathrm{e}^{-xt}$

Plaçons-nous sur $[a\,;\,+\infty[\subset]0\,;\,+\infty[$ afin de majorer par une quantité indépendante de x.
$\forall x \in [a\,;\,+\infty[,\quad \left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| = (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt} \leqslant 2\mathrm{e}^{-at}$
et $h_2 : t \mapsto 2\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable d'après le cours car $a > 0$.
Par le théorème de dérivation, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout $[a\,;\,+\infty[\subset]0\,;\,+\infty[$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et f'' se calcule par dérivation sous l'intégrale.
Soit $x \in]0\,;\,+\infty[$.
$f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \cos t\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \mathcal{R}e\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+i)t}\mathrm{d}t\right)$
$f''(x) = \dfrac{1}{x} - \mathcal{R}e\left(\dfrac{1}{x-i}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$

4. Pour $x \in]0\,;\,+\infty[$,
$f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + k = \ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + k \xrightarrow[x\to+\infty]{} k$.
Or on démontre comme en 2. que f' est tend vers 0 en $+\infty$. Donc $k = 0$ et $f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.
En primitivant à nouveau grâce à des intégrations par parties,
$f(x) = x\ln x - x - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) + x - \operatorname{Arctan}(x) + \kappa$
$f(x) = x\ln x - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x) + \kappa$

Déterminons κ grâce à la limite en $+\infty$:
$\ln(x^2+1) = \ln(x^2) + \ln(1+1/x^2) = 2\ln(x) + 1/x^2 + o\left(1/x^2\right)$
D'où : $f(x) = -\dfrac{1}{2x} + o\left(1/x\right) - \text{Arctan}(x) + \kappa \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\dfrac{\pi}{2} + \kappa$
Or d'après 2., $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $\kappa = \dfrac{\pi}{2}$.
Finalement : $f(x) = x\ln x - \dfrac{x}{2}\ln(x^2+1) - \text{Arctan}(x) + \dfrac{\pi}{2}$.
Comme f est continue en 0, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

5. $\dfrac{\pi}{2} = f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Et par parité,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \pi.$$

Exercice 94

La fonction sinc n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$

1. Justifier que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\text{sinc}(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}$$

2. En déduire que sinc n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.
Autrement dit, l'intégrale de Dirichlet converge, mais pas absolument. On parle alors d'intégrale semi-convergente.

Solution (**Ex.94** – *La fonction sinc n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$*)

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall x\in[\,n\pi\,;\ (n+1)\pi]\,,\ \dfrac{1}{x}\geqslant\dfrac{1}{(n+1)\pi}$, donc par croissance de l'intégrale

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\text{sinc}(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Or $|\sin|$ est $\pi-$périodique donc

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}|\sin(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\sin(t)\mathrm{d}t = 2$$

2. En sommant les inégalités précédentes

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^{(n+1)\pi}|\text{sinc}(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

Or par divergence de la série harmonique, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$

(on sait même que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n+1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$...)

Donc $\displaystyle\int_0^{(n+1)\pi}|\text{sinc}(t)|\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ et sinc n'est pas intégrable.

Exercice 95

sinc et la transformée de Fourier

sinc est un exemple courant de transformée de Fourier non intégrable d'une fonction très simple (et intégrable).
Soit Π la fonction porte définie par

$$\Pi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\begin{cases}1 & \text{si } |x|<1/2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Π est clairement intégrable.
Montrer que cependant sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(\Pi) : \xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x)\mathrm{e}^{-2i\pi\xi x}\mathrm{d}x = \operatorname{sinc}(\pi\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

n'est pas intégrable.

Solution (**Ex.95** – *sinc et la transformée de* FOURIER)

$$\mathcal{F}(\Pi)(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} 1\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}}{-2\pi i\xi}\right]_{-1/2}^{1/2} = \dfrac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Par le changement de variable affine $x = \pi\xi$ $\mathcal{C}^1$ strictement croissante, la non-intégrabilité de sinc entraîne la non-intégrabilité de $\mathcal{F}(\Pi)$.

Chapitre 28

Linéarisations et sommes trigonométriques

[MP-M2 – 2018 – PC – Partie I]

Exercice 96

Linéarisations

Toute expression du type

$$\cos^n(t),\ \sin^n(t) \text{ et } \cos^m(t)\sin^n(t)$$

peut se linéariser comme somme de termes du type $\cos(kt)$ et $\sin(kt)$.
Pour cela, on développe les formules d'Euler grâce à la formule du binôme de Newton, puis on regroupe les termes deux à deux conjugués pour utiliser à nouveau les formules d'Euler.
En particulier :

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2}\big(\cos(2t)+1\big), \quad \cos^3(t) = \frac{1}{4}\big(3\cos(t)+\cos(3t)\big),$$

$$\sin^2(t) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2t)\big), \quad \sin^3(t) = \frac{1}{4}\big(3\sin(t)-\sin(3t)\big).$$

☞ *Indispensable pour primitiver notamment.*

1. Linéariser $\sin(t)\cos^2(t)$.

2. Établir : $\cos^{2p}(t) = \dfrac{1}{2^{2p}}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{2p}{k}\cos\big((2k-2p)t\big)$

Solution (**Ex.96 –** *Linéarisations*)

1. Étudions un cas particulier, à titre d'exemple.

$$\sin(t)\cos^2(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{1}{8i}\big((e^{it}-e^{-it})(e^{2it}+2+e^{-2it})\big)$$

$$\sin(t)\cos^2(t) = \frac{1}{8i}\big(e^{3it}+e^{it}-e^{-it}-e^{-3it})\big) = \frac{1}{4}\big(\sin(3t)+\sin(t)\big)$$

2. Étudions un cas général, à titre d'exemple.

$$\cos^n(t) \overset{\text{Euler}}{=} \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^n$$

$$\overset{binme}{=} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikt}e^{-i(n-k)t} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)t}$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \text{ et } e^{i(2(n-k)-n)t} = e^{i(n-2k)t} = \overline{e^{i(2k-n)t}}$$

Donc on peut grouper les termes 2 par 2.

• Si n est impair, disons $n = 2p+1$, il y a $2p+2$ termes :

$$\cos^n(t) \overset{j=n-k}{=} \frac{1}{2^n}\left[\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)t} + \sum_{j=0}^{p}\binom{n}{n-j}e^{i(2(n-j)-n)t}\right]$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\left[e^{i(2k-n)t} + \overline{e^{i(2k-n)t}}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \cos\big((2k-2p-1)t\big)$$

• Si n est pair, disons $n = 2p$, il y a $2p+1$ termes :

$$\cos^n(t) \overset{j=n-k}{=} \frac{1}{2^n} \left[\sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{i(2k-n)t} + \binom{n}{p} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{n}{n-j} \mathrm{e}^{i(2(n-j)-n)t} \right]$$

$$\cos^n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \left[\mathrm{e}^{i(2k-n)t} + \overline{\mathrm{e}^{i(2k-n)t}} \right] + \frac{1}{2^n} \binom{n}{p}$$

$$\cos^{2p}(t) = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{k} \cos\big((2k-2p)t\big)$$

Exercice 97

Sommes trigonométriques

1. Pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0[2\pi]$ ($\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{it} \neq 0 \Longleftrightarrow \sin(t/2) \neq 0$), établir les égalités :

$$\mathrm{C}_n(t) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\big(\frac{n+1}{2}t\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)} \cos\big(\frac{nt}{2}\big)$$

$$\mathrm{S}_n(t) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \sin(kt) = \frac{\sin\big(\frac{n+1}{2}t\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)} \sin\big(\frac{nt}{2}\big).$$

2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cos(kt)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\sin(kt)$.

Solution (**Ex.97** – *Sommes trigonométriques*)

1. *On écrit une somme géométrique complexe puis on utilise les arguments moitiés.*

$$\Sigma_n \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{C}_n + i\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kt) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(kt) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} \big(\mathrm{e}^{it}\big)^k \overset{géom.}{=} \frac{\mathrm{e}^{it(n+1)} - 1}{\mathrm{e}^{it} - 1}$$

$\mathrm{e}^{i\alpha} - 1 \overset{\text{Euler}}{=} \mathrm{e}^{i\alpha/2} 2i \sin(\alpha/2)$, donc $\displaystyle\Sigma_n = \frac{\sin\big(\frac{n+1}{2}t\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)} \mathrm{e}^{int/2}$

$$\mathrm{C}_n(t) = \mathcal{Re}\,(\Sigma_n(t)) = \frac{\sin\big(\frac{n+1}{2}t\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)} \cos\big(\frac{nt}{2}\big),$$

$$\mathrm{S}_n(t) = \mathcal{Im}\,(\Sigma_n(t)) = \frac{\sin\big(\frac{n+1}{2}t\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)} \sin\big(\frac{nt}{2}\big).$$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cos(kt) = \mathrm{S}'(t)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\sin(kt) = -\mathrm{C}'(t)$.

Chapitre 29

Polynômes de Tchebychev

[CCP – 2019 – PSI – Pb2-P1]
Je ne me consacre ici qu'aux polynômes de Tchebychev *dit de première espèce.*
Définition – Version relation de récurrence
Soit $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ définie par

$$\mathrm{T}_0 = 1,\ \mathrm{T}_1 = \mathrm{X} \text{ et, pour tout } n \geqslant 2, \quad \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n.$$

Définition – Version trigonométrique
Il existe une unique suite de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

Exercice 98

Ces deux définitions coïncident

Justifier que les deux définitions précédentes définissent la même famille de polynômes.

Solution (**Ex.98 –** *Ces deux définitions coïncident*)
La version trigonométrique affirme une existence et une unicité non évidente. Commençons par là.
① *Existence* – Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a : $\cos(n\theta) \overset{\text{De Moivre}}{=} \mathcal{R}e\left((\mathrm{e}^{i\theta})^n\right)$.
$(\mathrm{e}^{i\theta})^n \overset{binme}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)$, et i^k est imaginaire pur pour k impair et réel pour k pair.

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2k} i^{2k} \sin^{2k}(t)\cos^{n-2k}(t)\\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\cos^2(t))^k \cos^{n-2k}(t).\end{aligned}$$

Donc en posant $\mathrm{T}_n(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\mathrm{X}^2)^k \mathrm{X}^{n-2k}$,

$$\cos(n\theta) = \mathrm{T}_n(\cos(\theta)).$$

② *Unicité* – Soit T_n et U_n deux ploynômes tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) = \mathrm{U}_n(\cos(\theta)).$$

Alors : $\forall \theta \in \mathbb{R}, (\mathrm{T}_n - \mathrm{U}_n)(\cos(\theta)) = 0$, donc

$$\forall x \in [-1\,;\ 1]\,, (\mathrm{T}_n - \mathrm{U}_n)(x) = 0$$

car tout $x \in [-1\,;\ 1]$ peut s'écrire $x = \cos(\theta)$.
Ainsi, $\mathrm{T}_n - \mathrm{U}_n$ a une infinité de racines, donc est le polynôme nul, donc $\mathrm{U}_n = \mathrm{T}_n$.
③ *Équivalence des deux définitions* –
Montrons que les polynômes définis trigonométriquement vérifient la définition par récurrence. Par unicité, ces deux familles seront identiques.
Raisonnement : une récurrence double s'impose, vu la définition de la suite (T_n).
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0.\theta)$.
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_1(\cos\theta) = \cos(\theta) = \cos(1.\theta)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vrai aux rangs n et $n+1$.

Rappelons que $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.
Donc : $\cos((n+2)\theta)+\cos(n\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta)$.
Ainsi : $\cos((n+2)\theta) = 2\cos(\theta)\mathrm{T}_{n+1}(\cos(\theta)) - \mathrm{T}_n(\cos(\theta))$.
Donc : $\mathrm{T}_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X}) - \mathrm{T}_n(\mathrm{X})$ puisque T_{n+2} est l'unique polynôme vérifiant $\mathrm{T}_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta)$.

Exercice 99

Premières propriétés

1. Calculer T_2 et T_3.

2. Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(\mathrm{T}_n) = n \quad \text{et} \quad \mathrm{dom}(\mathrm{T}_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

où, pour tout polynôme P non nul, dom(P) désigne le coefficient dominant de P.

3. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, T_n a la même parité que l'entier n.

4. Montrer, en partant de la définition par récurrence des polynômes (T_n) et en développant $\cos((n+2)t)$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta) \quad (\heartsuit).$$

On notera que cette relation induit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1\,;\;1], \quad \mathrm{T}_n(x) = \cos\big(n\mathrm{Arccos}(x)\big).$$

5. Que valent, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}_n(1)$ et $\mathrm{T}_n(-1)$?

6. En dérivant deux fois $(\heartsuit)$ par rapport à θ la relation précédente, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1\,;\;1], \quad (1-x^2)\mathrm{T}_n''(x) - x\mathrm{T}_n'(x) + n^2\mathrm{T}_n(x) = 0.$$

7. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1-\mathrm{X}^2)\mathrm{T}_n'' - \mathrm{X}\mathrm{T}_n' + n^2\mathrm{T}_n = 0.$$

Solution (**Ex.99** – *Premières propriétés*)

1. $\mathrm{T}_2 = 2\mathrm{X}^2 - 1$ et $\mathrm{T}_3 = 4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}$

2. Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
• La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons-la vraie aux rangs n et $n+1$. Alors il existe Q tel que $\mathrm{T}_{n+1} = 2^n\mathrm{X}^{n+1} + \mathrm{Q}$ avec $\deg(\mathrm{Q}) \leqslant n$. Donc $\mathrm{T}_{n+2} = 2^{n+1}\mathrm{X}^{n+2} + 2\mathrm{X}\mathrm{Q} - \mathrm{T}_n$ avec $\deg(2\mathrm{X}\mathrm{Q} - \mathrm{T}_n) \leqslant n+1$, donc T_{n+2} est de degré $n+2$ et de coefficient dominant 2^{n+1} : la propriété est vraie au rang $n+2$.
• Par récurrence j'ai démontré

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(\mathrm{T}_n) = n \quad \text{et} \quad \mathrm{dom}(\mathrm{T}_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

3. Notons que la propriété voulue peut s'écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n\mathrm{T}_n(\mathrm{X}).$$

Raisonnons à nouveau par récurrence sur n. L'initialisation est acquise. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons cette propriété acquise pour n et $n+1$.
$\mathrm{T}_{n+2}(-\mathrm{X}) = 2(-\mathrm{X})\mathrm{T}_{n+1}(-\mathrm{X}) - \mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) = -(-1)^{n+1}2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X}) - (-1)^n\mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^{n+2}(2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n) = (-1)^{n+2}\mathrm{T}_{n+2}$ donc la propriété est vraie au rang $n+2$.
Par récurrence, j'ai établi que

pour tout n de $\mathbb{N}$, T_n a la même parité que l'entier n.

4. Une ultime récurrence sur n dont je ne détaille que les points essentiels.
• $\mathrm{T}_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0.\theta)$ et $\mathrm{T}_1(\cos(\theta)) = \cos(1.\theta)$.
• $\cos((n+2)\theta) = \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta)$
$= \cos(n\theta)(2\cos^2(\theta) - 1) - 2\sin(n\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)$
$= 2\cos(\theta)\big(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)\big) - \cos(n\theta))$

$$= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$
$$= 2\cos(\theta)\mathrm{T}_{n+1}(\cos(\theta)) - \mathrm{T}_n(\cos(\theta))$$

• Par récurrence, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta).$$

5. $\mathrm{T}_n(1) = \mathrm{T}_n(\cos(0)) = \cos(n.0) = 1$ et $\mathrm{T}_n(-1) = \mathrm{T}_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ ou en utilisant la parité,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_n(1) = 1 \text{ et } \mathrm{T}_n(-1) = (-1)^n.$$

6. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{T}'_n(\cos(\theta))(-\sin(\theta)) = -n\sin(n\theta)$ puis
$\mathrm{T}''_n(\cos(\theta))\sin^2(\theta) - \mathrm{T}'_n(\cos(\theta))\cos(\theta) = -n^2\cos(n\theta)$ d'où
$(1-\cos^2(\theta)\mathrm{T}''_n(\cos(\theta)) - \cos(\theta)\mathrm{T}'_n(\cos(\theta)) + n^2\mathrm{T}_n(\cos(\theta))$.
Comme tout x de $[-1\,;\ 1]$ peut s'écrire $x = \cos(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1\,;\ 1], \quad (1-x^2)\mathrm{T}''_n(x) - x\mathrm{T}'_n(x) + n^2\mathrm{T}_n(x) = 0.$$

7. Le polynôme $(1-\mathrm{X}^2)\mathrm{T}''_n - \mathrm{X}\mathrm{T}'_n + n^2\mathrm{T}_n$ admet une infinité de racines (tous les $x \in [-1\,;\ 1]$), donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1-\mathrm{X}^2)\mathrm{T}''_n - \mathrm{X}\mathrm{T}'_n + n^2\mathrm{T}_n = 0.$$

Exercice 100

Les polynômes de Tchebychev vus comme vecteurs propres

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ et on considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ par
$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_m[\mathrm{X}], \quad \varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'' + \mathrm{X}\mathrm{P}'.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$.

2. Déterminer la matrice M représentant l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$. On donnera explicitement les coefficients $\big(m_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant m+1}$ en fonction de i et j.

3. φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$?

4. Justifier que φ est diagonalisable et préciser son spectre, son polynôme caractéristique et la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

5. Déterminer une base $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ formée de vecteurs propres de φ échelonnée en degré.

6. On note Π la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{T}$ et D la matrice $\Pi^{-1}\mathrm{M}\Pi$. Que vaut D ?
Soit ψ l'endomorphisme $\dfrac{1}{m^2}\varphi$.
On note N la matrice représentant ψ dans la base $\mathcal{B}$ et Δ la matrice $\Pi^{-1}\mathrm{N}\Pi$.

7. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta^n$.

8. Justifier que l'endomorphisme $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi^n$ est un projecteur et préciser son rang.

Solution (**Ex.100** – *Les polynômes de Tchebychev vus comme vecteurs propres*)

1. • Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$. $\varphi(\mathrm{P})$ est clairement un polynôme et
$\deg(\mathrm{P}'') \leqslant \deg(\mathrm{P}) - 2$ donc $\deg((\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'') \leqslant \deg(\mathrm{P}) \leqslant m$,
$\deg(\mathrm{P}') \leqslant \deg(\mathrm{P}) - 1$ donc $\deg(\mathrm{X}\mathrm{P}') \leqslant \deg(\mathrm{P}) \leqslant m$,
donc $\deg(\varphi(\mathrm{P})) \leqslant m$ et $\varphi(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$.
• Pour $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$\varphi(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) = (\mathrm{X}^2-1)(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})'' + \mathrm{X}(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})' = \lambda\varphi(\mathrm{P}) + \varphi(\mathrm{Q})$ par linéarité de la dérivation.
$$\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_m[\mathrm{X}].$$

2. • $\varphi(1) = 0$, $\varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$
• $\forall k \in [\![2\,;\ m]\!], \quad \varphi(\mathrm{X}^k) = (\mathrm{X}^2-1)k(k-1)\mathrm{X}^{k-2} + \mathrm{X}k\mathrm{X}^{k-1} = k^2\mathrm{X}^k - k(k-1)\mathrm{X}^{k-2}$

- $$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & \ddots & & (0) & \vdots \\ \vdots & \ddots & 4 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & (0) & & \ddots & \ddots & \ddots & -m(m-1) \\ \vdots & & & & & \ddots & (m-1)^2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & m^2 \end{pmatrix}$$
- $$\forall (i,j) \in [[\,1\,;\ m+1]]\,, \quad m_{i,j} = \begin{cases} (j-1)^2 & \text{si } j = i \\ -j(j+1) & \text{si } j = i+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. $\varphi(1) = 0$ et $1 \neq 0$ donc φ n'est pas injective, donc n'est pas un automorphisme.
Ou encore, vu sa matrice, $\mathrm{rg}(\varphi) = m < \dim(\mathbb{R}_m[\mathrm{X}])$, ou encore $\det\left(()\,\varphi\right) = \det\left(()\,\mathrm{M}\right) = 0$...

$$\varphi \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathbb{R}_m[\mathrm{X}].$$

4. Comme M est triangulaire supérieure,

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \left\{k^2, k \in [[\,0\,;\ m]]\,\right\},$$

donc φ possède exactement $m+1 = \dim \mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ valeurs propres distinctes, donc

$$\varphi \text{ est diagonalisable, avec } \chi_\varphi = \prod_{k=0}^{m} (\mathrm{X} - k^2) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2^2)\dots(\mathrm{X}-m^2).$$

Enfin, puisque φ est diagonalisable,

$$\forall k \in [[\,0\,;\ m]]\,, \quad \dim\left(\mathrm{E}_{k^2}\right) = \omega(k^2) = 1.$$

5. D'après la dernière question de la partie précédente,

$$\forall k \in [[\,0\,;\ m]]\,, \quad \varphi(\mathrm{T}_k) = k^2 \mathrm{T}_k,$$

donc $\mathrm{T}_k (\neq 0)$ est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre k^2.
Comme la famille $(\mathrm{T}_k)_{0 \leqslant k \leqslant m}$ est échelonnée en degré d'après la première partie, c'est une base de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$.

$$\mathcal{T} = (\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_m) \text{ est une base de } \mathbb{R}_m[\mathrm{X}] \text{ formée de vecteurs propres de } \varphi \text{ échelonnée en degré.}$$

6. D représente φ dans la base de vecteurs propres $\mathcal{T}$, donc

$$\mathrm{D} = \mathit{diag}(0, 1, 2^2, \dots, m^2).$$

7. $\mathrm{N} = \dfrac{1}{m^2}\mathrm{M}$ et $\Delta = \dfrac{1}{m^2}\mathrm{D} = \mathit{diag}\left(\dfrac{k^2}{m^2}, k \in [[\,0\,;\ m]]\right)$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta^n = \mathit{diag}\left(\left(\dfrac{k^2}{m^2}\right)^n, k \in [[\,0\,;\ m]]\right)$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta^n = \mathit{diag}(0, \dots, 0, 1).$$

8. Soit $\mathrm{L} = \lim\limits_{n \to +\infty} \Delta^n = \mathit{diag}(0, \dots, 0, 1)$. $\mathrm{L} = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}\big(\lim\limits_{n \to +\infty} \psi^n\big)$ et $\mathrm{L}^2 = \mathit{diag}(0^2, \dots, 0^2, 1^2) = \mathrm{L}$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} \psi^n \text{ est un projecteur et } \mathrm{rg}\big(\lim_{n \to +\infty} \psi^n\big) = \mathrm{rg}(\mathrm{L}) = 1.$$

Exercice 101

Racines et extrema de T_n *sur [-1,1]*

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.
La norme infinie $||.||_\infty$ d'un polynôme désigne son maximum que le segment $[\,-1\,;\ 1]$.

1. À l'aide de (♡), déterminer toutes les racines de T_n et justifier que T_n est scindé à racines simples.

2. Justifier que $||\mathrm{T}_n||_\infty = 1$.

3. Montrer que, dans $[\,-1\,;\ 1]$, l'équation $|\mathrm{T}_n(x)| = 1$ possède exactement $n+1$ solutions.

4. En déduire les racines de T_n'.

5. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_k\big(\mathrm{ch}(\theta)\big) = \mathrm{ch}(k\theta).$$

6. En déduire que, si $x \notin [-1\,;\ 1]$, alors $|\mathrm{T}_n(x)| > 1$.

Solution (**Ex.101** – *Racines et extrema de* T_n *sur [-1,1]*)

1. • Cherchons les racines de T_n dans $[-1\,;\ 1]$. Soit $x \in [-1\,;\ 1]$ et $\theta = \mathrm{Arccos}(x) \in [0\,;\ \pi]$.
$\mathrm{T}_n(x) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$
De plus : $\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n} \in [0\,;\ \pi] \iff -\dfrac{1}{2} \leqslant k \leqslant n - \dfrac{1}{2}$, or $\theta \in [0\,;\ \pi]$, donc
$\mathrm{T}_n(x) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff \exists k \in [[0\,;\ n-1]], \theta = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$
$\mathrm{T}_n(x) = 0 \iff \exists k \in [[0\,;\ n-1]], x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$.
La suite $\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est strictement croissante à valeurs dans $[0\,;\ \pi]$ et la fonction cos est strictement décroissante sur $[0\,;\ \pi]$ donc les n nombres $\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [[0\,;\ n-1]]$ sont deux à deux distincts (suite strictement décroissante).
• Comme $\deg(\mathrm{T}_n) = n$, T_n possède au plus n racines distinctes.
• Finalement, T_n a exactement n racines distinctes, toutes dans $[-1\,;\ 1]$ et est scindé à racines simples puisque $\deg(\mathrm{T}_n) = n$
$$\mathrm{T}_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left[\mathrm{X} - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right]$$

2. $\forall x \in [-1\,;\ 1], \mathrm{T}_n(x = \cos(n\mathrm{Arccos}(x)) \in [-1\,;\ 1]$. De plus, $\mathrm{T}_n(1) = 1$. Donc
$$||\mathrm{T}_n||_\infty = 1.$$

3. Soit $x \in [-1\,;\ 1]$ et $\theta = \mathrm{Arccos}(x) \in [0\,;\ \pi]$.
$|\mathrm{T}_n(x)| = 1 \iff \cos(n\theta) = \pm 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = k\pi \iff \exists k \in [[0\,;\ n]], \theta = \dfrac{k\pi}{n}$
$|\mathrm{T}_n(x)| = 1 \iff \exists k \in [[0\,;\ n]], x = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
Ces $n+1$ nombres étant deux à deux distincts,
$$|\mathrm{T}_n| = 1 \text{ possède exactement } n+1 \text{ solutions.}$$

4. • Sur $]-1\,;\ 1[$, chaque fois que T_n vaut ± 1, T_n atteint un extremum local puisque $||\mathrm{T}_n||_\infty = 1$, donc T_n' s'annule. Donc les $n-1$ nombres $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [[1\,;\ n-1]]$ sont $n-1$ racines distinctes de T_n'.
• Comme $\deg(\mathrm{T}_n') = \deg(\mathrm{T}_n) - 1 = n-1$, T_n n'a pas d'autre racine.
$$\text{Les } n-1 \text{ racine de } \mathrm{T}_n' \text{ sont } \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ pour } k \in [[1\,;\ n-1]].$$

5. On raisonne par récurrence sur k comme dans la première partie.
• $\mathrm{T}_0(\mathrm{ch}(\theta)) = 1 = \mathrm{ch}(0.\theta)$ et $\mathrm{T}_1(\mathrm{ch}(\theta)) = \mathrm{ch}(\theta) = \mathrm{ch}(1.\theta)$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$.
$$\begin{aligned}\mathrm{ch}((n+2)\theta) &= \mathrm{ch}(n\theta)\mathrm{ch}(2\theta) + \mathrm{sh}(n\theta)\mathrm{sh}(2\theta)\\ &= \mathrm{ch}(n\theta)(2\mathrm{ch}^2(\theta) - 1) + 2\mathrm{sh}(n\theta)\mathrm{sh}(\theta)\mathrm{ch}(\theta)\\ &= 2\mathrm{ch}(\theta)\big(\mathrm{ch}(n\theta)\mathrm{ch}(\theta) + \mathrm{sh}(n\theta)\mathrm{sh}(\theta)\big) - \mathrm{ch}(n\theta))\\ &= 2\mathrm{ch}(\theta)\mathrm{ch}((n+1)\theta) - \mathrm{ch}(n\theta)\\ &= 2\mathrm{ch}(\theta)\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{ch}(\theta)) - \mathrm{T}_n(\mathrm{ch}(\theta))\end{aligned}$$
• Par récurrence, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_n\big(\mathrm{ch}(\theta)\big) = \mathrm{ch}(n\theta).$$

6. • ch : $]0\,;\ +\infty[\ \to\ ]1\,;\ +\infty[$ est une bijection car continue strictement croissante ($\mathrm{ch}' = \mathrm{sh} > 0$ sur $]0\,;\ +\infty[$ et $\mathrm{ch}(]0\,;\ +\infty[) =]1\,;\ +\infty[$).
Soit $x > 1$. Il existe un (unique) $\theta \in]0\,;\ +\infty[$ tel que $x = \mathrm{ch}(\theta)$. On a alors $\mathrm{T}_n(x) = \mathrm{ch}(n\theta) > 1$ car $n\theta > 0$.
Ce qui prouve que : $\forall x > 1, |\mathrm{T}_n(x)| > 1$.

• Par parité de T_n,
$\forall x < 1, |T_n(x)| = |(-1)^n T_n(-x)| = |T_n(-x)| > 1$ car $-x > 1$.

$$\forall x \notin [-1\,;\,1], \text{ alors } |T_n(x)| > 1.$$

Variante sans utiliser la question précédente –

• S'il existe $x > 1$ tel que $T_n(x) = 1$, comme $T_n(1) = 1$ et T_n est dérivable, l'application du théorème de Rolle montre qu'il existe $y \in]\,1\,;\,x[$ tel que $T_n'(y) = 0$. Ceci est impossible car toutes les racines de T_n' sont dans $[-1\,;\,1]$. Donc

$$\forall x > 1, T_n(x) \neq 1.$$

• Supposons maintenant qu'il existe $x > 1$ tel que $T_n(x) < 1$. Comme $T_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2^{n-1}t^n \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à T_n continu sur $[\,x\,;\,+\infty[$ montre qu'il existe $y \in]\,x\,;\,+\infty[\, \subset]\,1\,;\,+\infty[$ tel que $T_n(y) = 1$, ce qui est exclu par le point précédent. Donc

$$\forall x > 1, \quad T_n(x) \geqslant 1.$$

• Donc finalement $\forall x > 1$, $T_n(x) > 1$.
• Et on conclut comme par la première méthode en invoquant la parité pour $x < -1$.

Exercice 102

Meilleure approximation uniforme de degré n de la fonction nulle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La norme infinie $||.||_\infty$ d'un polynôme désigne son maximum que le segment $[-1\,;\,1]$.
Dans cet exercice, on montre que le polynôme

$$t_n \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2^{n-1}} T_n$$

est l'unique polynôme unitaire de degré n réalisant le mimimum de la norme infinie sur $[-1\,;\,1]$, *i.e.* tel que pour tout polynôme $P \neq t_n$ tel que $\deg(P) = n$ et $\mathrm{dom}(P) = 1$, $||P||_\infty > ||t_n||_\infty$.

1. Justifier que $||t_n||_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

2. Soit un polynôme P unitaire de degré n. On raisonne par l'absurde en supposant que $||P||_\infty < ||t_n||_\infty$ et on pose $Q = t_n - P$.

a) Justifier que $\deg(Q) \leqslant n - 1$.

b) Pour tout $k \in [[\,0\,;\,n]]$, on pose : $x_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
Montrer que Q change de signe dans chacun des n intervalles $[\,x_{k+1}\,;\,x_k]$ (où $k \in [[\,0\,;\,n-1]]$).

c) Justifier que Q possède au moins n racines distinctes.

d) En déduire une contradiction.

e) Qu'a-t-on démontré ?

3. Dans cette question, on se propose de démontrer que t_n est l'*unique* polynôme unitaire de degré n de norme infinie minimale sur $[-1\,;\,1]$.
Soit P un polynôme unitaire de degré n vérifiant $||P||_\infty = ||t_n||_\infty$.

a) On pose $Q = t_n - P$.
Montrer que, pour tout $k \in [[\,0\,;\,n]]$, $\quad (-1)^k Q(x_k) \geqslant 0$.

b) Montrer que, pour tout $k \in [[\,0\,;\,n]]$, $\quad (-1)^k \displaystyle\prod_{0\leqslant i\leqslant n, i\neq k} (x_k - x_i) > 0$.

c) On pose

$$\forall k \in [[\,0\,;\,n]], \quad \lambda_k = \frac{Q(x_k)}{\displaystyle\prod_{0\leqslant i\leqslant n, i\neq k} (x_k - x_i)}.$$

Justifier que pour tout $k \in [[\,0\,;\,n]]$, $\lambda_k \geqslant 0$.

d) On pose

$$L_Q = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(\prod_{0\leqslant i\leqslant n, i\neq k} (X - x_i) \right).$$

Montrer que, pour tout $j \in [[\,0\,;\,n]]$, $\quad L_Q(x_j) = Q(x_j)$.

e) En déduire que $L_Q = Q$. Que peut-on en déduire pour le degré de L_Q ? Et pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k$?

f) En déduire finalement que $\mathrm{P} = t_n$.

Solution (**Ex.102** – *Meilleure approximation uniforme de degré n de la fonction nulle*)

1. D'après l'exercice précédent, $||\mathrm{T}_n||_\infty = 1$, donc par homogénéité $||t_n||_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

2. Soit un polynôme P unitaire de degré n. On raisonne par l'absurde en supposant que $||\mathrm{P}||_\infty < ||t_n||_\infty$ et on pose $\mathrm{Q} = t_n - \mathrm{P}$.

a) t_n et P sont unitaires de degré n donc $\deg(\mathrm{Q}) = \deg(t_n - \mathrm{P}) \leqslant n-1$ (les monômes dominants se détruisent).

b) Pour tout $n \in [[\,0\,;\ n]]$,

$t_n(x_k) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\mathrm{T}_n(x_k) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos(k\pi) = \dfrac{(-1)^k}{2^{n-1}}$.

Pour k pair, $\mathrm{Q}(x_k) = \dfrac{1}{2^{n-1}} - \mathrm{P}(x_k)$ avec $|\mathrm{P}(x_k)| \leqslant ||\mathrm{P}||_\infty < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ donc $\mathrm{Q}(x_k) > 0$.

Pour k impair, $\mathrm{Q}(x_k) = \dfrac{-1}{2^{n-1}} - \mathrm{P}(x_k)$ avec $|\mathrm{P}(x_k)| \leqslant ||\mathrm{P}||_\infty < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ donc $\mathrm{Q}(x_k) < 0$.

Donc Q change de signe dans chacun des n intervalles $[\,x_{k+1}\,;\ x_k]$ (où $k \in [[\,0\,;\ n-1]]$).

c) Dans chaque $[\,x_{k+1}\,;\ x_k]$ (où $k \in [[\,0\,;\ n-1]]$), Q qui est une fonction continue, change de signe donc s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Comme Q ne s'annule pas aux extrémités de chacun de ces intervalles, Q possède au moins n racines distinctes.

d) Q est un polynôme de degré au plus $n-1$ possédant au moins n racines distinctes donc Q est le polynôme nul. Donc $\mathrm{P} = t_n$. Donc $||\mathrm{P}||_\infty = ||t_n||_\infty$, ce qui est contradictoire.

e) On a démontré que tout polynôme P unitaire de degré n vérifie $||\mathrm{P}||_\infty \geqslant ||t_n||_\infty$. Autrement dit, t_n est un polynôme réalisant le minimum de $||.||_\infty$ parmi les polynômes unitaires de degré n.

3. Dans cette question, on se propose de démontrer que t_n est l'*unique* polynôme unitaire de degré n de norme infinie minimale sur $[\,-1\,;\ 1]$.

Soit P un polynôme unitaire de degré n vérifiant $||\mathrm{P}||_\infty = ||t_n||_\infty$.

a) Pour tout $k \in [[\,0\,;\ n]]$, $\quad (-1)^k\mathrm{Q}(x_k) \geqslant 0$, d'après l'analyse faite dans la question précédente, où les inégalités deviennent larges car cette fois $||\mathrm{P}||_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b) Soit $k \in [[\,0\,;\ n]]$.

La suite $(x_k)_{k\in[[\,0\,;\ n]]} = \left(\cos\dfrac{k\pi}{n}\right)_{k\in[[\,0\,;\ n]]}$ est une suite strictement décroissante (car cos est strictement décroissante sur $[\,0\,;\ \pi]$).

Le produit n'est pas nul puisqu'aucun facteur n'est nul.

Parmi les n facteurs de $\displaystyle\prod_{0\leqslant i\leqslant n, i\neq k}\big(x_k - x_i\big)$, il y en a exactement k qui sont négatifs : ceux pour lesquels $0 \leqslant i < k$.

Donc ce produit est du signe de $(-1)^k$, et on a bien

$$(-1)^k \prod_{0\leqslant i\leqslant n, i\neq k}\big(x_k - x_i\big) \geqslant 0.$$

c) Soit $k \in [[\,0\,;\ n]]$. $\lambda_k = \dfrac{(-1)^k\mathrm{Q}(x_k)}{(-1)^k\displaystyle\prod_{0\leqslant i\leqslant n, i\neq k}\big(x_k - x_i\big)} \geqslant 0$

d) Soit $j \in [[\,0\,;\ n]]$.

$\mathrm{L_Q}(x_j) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\left(\prod_{0\leqslant i\leqslant n, i\neq k}\big(x_j - x_i\big)\right) = \lambda_j\left(\prod_{0\leqslant i\leqslant n, i\neq j}\big(x_j - x_i\big)\right) + 0$

Donc $\mathrm{L_Q}(x_j) = \mathrm{Q}(x_j)$.

e) $\mathrm{L_Q}$ est de degré au plus n et Q au plus $n-1$, donc $\mathrm{L_Q} - \mathrm{Q}$ est de degré au plus n et admet au moins $n+1$ racines (les x_j pour $j \in [[\,0\,;\ n]]$) donc $\mathrm{L_Q} - \mathrm{Q} = 0$, donc $\mathrm{L_Q} = \mathrm{Q}$.

Donc $\deg(\mathrm{L_Q}) = n-1$. Or par construction la coefficient de X^n de $\mathrm{L_Q}$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k$. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k = 0$.

f) Les λ_k sont $n+1$ nombres positifs de somme nulle, donc ils sont tous nuls : $\forall k \in [[\,0\,;\ n]]\,, \lambda_k = 0$.

Donc $\forall k \in [[\,0\,;\ n]]\,, \mathrm{Q}(x_k) = 0$, et Q est un polynôme de degré au plus $n-1$ admettant au moins $n+1$ racines distinctes donc Q est nul. Donc finalement que $\mathrm{P} = t_n$.

Et les polynômes de seconde espèce ?

Ils sont définis par

$$\mathrm{U}_0 = 1,\ \mathrm{U}_1 = 2\mathrm{X},\ \text{et},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{U}_{n+2} = \mathrm{X}\mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n.$$

Vous pouvez remarquer que la relation de récurrence est la même que pour ceux de première espèce.
Trigonométriquement parlant, ils vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin\big((n+1)\theta\big) = \sin(\theta)\mathrm{U}_n\big(\cos(\theta)\big).$$

Ils sont en quelque sorte l'équivalent des (T_n) mais pour la fonction sin : ils permettent le développement en polynômes des expressions $\sin(nt)$. Malheureusement, il n'est pas possible de se débarrasser de du « $\sin(\theta)$ » apparaissant dans le second membre.

Chapitre 30

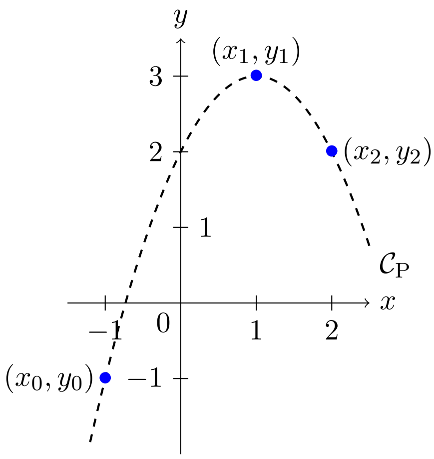
Interpolation polynomiale de Lagrange

[E3A-M1 – 2017 – PSI – Exo 1]

Position du problème

Est-il possible de construire un polynôme, de degré le plus bas possible, prenant de valeurs imposées en des points donnés ?

Par exemple, soit $(x_0, x_1, x_2) = (-1, 1, 2)$ et $(y_0, y_1, y_2) = (-1, 3, 2)$. Peut-on construire un polynôme P tel que : $\forall i \in [\![0\,;\ 2]\!],\quad \mathrm{P}(x_i) = y_i$?



Sur cet exemple, $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + 2$ convient et il n'y pas de polynôme solution de degré inférieur ou égal à 1 puisque les points ne sont pas alignés.

Le déterminant de Vandermonde montre que ce **problème d'interpolation** pour $n+1$ points possède une unique solution de degré au plus n.

Lagrange a développé une méthode systématique et efficace pour ce problème d'interpolation.

L'idée est de construire des polynômes qui valent 0 en chaque x_i sauf l'un d'entre eux. Ici :

$\mathrm{L}_0(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{6}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$ vaut 0 en 1 et en 2, et 1 en -1,

$\mathrm{L}_1(\mathrm{X}) = -\dfrac{1}{2}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-2)$ vaut 0 en -1 et en 2, et 1 en 1,

$\mathrm{L}_2(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{3}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-1)$ vaut 0 en -1 et en 1, et 1 en 2.

Alors $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = -\mathrm{L}_0(\mathrm{X}) + 3\mathrm{L}_1(\mathrm{X}) + 2\mathrm{L}_2(\mathrm{X})$ vaudra -1 en $x_0 = -1$, 3 en $x_1 = 1$ et 2 en $x_2 = 2$, mission accomplie.

Exercice 103

Deux méthodes pour l'existence et l'unicité

Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ $n+1$ scalaires de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) **deux à deux distincts**, et $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ $n+1$ scalaires de $\mathbb{K}$ quelconques.

1. *Première méthode* – En écrivant un système linéaire de $n+1$ équations, justifier qu'il existe un unique polynôme P dans $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ vérifiant

$$(\mathcal{I}) \qquad \forall i \in [\![0\,;\ n]\!],\quad \mathrm{P}(x_i) = y_i.$$

2. *Seconde méthode* – Soit $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}, P \mapsto \big(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)\big)$.
a) Montrer que φ est un isomorphisme.
b) En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ verifiant $(\mathcal{I})$.

Solution (**Ex.103 –** *Deux méthodes pour l'existence et l'unicité*)

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$. On cherche les $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ pour vérifier $(\mathcal{I})$.
Alors :

$$(\mathcal{I}) \iff \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n &= y_1 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n &= y_n \end{cases}$$

Posons $M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Alors :

$$(\mathcal{I}) \iff MX = Y.$$

Mais $\det(()\,M) = \mathcal{V}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (X_j - x_i) \neq 0$ car les (x_i) sont deux à deux distincts.
Donc M est inversible et

$$(\mathcal{I}) \iff X = M^{-1}Y,$$

donc le problème admet un unique solution, puisque ce système admet une unique solution.

2. a) φ est linéaire, et si $P \in \mathrm{Ker}\varphi$, alors P est de degré au plus n et admet $n+1$ racines distinctes, donc P est le polynôme nul. Ainsi φ est injective. Et comme $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = \dim(\mathbb{K}^{n+1})$, φ est un isomorphisme.
b) Comme $y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, y admet un unique antécédent dans $\mathbb{K}_n[X]$ par φ, autrement dit il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $(\mathcal{I})$.

Définition – Base de Lagrange
Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ $n+1$ scalaires de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On pose, pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$,

$$L_k(X) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{X - x_j}{x_k - x_j} = \frac{1}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} \prod_{j \neq k} (X - x_j).$$

Exercice 104

Propriété de la base de Lagrange

Justifier les propriétés suivantes.

① $\forall i \in [\![0\,;\,n]\!], \forall k \in [\![0\,;\,n]\!], \quad L_k(x_i) = \left\{ \begin{array}{cl} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{array} \right\} \overset{\text{Kronecker}}{=} \delta_{i,k}.$

② $\mathcal{L} = \big(L_k\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

③ Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a :

$$P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k.$$

Autrement dit, les coordonnées de tout polynôme P *dans la base de* Lagrange $\mathcal{L}$ *sont* $\big(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)\big) \in \mathbb{K}^n$.

④ Soit $(y_0, y_1, \dots, y_n)$. Il existe un unique polynôme dans $\mathbb{K}_n[X]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0\,;\,n]\!], \quad P(x_i) = y_i.$$

Autrement dit, le problème d'interpolation admet une unique solution, de degré au plus n.

Solution (**Ex.104 –** *Propriété de la base de* LAGRANGE)

Surtout, ne jamais commencer par tenter de développer l'expression définissant les L_k. *Elle est très pratique car elle nous indique les racines de* L_k.

① Soit $(i,k) \in [\![0\,;\,n]\!]^2$. $\mathrm{L}_k(x_i) = \displaystyle\prod_{0\leqslant j\leqslant n,\ j\neq k} \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j}$.

• Si $i = k$, alors le numérateur et le dénominateur sont égaux, donc $\mathrm{L}_k(x_i) = 1$.

• Si $i \neq k$, alors le numérateur s'annule car j peut prendre la valeur i, et pour cette valeur $x_i - x_j = x_i - x_i = 0$, donc$\mathrm{L}_k(x_i) = 0$.

② Tous les polynômes L_k sont de degré n car produit de n polynômes de degré 1.

$\mathcal{L}$ est de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{K}_n[\mathrm{X}])$. Il suffit de montrer que la famille $\mathcal{L}$ est libre.

Soit $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$(\mathcal{R}) \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{L}_k = 0.$$

Soit $i \in [\![0\,;\,n]\!]$. La relation $(\mathcal{R})$ évaluée en $\mathrm{X} = x_i$ donne $\alpha_i \times 1 = 0$ puisque $\mathrm{L}_k(x_i) = 0$ si $k \neq i$ et $\mathrm{L}_k(x_i) = 1$ si $k = i$.

Donc $\alpha_i = 0$.

Donc $\mathcal{L}$ est une famille libre.

③ Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{Q} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(x_k)\mathrm{L}_k$.

Alors : $\forall i \in [\![0\,;\,n]\!]$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}-\mathrm{Q})(x_i) &= \mathrm{P}(x_i) - \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(x_k)\mathrm{L}_k(x_i)\right)\\ &= \mathrm{P}(x_i) - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(x_k)\delta_{i,k}\\ &= \mathrm{P}(x_i) - \mathrm{P}(x_i) = 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{P} - \mathrm{Q} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ admet $n + 1$ racines distinctes, donc $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$ est le polynôme nul.

Donc $\mathrm{P} = \mathrm{Q} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(x_k)\mathrm{L}_k$, et comme $\mathcal{L}$ est une base, la décomposition est unique.

④ Posons $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k \mathrm{L}_k \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

Alors : $\forall i \in [\![0\,;\,n]\!]$, $\quad \mathrm{P}(x_i) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k \delta_{i,k} = y_i$.

P est bien solution du problème d'interpolation.

Si Q est une autre solution dans $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$, alors : $\forall i \in [\![0\,;\,n]\!]$, $\quad (\mathrm{P}-\mathrm{Q})(x_i) = 0$, donc $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$ possède au moins $n + 1$ racines et est de degré au plus n, donc $\mathrm{P} - \mathrm{Q} = 0$, *i.e.* $\mathrm{Q} = \mathrm{P}$, d'où l'unicité.

Exercice 105

Somme constante

Montrer que $\mathrm{L}_0 + \mathrm{L}_1 + \cdots + \mathrm{L}_n = 1$, polynôme constant égal à 1.

Solution (**Ex.105 –** *Somme constante*)

Le polynôme $\mathrm{L}_0 + \mathrm{L}_1 + \cdots + \mathrm{L}_n - 1$ est de degré au plus n et admet au moins $n+1$ racines : les x_i pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$.

Chapitre 31

Phénomène de Runge

On sait que, étant donnés une fonction f définie sur un intervalle I et $n+1$ points distincts, il existe un unique polynôme P_n de degré au plus n coïncidant avec f en ces $n+1$ points. Ce polynôme est traditionnellement appelé polynôme d'interpolation de Lagrange[1].

En 1901, le mathématicien allemand Carl Runge(1958–1927) a constaté (et démontré) que, *contre toute attente*, même pour une fonction f très régulière, lorsque l'on choisit des points équirépartis dans I, le polynôme d'interpolation P_n en ces points ne tend pas nécessairement uniformément vers f.

Notations –

- I désigne le segment $[-1\,;\ 1]$,
- α un réel strictement positif,
- f la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x^2+\alpha^2}$,
- n un entier naturel non nul pair s'écrivant $n = 2m$ (donc m désigne toujours $n/2$),
- pour tout $k \in [[1\,;\ m]]$, $x_k = \dfrac{2k-1}{n}$ et $x'_k = -x_k$, de sorte que la famille $(x'_m, x'_{m-1}, \dots, x'_1, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)$ est la famille des n points équirépartis de $-1+\dfrac{1}{n}$ à $1-\dfrac{1}{n}$ avec un pas valant $\dfrac{2}{n}$.
- P_n le polynôme interpolateur de f aux n points précédents, caractérisé par

$$\deg(P_n) \leqslant n-1 \text{ et } \forall k \in [[1\,;\ m]]\,, \quad P_n(x_k) = f(x_k) \text{ et } P_n(x'_k) = f(x'_k)$$

Exercice 106

Une expression de $f(x) - P_n(x)$

On pose :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad A_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} 1 - (x^2+\alpha^2)P_n(x) \text{ et } Q_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} \prod_{k=1}^{m}(x^2 - x_k^2).$$

1. Justifier qu'il existe $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad A_n(x) = Q_n(x)(rx+s).$$

2. Montrer que : $s = \dfrac{1}{Q(i\alpha)}$ et $r = 0$.

3. En déduire que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) - P_n(x) = \frac{(-1)^m Q_n(x)}{(x^2+\alpha^2)\displaystyle\prod_{k=1}^{m}(\alpha^2+x_k^2)}.$$

Solution (**Ex.106 –** *Une expression de $f(x) - P_n(x)$*)

1. On a :
$\forall k \in [[1\,;\ m]]\,, A_n(x_k) = 1 - (x_k^2+\alpha^2)f(x_k) = 0$, et de même $A_n(x'_k) = 0$.
Donc le polynôme A_n est factorisable par $(X - x_k)(X - x'_k) = X^2 - x_k^2$ pour tout $k \in [[1\,;\ m]]$.
Donc A_n est multiple de Q_n.

1. Voir la partie consacrée à l'interpolation polynomiale de Lagrange.

Or par définition $\deg(Q_n) = n$ et $\deg(A_n) = 2 + \deg(P_n) \leqslant n+1$, donc il existe $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$A_n = (rX + s)Q_n.$$
Cette relation est *a fortiori* vraie sur I.

2. En évaluant la relation précédente en $i\alpha$ et $-i\alpha$, on obtient
$\begin{cases} i\alpha r + s = 1/Q(i\alpha) \\ -i\alpha r + s = 1/Q(-i\alpha) \end{cases}$ or $Q(-i\alpha) = Q(i\alpha)$ donc $\begin{cases} i\alpha r + s = 1/Q(i\alpha) \\ -i\alpha r + s = 1/Q(i\alpha) \end{cases}$
Donc $s = \dfrac{1}{Q(i\alpha)}$ et $r = 0$.

3. Comme : $\forall x \in I, A_n(x) = 1 - (x^2 + \alpha^2)Q_n(x)$,
on en déduit : $\forall x \in I$
$$\begin{aligned} f(x) - P_n(x) = \frac{A_n(x)}{x^2+\alpha^2} &= \frac{Q_n(x)}{(x^2+\alpha^2)\displaystyle\prod_{k=1}^{m}\left(-\alpha^2 - x_k^2\right)} \\ &= \frac{(-1)^m Q_n(x)}{(x^2+\alpha^2)\displaystyle\prod_{k=1}^{m}\left(\alpha^2 + x_k^2\right)} \end{aligned}$$

Exercice 107

Étude d'une fonction auxilaire

Soit h la fonction définie sur $]\,0\,;\ +\infty[$ par :
$$h(x) = \int_0^1 \ln(x^2 + u^2)\mathrm{d}u.$$

1. Démontrer que :
$$\forall x \in\ ]\,0\,;\ +\infty[\,, h(x) = 2x\mathrm{Arctan}(1/x) + \ln(x^2+1) - 2.$$

2. Vérifier que :
$$\forall x \in\ ]\,0\,;\ +\infty[\,, h'(x) = \pi - 2\mathrm{Arctan}(x).$$

3. Étudier les variations de h.

4. a) Justifier qu'il existe un unique réel strictement positif α_0 tel que $h(\alpha_0) = 2\ln 2 - 2$.
b) Justifier que $\alpha_0 \in\ ]\,0\,;\ 1[$.

Solution (**Ex.107** – *Étude d'une fonction auxilaire*)

1. Soit $x \in\ ]\,0\,;\ +\infty[$. Toutes les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^1$ (au moins) sur $[\,0\,;\ 1]$.
$$\begin{aligned} h(x) &\overset{\text{IPP}}{=} \left[u\ln(x^2+u^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2u^2}{x^2+u^2}\mathrm{d}u = \ln(x^2+1) - 2\int_0^1 1 - \frac{x^2}{x^2+u^2}\mathrm{d}u \\ &= \ln(x^2+1) - 2 + 2x\int_0^1 \frac{1/x}{1+(u/x)^2}\mathrm{d}u \\ &= \ln(x^2+1) - 2 + 2x\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{u}{x}\right)\right]_0^1 \end{aligned}$$
donc
$$\forall x \in\ ]\,0\,;\ +\infty[\,, h(x) = 2x\mathrm{Arctan}(1/x) + \ln(x^2+1) - 2.$$

2. h est dérivable sur $]\,0\,;\ +\infty[$, et $\forall x \in\ ]\,0\,;\ +\infty[$:
$$\begin{aligned} h'(x) &= 2\mathrm{Arctan}(1/x) + 2x\frac{-1/x^2}{1+1/x^2} + \frac{2x}{x^2+1} \\ &= 2\mathrm{Arctan}(1/x), \text{ or } \mathrm{Arctan}(1/x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x), \text{ donc} \end{aligned}$$
$$\forall x \in\ ]\,0\,;\ +\infty[\,, h'(x) = \pi - 2\mathrm{Arctan}(x).$$

3. $\mathrm{Arctan} < \dfrac{\pi}{2}$ sur $]\,0\,;\ +\infty[$ donc h est strictement croissante.

4. a) • h est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de $]\,0\,;\ +\infty[$ sur $h(]\,0\,;\ +\infty[) =]\,-2\,;\ +\infty[$ (car $\mathrm{Arctan}(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$).

Comme $2\ln(2)-2 \in [-2\,;\,+\infty[$, il existe un unique réel strictement positif α_0 tel que $h(\alpha_0) = 2\ln 2 - 2$.

b) $h(1) = \dfrac{\pi}{2} + \ln(2) - 2 > 2\ln(2) - 2$ car $\dfrac{\pi}{2} > 1 > \ln(2)$, donc puisque h est strictement croissante, $\alpha_0 \in]\,0\,;\,1[$.

Exercice 108

Un équivalent de $\displaystyle\prod_{k=1}^{m} (\alpha^2 + x_k^2)$

1. Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\,0\,;\,1]$ et $a \in [\,0\,;\,1[$.
Pour tout $t \in [\,0\,;\,1-a]$, on pose :

$$\mathrm{G}(t) = \int_a^{a+t} \mathrm{F}(u)\mathrm{d}u - t\mathrm{F}\big(a + \frac{t}{2}\big).$$

a) Calculer G′ en fonction de F et F′.

b) Soit $x \in [\,0\,;\,1-a]$. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à F sur $\left[\,a + \frac{x}{2}\,;\,a + x\right]$, établir que

$$|\mathrm{G}'(x)| \leqslant \frac{x^2}{8}\,||\mathrm{F}''||_{\infty,[\,0\,;\,1]}.$$

c) En déduire que, pour tout $x \in [\,0\,;\,1-a]$:

$$|\mathrm{G}(x)| \leqslant \frac{x^3}{24}\,||\mathrm{F}''||_{\infty,[\,0\,;\,1]}.$$

2. À l'aide de la majoration précédente appliquée à F : $u \mapsto \ln(\alpha^2 + u^2)$, $a = \dfrac{k-1}{m}$ et $x = \dfrac{1}{m}$, montrer que, pour tout $k \in [[\,1\,;\,m]]$,

$$\left|\ln(\alpha^2 + x_k^2) - m\int_{(k-1)/m}^{k/m} \ln(\alpha^2 + u^2)\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{1+\alpha^2}{12\alpha^4 m^2}.$$

3. En déduire que :

$$\prod_{k=1}^{m} (\alpha^2 + x_k^2) \underset{m\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{h(\alpha)m}.$$

Solution (**Ex.108** – *Un équivalent de* $\displaystyle\prod_{k=1}^{m} (\alpha^2 + x_k^2)$)

1. Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\,0\,;\,1]$ et $a \in [\,0\,;\,1[$.
Pour tout $t \in [\,0\,;\,1-a]$, on pose :

$$\mathrm{G}(t) = \int_a^{a+t} \mathrm{F}(u)\mathrm{d}u - t\mathrm{F}\big(a + \frac{t}{2}\big).$$

a) En notant Φ une primitive de la fonction continue F, on voit que $t \mapsto \displaystyle\int_a^{a+t} \mathrm{F}(u)\mathrm{d}u = \Phi(a+t) - \Phi(a)$ est dérivable de dérivée $t \mapsto \mathrm{F}(a+t)$. Donc G est dérivable.
$\forall t \in [\,0\,;\,1]$, $\mathrm{G}'(t) = \mathrm{F}(a+t) - \mathrm{F}\big(a + \frac{t}{2}\big) - \frac{t}{2}\mathrm{F}'\big(a + \frac{t}{2}\big)$.

b) Soit $x \in [\,0\,;\,1-a]$. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à F sur $\left[\,a + \frac{x}{2}\,;\,a + x\right]$, établir que

$$|\mathrm{G}'(x)| \leqslant \frac{x^2}{8}\,||\mathrm{F}''||_{\infty,[\,0\,;\,1]}.$$

La formule de Taylor appliquée à l'ordre un avec F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left[\,a + \frac{x}{2}\,;\,a + x\right]$ donne

$$\mathrm{F}(a+x) = \mathrm{F}\big(a + \frac{x}{2}\big) + \frac{x}{2}\mathrm{F}'\big(a + \frac{x}{2}\big) + \int_{a+x/2}^{a+x} (a+x-u)\mathrm{F}''(u)\mathrm{d}u$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\mathrm{G}'(x)| &\leqslant \int_{a+x/2}^{a+x} (a+x-u)\left|\mathrm{F}''(u)\right|\mathrm{d}u \leqslant \left|\left|\mathrm{F}''\right|\right|_{\infty,[\,0\,;\,1]} \int_{a+x/2}^{a+x} a+x-u\mathrm{d}u \\
&\leqslant ||\mathrm{F}''||_{\infty,[\,0\,;\,1]} \left[-\frac{(a+x-u)^2}{2}\right]_{a+x/2}^{a+x} \\
&\leqslant \frac{x^2}{8}\,||\mathrm{F}''||_{\infty,[\,0\,;\,1]}.
\end{aligned}$$

c) Alors

$|\mathrm{G}(x)| = \left|\int_0^x \mathrm{G}'(u)\mathrm{d}u\right|$ car $\mathrm{G}(0) = 0$, donc

$|\mathrm{G}(x)| \leqslant \left|\int_0^x \frac{u^2}{8}\,||\mathrm{F}''||_{\infty,[0\,;\,1]}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{||\mathrm{F}''||_{\infty,[0\,;\,1]}}{8} \times \frac{x^3}{3}.$

Ainsi, pour tout $x \in [0\,;\,1-a]$:

$$|\mathrm{G}(x)| \leqslant \frac{x^3}{24}\,||\mathrm{F}''||_{\infty,[0\,;\,1]}.$$

2. • En substituant avec les valeurs données dans l'énoncé (F étant $\mathcal{C}^2$ sur $[0\,;\,1]$),

$\mathrm{G}(x) = \int_{(k-1)/m}^{k/m} \ln(\alpha^2+u^2)\mathrm{d}u - \frac{1}{m}\ln(\alpha^2+x_k^2)$

On déduit de la majoration précédente

$\left|\ln(\alpha^2+x_k^2) - m\int_{(k-1)/m}^{k/m} \ln\mathrm{d}u(\alpha^2+u^2)\right| \leqslant m\left(\frac{1}{m}\right)^3 \frac{1}{24}\,||\mathrm{F}''||_{\infty,[0\,;\,1]}$

• $\forall u \in [0\,;\,1]\,, \mathrm{F}'(u) = \frac{2u}{\alpha^2+u^2}$, $\mathrm{F}''(u) = \frac{2\alpha^2-2u^2}{(\alpha^2+u^2)^2}$, donc

(i) si $u \leqslant \alpha$, alors $|\mathrm{F}''(u)| \leqslant \frac{2\alpha^2}{\alpha^4} \leqslant \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^4}$,

(i) si $u > \alpha$, alors $|\mathrm{F}''(u)| = \frac{2}{((\alpha^2+u^2)^2}(u^2-\alpha^2) \leqslant \frac{2}{\alpha^4} \leqslant \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^4}$ (car $u \leqslant 1$),

et dans tous les cas $|\mathrm{F}''(u)| \leqslant \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^4}$, ce qui conduit à

$$\left|\ln(\alpha^2+x_k^2) - m\int_{(k-1)/m}^{k/m} \ln(\alpha^2+u^2)\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{1+\alpha^2}{12\alpha^4 m^2}.$$

3. Sommons pour k allant de 1 à m et appliquons l'inégalité trianguliare :

$\left|\ln\left(\prod_{k=1}^m(\alpha^2+x_k^2)\right) - m\int_0^1 \ln(\alpha^2+u^2)\mathrm{d}u\right| \leqslant m \times \frac{1+\alpha^2}{12\alpha^4 m^2}$, donc

$$\ln\left(\prod_{k=1}^m(\alpha^2+x_k^2)\right) - m\int_0^1 \ln(\alpha^2+u^2)\mathrm{d}u \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0.$$

Or $u_m - v_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ entraîne $\exp(u_m - v_m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 1$ donc $\mathrm{e}^{u_m} \underset{m\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{v_m}$.

D'où finalement

$$\prod_{k=1}^m(\alpha^2+x_k^2) \underset{m\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{h(\alpha)m}$$

puisque $h(\alpha) = \int_0^1 \ln(\alpha^2+u^2)\mathrm{d}u$.

Exercice 109

... et le phénomène de Runge

1. a) Vérifier que $\mathrm{Q}_n(1) = \frac{1}{n^n}\prod_{i=1}^n(2i-1)$.

b) Donner un équivalent simple de $\mathrm{Q}_n(1)$

c) En déduire un équivalent de $f(1) - \mathrm{P}_n(1)$.

2. Montrer finalement que :

$$\mathrm{P}_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)\ si, et seulement si, \alpha > \alpha_0.$$

Solution (**Ex.109 –** *... et le phénomène de Runge*)

1. a) $\mathrm{Q}_n(1) = \prod_{k=1}^m\left(1-\left(\frac{2k-1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n^{2m}}\prod_{k=1}^m(n^2-(2k-1)^2)$

$$= \frac{1}{n^n} \prod_{k=1}^{m} (n - (2k-1))(n + (2k-1)) = \frac{1}{n^n} \prod_{i=1}^{2n} (2i - 1).$$

b) $\mathrm{Q}_n(1) = \dfrac{1}{n^n} \times \dfrac{(2n)!}{2^n n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}{n^n 2^n \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}.2^n\mathrm{e}^{-n}$

c) $f(1) - \mathrm{P}_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n/2}\sqrt{2}.2^n\mathrm{e}^{-n}}{(1+\alpha^2)\mathrm{e}^{h(\alpha)n/2}}$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n/2}\sqrt{2}}{1+\alpha^2} \exp\left[\frac{n}{2}\big(2\ln(2) - 2 - h(\alpha)\big)\right].$$

2. • Si $2\ln(2) - 2 - h(\alpha) < 0$ (*i.e.* $\alpha > \alpha_0$), alors $f(1) - \mathrm{P}_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

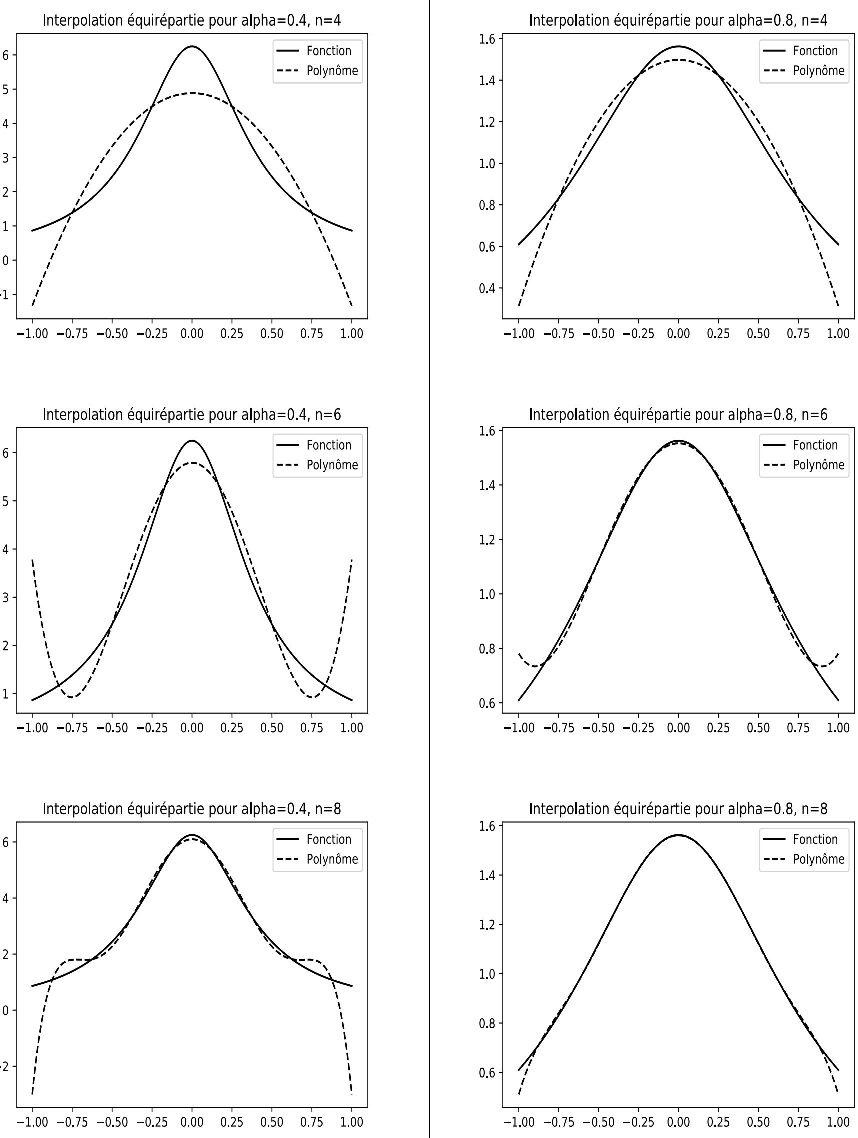
• Si $2\ln(2) - 2 - h(\alpha) \geqslant 0$ (*i.e.* $\alpha \leqslant \alpha_0$), alors $f(1) - \mathrm{P}_n(1)$ diverge sans limite.

Plus précisément, $|\mathrm{P}_n(1)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *si* $\alpha < \alpha_0$, *et si* $\alpha = \alpha_0$ *alors* $|\mathrm{P}_n(1)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\sqrt{2}}{1+\alpha^2}$ *qui est d'ailleurs différent de* $|f(1)|$.

Conclusion :

$\mathrm{P}_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$ *si, et seulement si,* $\alpha > \alpha_0$ et il n'y a pas convergence uniforme sur $[0\,;\,1]$...

$\alpha = 0,4 < \alpha_0$ $\qquad\qquad$ $\alpha = 0,8 > \alpha_0$



Chapitre 32

Convergence de l'interpolation de Lagrange et points de Tchebychev

Exercice 110

Erreur de l'interpolation polynomiale de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $[\,a\,;\; b]$ un segment, $f : [\,a\,;\; b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ points deux à deux distincts de $[\,a\,;\; b]$.
Soit P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de$f$ aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$, caractérisé par

$$\deg(\mathrm{P}) \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0\,;\; n]\!]\,, \mathrm{P}_n(x_k) = f(x_k).$$

On définit le polynôme π_n par

$$\pi_n = \prod_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - x_k).$$

1. Soit $x \in [\,a\,;\; b]$ **fixé et distincts des** x_k pour tout $k \in [\![0\,;\; n]\!]$.

a) Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que

$$\varphi : [\,a\,;\; b] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \mathrm{A}\pi_n(t)$$

s'annule en x.

b) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et s'annule en $n+2$ points distincts de $[\,a\,;\; b]$.

c) En déduire que $\varphi^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois en un point c de $]\,a\,;\; b[$.

d) Justifier que

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \pi_n(x).$$

2. Justifier que

$$\forall x \in [\,a\,;\; b]\,, \quad |f(x) - \mathrm{P}_n(x)| \leqslant \frac{\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty}{(n+1)!} \left|\pi_n(x)\right|,$$

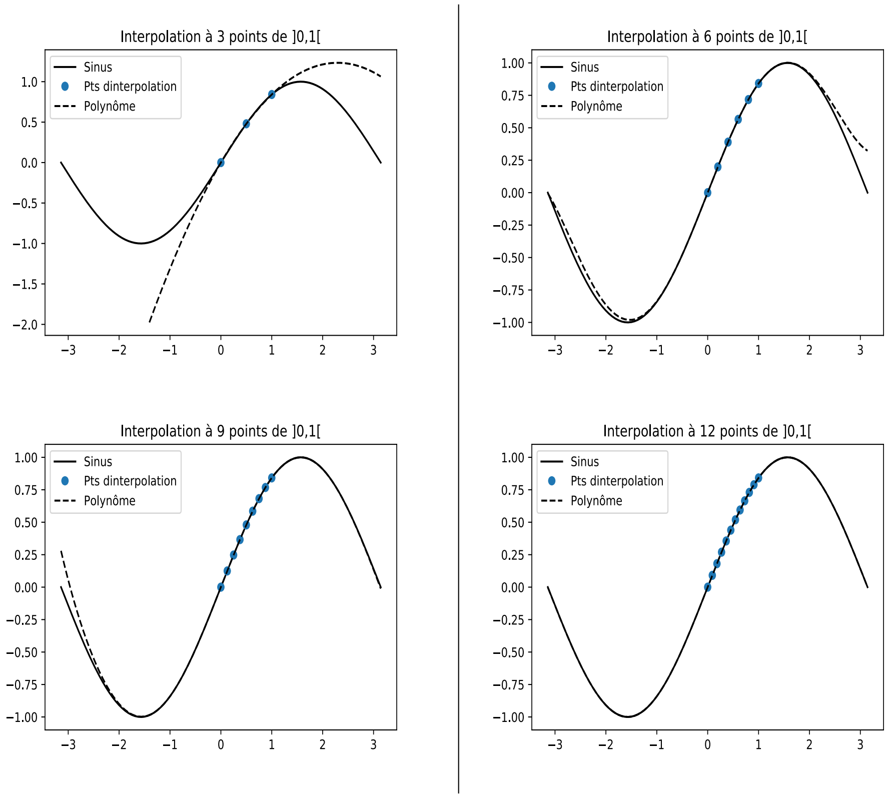
puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, ||f - \mathrm{P}_n||_\infty \leqslant \frac{\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty}{(n+1)!} \left|\left|\pi_n\right|\right|_\infty,$$

et enfin que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, ||f - \mathrm{P}_n||_\infty \leqslant \frac{\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

3. *Étonnant non ?*
Montrer que le polynôme interpolateur P_n de la fonction « sinus » en n points de $[\,0\,;\; 1]$ converge uniformément vers sin sur le segment $[\,-\pi\,;\; \pi]$... *et il n'y as pas d'erreur sur les segments considéres !... comme on peut le constater sur les figures suivantes :*



Solution (**Ex.110** – *Erreur de l'interpolation polynomiale de* LAGRANGE)

1. a) Comme x est distinct des x_k, $\pi_n(x) \neq 0$, donc $\mathrm{A} = \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)}$ convient.

b) φ est somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ au moins.
Pour tout $k \in [[\,0\,;\ n]]$, $f(x_k) = \mathrm{P}_n(x_k)$ et $\pi_n(x_k) = 0$ donc $\varphi(x_k) = 0$.
Par choix de A, $\varphi(x) = 0$.
Donc φ s'annule en $n+2$ points distincts de $[\,a\,;\ b]$.

c) En appliquant $n+1$ le théorème sur les intervalles formées par les $n+2$ points d'annulation de φ, on voit que φ' s'annule aux moins $n+1$ fois. Et en itérant ce raisonnement n fois, on voit que $\varphi^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois, en un point $c \in \,]\,0\,;\ 1[$.

d) Comme $\deg \mathrm{P}_n \leqslant n$, $\mathrm{P}_n^{(n+1)} = 0$ et comme π_n est un polynôme unitaire de degré $n+1$, $\pi^{()}nn+1 = (n+1)!$.
Donc $\varphi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - (n+1)!\mathrm{A}$, d'où $\mathrm{A} = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ et

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\pi_n(x).$$

2. Justifier que

$$\forall x \in [\,a\,;\ b]\,, \quad |f(x) - \mathrm{P}_n(x)| \leqslant \frac{\left|\left|\varphi^{(n+1)}\right|\right|_\infty}{(n+1)!}\pi_n(x).$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, ||f - \mathrm{P}_n||_\infty \leqslant \frac{\left|\left|\varphi^{(n+1)}\right|\right|_\infty}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

De ce qui précède découle :

$$\forall x \in [\,a\,;\ b]\,, \exists c_x \in \,]\,a\,;\ b[\,, |f(x) - \mathrm{P}_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_n(x)\right|$$

On en déduit

$$\forall x \in [\,a\,;\ b]\,, \quad |f(x) - \mathrm{P}_n(x)| \leqslant \frac{\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty}{(n+1)!}\,|\pi_n(x)|$$

puis

$$||f - \mathrm{P}_n||_\infty \leqslant \frac{\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty}{(n+1)!}\,||\pi_n||_\infty\,.$$

Enfin, puisque pour tout $x \in [a\,;\, b]$ $\pi_n(x)$ est le produit de $n+1$ facteurs $x - x_k$ tels que $|x - x_k| \leqslant b - a$, $|\pi_n(x)| \leqslant (b-a)^{n+1}$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, ||f - \mathrm{P}_n||_\infty \leqslant \frac{\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

3. *Étonnant non ?*
La majoration précédente conduit à

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, ||\sin - \mathrm{P}_n||_\infty \leqslant \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or $\dfrac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par encadrement $||\sin - \mathrm{P}_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\mathrm{P}_n \xrightarrow{\text{CVU}} \sin$ sur $[-\pi\,;\, \pi]$.

Exercice 111

Les points de TCHEBYCHEV

On reprend les hypothèses précédentes, en fixant de plus le segment en posant $[a\,;\, b] = [-1\,;\, 1]$.
On admet l'existence des *polynômes de Tchebychev* vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(\mathrm{T}_n) = n, \mathrm{dom}(\mathrm{T}_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$
$$\text{et } \forall \theta \in \mathbb{R}, \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

On pose $t_n = \dfrac{1}{2^n}\mathrm{T}_{n+1}$.

1. a) Justifier que t_n est unitaire de degré $n+1$.
b) Déterminer $||t_n||_\infty$.

2. On suppose que $||\pi_n||_\infty < ||t_n||_\infty$ et on pose $\mathrm{Q} = t_n - \pi_n$.
Soit pour tout $k \in [[0\,;\, n+1]]$, $y_k \overset{\text{déf.}}{=} \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$.
a) Montrer que Q change de signe dans chacun des $n+1$ intervalles $]\,y_{k+1}\,;\, y_k[$ avec $k \in [[0\,;\, n]]$.
b) En déduire que Q est le polynôme nul.
c) En déduire une contradiction.

3. a) Déterminer les racines de t_n.
b) En déduire que

$$\forall k \in [[0\,;\, n]], \quad x_k \overset{\text{déf.}}{=} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)$$

constitue un choix optimal des $n+1$ points x_k pour la convergence uniforme de (P_n) vers f.
Ces points s'appelle les *points de Tchebychev.*

4. En 1901 le mathématicien allemand Carl RUNGE a démontré que, pour la fonction

$$f : [-1\,;\, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{3x^2+1}$$

le choix de points uniformément répartis sur $]-1\,;\, 1[$ n'entraîne pas la convergence uniforme de P_n vers f. Plus précisément, on peut montrer le *phénomène de Runge* :

$$\mathrm{P}_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Observons ce qui se passe si l'on choisit les points de Tchebychev.
a) En remarquant que

$$\forall x \in [-1\,;\, 1], \quad f(x) = \mathcal{I}m\left(\frac{1}{\sqrt{3}x - i}\right),$$

proposer une majoration de $\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty$.
b) En déduire que polynôme interpolateur P_n de f aux points de Tchebychev converge uniformément vers f sur $[-1\,;\, 1]$.

Solution (**Ex.111** – *Les points de* TCHEBYCHEV)

1. a) $\deg(t_n) = \deg(\mathrm{T}_{n+1}) = n+1$ et $\mathrm{dom}(t_n) = \dfrac{1}{2^n}\mathrm{dom}(\mathrm{T}_{n+1}) = 1$.
b) $\forall x \in [-1\,;\, 1]$,

$$\mathrm{T}_{n+1}(x) = \mathrm{T}_{n+1}(\cos(\mathrm{Arccos}(x))) = \cos((n+1)\mathrm{Arccos}(x)) \in [-1\,;\, 1],$$

donc $||\mathrm{T}_{n+1}||_\infty \leqslant 1$.
De plus $\mathrm{T}_{n+1}(1) = \mathrm{T}_{n+1}(\cos(0)) = \cos((n+1)0) = 1$ donc $||\mathrm{T}_{n+1}||_\infty \geqslant 1$.
Donc $||\mathrm{T}_{n+1}||_\infty = 1$ et par homogénéité $||t_n||_\infty = \dfrac{1}{2^n}$.

2. a) $\forall k \in [[\,0\,;\ n+1]]$,
$\mathrm{Q}(y_k) = \dfrac{1}{2^n}\cos\big((n+1)y_k\big) - \pi_n(y_k) = \dfrac{1}{2^n}\cos(k\pi) - \pi_n(y_k) =$
$= (-1)^k\,||t_n||_\infty - \pi_n(y_k)$
Si k est pair, $\mathrm{Q}(y_k) = ||t_n||_\infty - \pi_n(y_k) > 0$ car $||\pi_n||_\infty < ||t_n||_\infty$.
Si k est impair, $\mathrm{Q}(y_k) = -\,||t_n||_\infty - \pi_n(y_k) < 0$ car $||\pi_n||_\infty < ||t_n||_\infty$.
Donc Q change de signe sur chacun de intervalles $]\,y_{k+1}\,;\ y_k[$ avec $k \in [[\,0\,;\ n]]$.

b) Comme toute fonction polynomiale est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires Q s'annule au moins une fois dans chaque intervalle $]\,y_{k+1}\,;\ y_k[$ avec $k \in [[\,0\,;\ n]]$.
Donc Q possède au moins $n+1$ racines distinctes. Mais $\mathrm{Q} = t_n - \pi_n$ où t_n et π_n sont tous deux de degré $n+1$ et unitaires, donc Q est au plus de degré n. Par conséquent, Q est le polynôme nul.

c) Donc $t_n = \pi_n$, donc $||\pi_n||_\infty = ||t_n||_\infty$, ce qui est contradictoire.

3. a) • Les racines de t_n sont celles de T_{n+1}.
• Cherchons les racines de T_{n+1} dans $[\,-1\,;\ 1]$.
Soit $x \in [\,-1\,;\ 1]$ et $\theta = \mathrm{Arccos}(x) \in [\,0\,;\ \pi]$.
$\mathrm{T}_{n+1}(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos((n+1)\theta) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \dfrac{\pi}{2(n+1)} + \dfrac{k\pi}{n+1}$
De plus : $\dfrac{\pi}{2(n+1)} + \dfrac{k\pi}{n+1} \in [\,0\,;\ \pi] \Longleftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant k \leqslant n + \dfrac{1}{2}$, or $\theta \in [\,0\,;\ \pi]$, donc
$\mathrm{T}_{n+1}(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos((n+1)\theta) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in [[\,0\,;\ n]]\,, \theta = \dfrac{\pi}{2(n+1)} + \dfrac{k\pi}{n+1}$

$$\mathrm{T}_{n+1}(x) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in [[\,0\,;\ n]]\,, x = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right).$$

La suite $\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est strictement croissante à valeurs dans $[\,0\,;\ \pi]$ et la fonction cos est strictement décroissante sur $[\,0\,;\ \pi]$ donc les n nombres $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)$ pour $k \in [[\,0\,;\ n-1]]$ sont deux à deux distincts (suite strictement décroissante).
• Comme $\deg(\mathrm{T}_{n+1}) = n+1$, T_{n+1} possède au plus $n+1$ racines distinctes.
• Finalement, T_{n+1} a exactement $n+1$ racines distinctes, toutes dans $[\,-1\,;\ 1]$ et est scindé à racines simples, donc

$$t_n = \prod_{k=0}^{n}\left[\mathrm{X} - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)\right]$$

4. a) Tout choix des x_k conduit à $||\pi_n||_\infty \geqslant ||t_n||_\infty$, et comme t_n possède $n+1$ racines distinctes dans $[\,-1\,;\ 1]$, prendre

$$\forall k \in [[\,0\,;\ n]]\,,\quad x_k \overset{\text{déf.}}{=} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)$$

rend minimale la norme $||\pi_n||_\infty$.
C'est donc un choix optimal des $n+1$ points x_k pour la convergence uniforme de (P_n) vers f.
On peut écrire

$$||t_n||_\infty = \min_{\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}],\deg(\mathrm{P})=n+1,\mathrm{dom}(\mathrm{P})=1} ||\mathrm{P}||_\infty.$$

On peut même démontrer que ce choix optimal est unique, c'est-à-dire que si P *est unitaire de degré* $n+1$, *alors* $||\mathrm{P}||_\infty = ||t_n||_\infty$ *entraîne* $\mathrm{P} = t_n$.

5. a) $\forall x \in [\,-1\,;\ 1]\,, \mathcal{I}m\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}x - i}\right) = \mathcal{I}m\left(\dfrac{\sqrt{3}x + i}{3x^2+1}\right) = f(x)$
On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [\,-1\,;\ 1]\,, f^{(k)}(x) = \mathcal{I}m\left(\frac{(-1)^k\sqrt{3}^k k!}{(\sqrt{3}x - i)^{k+1}}\right),$$

donc $\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant k!\sqrt{3}^k$ car $\left|(\sqrt{3}x - i)^{k+1}\right| \geqslant 1$.
Donc $\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty \leqslant (n+1)!\sqrt{3}^{n+1}$.

b) La majoration de l'exercice précédent

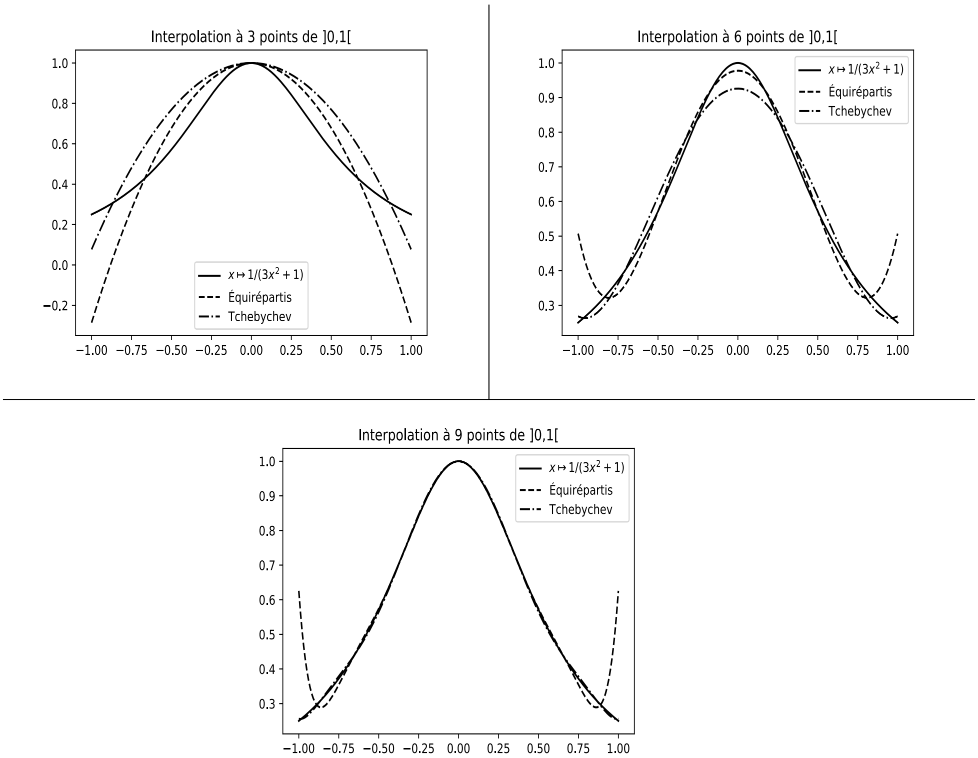
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, ||f - \mathrm{P}_n||_\infty \leqslant \frac{\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty}{(n+1)!} ||\pi_n||_\infty$$

donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$||f - \mathrm{P}_n||_\infty \leqslant \frac{\left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_\infty}{(n+1)!} ||t_n||_\infty \leqslant \frac{\sqrt{3}^{n+1}}{2^n} \leqslant \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Comme $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par encadrement,

$$||f - \mathrm{P}_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, i.e.\ \mathrm{P}_n \overset{\mathrm{CVU}}{\longrightarrow} f.$$



Chapitre 33

Espaces de Hilbert et familles de polynômes orthogonaux

[E3A-M1 – 2017 – PSI – Exo 2] [CCP – 2019 – PC – Exo 1]

Fonctions poids, produits scalaires intégraux, espaces $\mathbf{L^2}$ de Hilbert

① Soit $]\,a\,;\ b[\ \subset \mathbb{R}$ (éventuellement $a = -\infty$ ou/et $b = +\infty$). On appelle fonction poids $w :]\,a\,;\ b[\ \to \mathbb{R}$ toute fonction telle que

(i) f est continue strictement positive sur $]\,a\,;\ b[$,

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n w(x)$ est intégrable sur $]\,a\,;\ b[$.

Dans la suite, w est une fonction poids sur $]\,a\,;\ b[$.

② On appelle espace de Hilbert l'ensemble

$$\mathcal{L}_w^2 \overset{déf}{=} \big\{f :]\,a\,;\ b[\ \to \mathbb{R}, f^2 w \text{ est intégrable}\big\}.$$

$\mathcal{L}_w^2$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

③ On définit sur $\mathcal{L}_w^2$ le produit scalaire intégral

$$\langle f, g\rangle \overset{déf}{=} \int_a^b f(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x$$

et sa norme associée

$$||f|| \overset{déf}{=} \sqrt{\int_a^b f(x)^2 w(x)\mathrm{d}x}$$

Commentaires –

(ii) assure que pour tout n, $x \mapsto x^n$ est dans $\mathcal{L}_w^2$, donc $\mathbb{R}[\mathrm{X}] \subset \mathcal{L}_w^2$: $\mathcal{L}_w^2$ contient au moins tous les polynômes.

② prétend de $\mathcal{L}_w^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{]\,a\,;\ b[}$, énorme espace de toutes les fonctions de $]\,a\,;\ b[$ dans $\mathbb{R}$.

Pour montrer que $\mathcal{L}_w^2$ est stable par combinaison linéaire, on peut s'appuyer sur

$$(f + \lg g)^2 \leq f^2 + \lg^2 g^2 + 2\,|\lg fg| \leq (1 + |\lg|)(f^2 + |\lg|\,g^2)$$

obtenue grâce à $|xy| \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ (car $(|x| - |y|)^2 \geq 0$...)

Dans ③, la bilinéarité, la symétrie et la positivité ne posent aucun problème. Pour montrer que $\langle ., .\rangle$ est défini, on observe que $f^2 w$ est continue et positive, donc la nullité de l'intégrale entraîne la nullité de la fonction $f^2 w$ sur $]\,a\,;\ b[$, et comme w ne s'annule jamais, elle entraîne la nullité de f sur $]\,a\,;\ b[$.

Exemples – Dans les concours, on rencontre fréquemment :

① $]\,a\,;\ b[\ =]-1\,;\ 1[$ et $w : x \mapsto 1$, ce qui conduit au produit scalaire usuel

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Les *polynômes de Legendre* forment une famille orthogonale pour ce produit scalaire.

② $]\,a\,;\ b[\ =]-1\,;\ 1[$ et $w : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ce qui conduit au produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \overset{x=\cos(t)}{=} \int_0^\pi f(\cos(t))g(\cos(t))\mathrm{d}t.$$

Les *polynômes de Tchebychev* forment une famille orthogonale pour ce produit scalaire.

③ $]\,a\,;\ b[\ =]\,0\,;\ +\infty[$ et $w : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, ce qui conduit au produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

Les *polynômes de* LAGUERRE forment une famille orthogonale pour ce produit scalaire.

④ $]a\,;\ b[\, = \,]-\infty\,;\ +\infty[$ et $w : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, ce qui conduit au produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Les *polynômes de* HERMITE forment une famille orthogonale pour ce produit scalaire.

Exercice 112

Vérifications

Vérifier que pour tous ces exemples, les fonctions $x \mapsto x^n w(x)$ sont intégrables sur $]a\,;\ b[$.

Exercice 113

Exemple des polynômes de TCHEBYCHEV

On prend $]a\,;\ b[\, = \,]-1\,;\ 1[$ et $w : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ce qui conduit au produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \overset{x=\cos(t)}{=} \int_0^{\pi} f(\cos(t))g(\cos(t))\mathrm{d}t.$$

Soit (T_n) la suite de polynôme définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\theta) = \mathrm{T}_n(\cos(\theta)).$$

1. a) Montrer que la famille (T_n) est orthogonale avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(\mathrm{T}_n) = n$.

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les racines de T_n sont réelles, simples et dans $]a\,;\ b[\, = \,]-1\,;\ 1[$.

Solution (**Ex.113 –** *Exemple des polynômes de* TCHEBYCHEV)

1. a) Pour $m \neq n$,

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{T}_m, \mathrm{T}_n\rangle &= \int_0^{\pi} \mathrm{T}_m(\cos(t))\mathrm{T}_n(\cos(t))\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \cos(mt)\cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((m+n)t)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)t)}{m-n}\right]_0^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

Pour $\deg(\mathrm{T}_n) = n$, voir la partie consacrée aux polynômes de TCHEBYCHEV.

b) Dans cette partie, on a justement démontré que T_n admet pour racines les n nombres $\cos\left(\dfrac{2k-1}{n+1}\pi\right)$ où $k \in [\![0\,;\ n-1]\!]$, qui sont bien n racines distinctes dans $]-1\,;\ 1[$.

Exercice 114

Les polynômes orthogonaux vérifient une relation de récurrence d'ordre 2

À l'aide du procédé de GRAM-SCHMIDT par exemple, on peut construire une suite de polynômes orthogonaux $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg(\mathrm{P}_n) = n,$$

ce qui a pour conséquence que

$$\forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{Q} \perp \mathrm{P}_n$$

puisque $\mathrm{P}_n \in \mathrm{Vect}(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_{n-1})^{\perp} = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^{\perp}$.

Montrer qu'alors

$$\forall n \geq 2, \quad \exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3, \mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = (a_n\mathrm{X} + b_n)\mathrm{P}_{n-1}(\mathrm{X}) + c_n\mathrm{P}_{n-2}(\mathrm{X}).$$

Sur les polynômes de TCHEBYCHEV, *nous avons vu une telle relation*

$$\mathrm{T}_n = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n-1} - \mathrm{T}_{n-2}$$

.

Solution (**Ex.114 –** *Les polynômes orthogonaux vérifient une relation de récurrence d'ordre 2*)

• En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$ par exemple, ou par tout autre procédé, on peut construire une famille orthogonale $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ vérifiant les conditions.
• Soit pour tout n d_n le coefficient dominant de P_n.
$\mathrm{P}_n - \dfrac{d_n}{d_{n-1}}\mathrm{XP}_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, donc $(1, \dots, \mathrm{P}_{n-1})$ étant une base de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, il peut s'écrire

$$\mathrm{P}_n - \frac{d_n}{d_{n-1}}\mathrm{XP}_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \mathrm{P}_i \quad (\heartsuit).$$

En calculer le produit scalaire de $(\heartsuit)$ avec P_j, pour $0 \leq j < n$, on obtient

$$-\frac{d_n}{d_{n-1}} \langle \mathrm{P}_j, \mathrm{XP}_{n-1} \rangle = \beta_j \left|\left|\mathrm{P}_j\right|\right|^2.$$

Or par définition du produit scalaire, $\langle \mathrm{P}_j, \mathrm{XP}_{n-1} \rangle = \langle \mathrm{XP}_j, \mathrm{P}_{n-1} \rangle$.
Et P_{n-1} est orthogonal à tout polynôme de degré $i < n-1$, donc à XP_j si $j \leq n-3$. Donc

$$\forall j \leq n-3, 0 = \beta_j \left|\left|\mathrm{P}_j\right|\right|^2, \text{ donc } \beta_j = 0.$$

$(\heartsuit)$ devient

$$\mathrm{P}_n - \frac{d_n}{d_{n-1}}\mathrm{XP}_{n-1} = \beta_{n-2}\mathrm{P}_{n-2} + \beta_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}.$$

Donc en prenant $a_n = \dfrac{d_n}{d_{n-1}}$, $b_n = \beta_{n-1}$ et $c_n = \beta_{n-2}$

$$\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = (a_n\mathrm{X} + b_n)\mathrm{P}_{n-1}(\mathrm{X}) + c_n\mathrm{P}_{n-2}(\mathrm{X}).$$

Preuve

Exercice 115

Racines des polynômes orthogonaux

Soit $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes orthogonaux vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg(\mathrm{P}_n) = n.$$

Montrer que les n racines du polynôme P_n sont réelles, deux à deux distinctes, et à l'intérieur de $]\,a\,;\ b[$.

Solution (**Ex.115 –** *Racines des polynômes orthogonaux*)
Soit $x_1, \dots, x_k$ les racines de P_n qui sont réelles, de multiplicité impaire, à l'intérieur de $]\,a\,;\ b[$. On a $k \leq n$ car $\deg(\mathrm{P}_n) = n$.
Supposons $k < n$ et posons
$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = 1$ si $k = 0$,
$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - x_1)(\mathrm{X} - x_2)\dots(\mathrm{X} - x_k)$ sinon.
$\langle \mathrm{Q}, \mathrm{P}_n \rangle = 0$ car $\deg \mathrm{Q} = k < n$, or $\langle \mathrm{Q}, \mathrm{P}_n \rangle = \displaystyle\int_a^b \mathrm{Q}(x)\mathrm{P}_n(x)w(x)\mathrm{d}x$, et le polynôme QP_n est de signe constant car toutes ses racines sont de multiplicité paire. Donc $\mathrm{QP}_n w$ est continue, de signe constant et d'intégrale nulle sur $]\,a\,;\ b[$, donc est nulle sur $]\,a\,;\ b[$. Comme w ne s'annule jamais, le polynôme QP_n est le polynôme, ce qui est absurde car $\deg(\mathrm{QP}_n) = n + k \geq 0$.
Donc $k = n$, P_n admet n racines réelles dans $]\,a\,;\ b[$, et comme $\deg(\mathrm{P}_n) = n$, il n'y en a pas d'autres donc la propriété est vraie, et elles sont toutes de multiplicité 1.

Chapitre 34

Polynômes de Legendre

[CCP – 2018 – PC –]
Les polynômes de Legendre *forment aussi un exemple de famille de polynômes orthogonaux.*
Définition – Les polynômes de Legendre
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_n = (\mathrm{X}^2-1)^n = (\mathrm{X}-1)^n(\mathrm{X}+1)^n$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{L}_n = \mathrm{P}_n^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dX}^n}(\mathrm{X}^2-1)^n.$$

L_n *est le* $n-$*ième polynôme de* Legendre.

Exercice 116

Propriétés des polynômes de Legendre

1. Montrer que $\mathrm{L}_0 = 1$, $\mathrm{L}_1 = 2\mathrm{X}$ et $\mathrm{L}_2 = 12\mathrm{X}^2 - 4$.
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg(\mathrm{L}_n) = n, \ \mathrm{dom}(\mathrm{L}_n) = \dfrac{(2n)!}{n!}$ et L_n a la même parité que l'entier n.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet exactement n racines réelles distinctes comprises dans $]-1\,;\ 1[$.

Solution (**Ex.116** – *Propriétés des polynômes de Legendre*)

1. $\mathrm{P}_0 = 1$, donc $\mathrm{L}_0 = \mathrm{P}_0^{(0)} = \mathrm{P}_0 = 1$.
$\mathrm{P}_1 = (\mathrm{X}^2-1)$, donc $\mathrm{L}_1 = \mathrm{P}_1^{(1)} = 2\mathrm{X}$.
$\mathrm{P}_2 = (\mathrm{X}^2-1)^2$, donc $\mathrm{L}_2 = \mathrm{P}_2^{(2)} = \big(2.2\mathrm{X}(\mathrm{X}^2-1)\big)' = 12\mathrm{X}^2 - 4$.
$\deg(\mathrm{P}_n) = 2n$ donc $\deg(\mathrm{L}_n) = \deg(\mathrm{P}_n^{(n)}) = 2n - n = n$.
$\mathrm{P}_n = \mathrm{X}^{2n} + \dots$ donc après n dérivation,
$\mathrm{P}_n^{(n)} = \big[2n(2n-1)\dots(2n-(n-1))\big]\mathrm{X}^n + \dots = \dfrac{(2n)!}{n!}\mathrm{X}^n + \dots$
$\mathrm{P}_n = (\mathrm{X}^2-1)^n$ est un polynôme pair. Or le dérivé d'un polynôme pair est impair, et le dérivé d'un polynôme impair est pair. Donc après n dérivation, L_n est pair si n est pair et impair si n est impair.

2. *Ici, deux outils nous attendent :*
• *si* α *est racine de multiplicité* j *du polynôme* Q, *alors* $\mathrm{Q}(\alpha) = \mathrm{Q}'(\alpha) = \dots = \mathrm{Q}^{(j-1)}(\alpha) = 0$, *autrement dit* α *est racine de* j *polynômes dérivés successifs,*
• *si* $\mathrm{P}(a) = \mathrm{P}(b)$, *alors* P' *admet une racine dans* $]\,a\,;\ b[$*... le fameux théorème de* Rolle, *puisque* P *est dérivable.*
$\mathrm{P}_n = (\mathrm{X}+1)^n(\mathrm{X}-1)^n$ admet comme racine -1 et 1, toutes deux de multiplicité n.
Montrons par récurrence sur $k \in [\![0\,;\ n-1]\!]$ que $\mathrm{P}_n^{(k)}$ admet -1 et 1 comme racines de multiplicité $n-k$, et k racines distinctes dans $]-1\,;\ 1[$.
$\boxed{\mathrm{I}}$ -1 et 1 sont les racines de P_n, de multiplicité n exactement.
$\boxed{\mathrm{H}}$ Supposons la propriété vraie au rang $k \in [\![0\,;\ n-2]\!]$ fixé.
Alors -1 et 1 sont racines de multiplicité $n-k$ de $\mathrm{P}^{(k)}$, donc sont racines de multiplicité $n-k-1$ de $\mathrm{P}^{(k+1)}$.
De plus $\mathrm{P}^{(k)}$ admet k racines dans $]-1\,;\ 1[$, disons

$$-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < 1$$

Donc

$$\mathrm{P}^{(k)}(-1) = \mathrm{P}^{(k)}(\alpha_1) = \dots = \mathrm{P}^{(k)}(\alpha_k) = \mathrm{P}^{(k)}(1) = 0.$$

En appliquant le théorème de ROLLE sur chacun des $k+1$ intervalles $[-1\,;\ \alpha_1]$, $[\alpha_1\,;\ \alpha_2]$,..., $[\alpha_k\,;\ 1]$, on obtient que $\mathrm{P}^{k+1} = \left(\mathrm{P}^{(k)}\right)'$ admet $k+1$ racines respectivement dans $]-1\,;\ \alpha_1[$, $]\alpha_1\,;\ \alpha_2[$,..., $]\alpha_k\,;\ 1[$, ce qu'il fallait démontrer.

$\boxed{\mathrm{C}}$ La propriété est vraie pour tout $k \in [[0\,;\ n-1]]$ et en particulier pour $k = n-1$: $\mathrm{P}_n^{(n-1)}$ admet comme racine simple -1 et 1, ainsi que $n-1$ nombres distincts $-1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{n-1} < 1$.

Donc par le théorème de ROLLE toujours, $\mathrm{L}_n = \mathrm{P}_n^{(n)}$ admet n racines, intercalées entre ces $n+1$ nombres. *Cqfd.*

Exercice 117

Orthogonalité des polynômes de LEGENDRE

Montrer que les polynômes de LEGENDRE forment une famille orthogonale pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

qui correspond à la fonction poids $w : x \mapsto 1$ sur $]-1\,;\ 1[$ (voir § sur les familles de polynômes orthogonales).

Solution (**Ex.117** – *Orthogonalité des polynômes de LEGENDRE*) *Puisque -1 et 1 sont racines de L_m d'ordre m et de L_n d'ordre n, en prenant $n < m$, en effectuant n IPP successives dérivant L_n et primitivant L_m, -1 et 1 seront encore racines de la $n-$ème primitive de L_m mais L_n aura disparu, car $\deg(\mathrm{L}_n) = n$.*

Soit $n < m$.

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{L}_m, \mathrm{L}_n\rangle &= \int_{-1}^{1} \left[(x^2-1)^m\right]^{(m)} \left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{IPP}}{=} -\int_{-1}^{1} \left[(x^2-1)^m\right]^{(m-1)} \left[(x^2-1)^n\right]^{(n+1)}\mathrm{d}x \\
&\quad + \underbrace{\left[\left[(x^2-1)^m\right]^{(m-1)} \left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}\right]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car } -1 \text{ et } 1 \text{ sont racines d'ordre } m \text{ de } (x^2-1)^m} \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \int_{-1}^{1} \left[(x^2-1)^m\right]^{(m-2)} \left[(x^2-1)^n\right]^{(n+2)}\mathrm{d}x \\
&\quad - \underbrace{\left[\left[(x^2-1)^m\right]^{(m-2)} \left[(x^2-1)^n\right]^{(n+1)}\right]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car } -1 \text{ et } 1 \text{ sont racines d'ordre } m \text{ de } (x^2-1)^m} \\
&\ \ \vdots \\
&\overset{\text{IPP}}{=} (-1)^m \int_{-1}^{1} \left[(x^2-1)^m\right] \left[(x^2-1)^n\right]^{(n+m)}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

et comme $n+m > 2n$ et $\deg(x^2-1)^n = 2n$, $\left[(x^2-1)^n\right]^{(n+m)} = 0$,

$\langle \mathrm{L}_m, \mathrm{L}_n\rangle = 0$.

Chapitre 35

Intégration numérique de Gauss

[CCP – 2019 – PC – Exo 1]

☞**Lire le §« Espaces de Hilbert et familles de polynômes orthogonaux » au préalable.**

On connaît les classiques méthode des rectangles et méthode des trapèzes pour calculer la valeur approchée d'une intégrale. Ces méthodes ne sont pas adaptées aux intégrales impropres puisqu'elles nécessitent la connaissance des valeurs de l'intégrande aux bornes de l'intervalle, et nécessitent aussi que l'intervalle soit borné. Gauss a proposé une toute autre démarche, basées sur les polynômes orthogonaux.

Une formule magique

Soit P un polynôme. Étudions cette proposition due à Gauss :

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t \simeq \frac{5}{9}\mathrm{P}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\mathrm{P}(0) + \frac{5}{9}\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \qquad (\heartsuit)$$

($\heartsuit$) prétend calculer l'intégrale de P sur $[-1\,;\,1]$ en s'appuyant uniquement sur les valeurs de P en 3 points.

Observons ($\heartsuit$) pour les premiers monômes :

P	$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t$	$\frac{5}{9}\mathrm{P}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\mathrm{P}(0) + \frac{5}{9}\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$
1	2	$\frac{5}{9}+\frac{8}{9}+\frac{5}{9}=2$
X	0	$-\frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{8}{9}\times 0+\frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{5}}=0$
X^2	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}+\frac{8}{9}\times 0+\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{3}$
X^3	0	$-\frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{5}}^3+\frac{8}{9}\times 0+\frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{5}}^3=0$
X^4	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{9}\times\frac{3^2}{5^2}+\frac{8}{9}\times 0+\frac{5}{9}\times\frac{3^2}{5^2}=\frac{2}{5}$
X^5	0	$-\frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{5}}^5+\frac{8}{9}\times 0+\frac{5}{9}\sqrt{\frac{3}{5}}^5=0$
X^6	$\frac{2}{7}\simeq 0,2857...$	$\frac{5}{9}\times\frac{3^3}{5^3}+\frac{8}{9}\times 0+\frac{5}{9}\times\frac{3^3}{5^3}=\frac{6}{25}=0,24$

De plus la formule ($\heartsuit$) est linéaire, donc comme elle est vraie pour tout X^k avec $0 \leqslant k \leqslant 5$, elle est vraie pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$. Ainsi

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_5[\mathrm{X}], \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t = \frac{5}{9}\mathrm{P}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\mathrm{P}(0) + \frac{5}{9}\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Exercice 118

Intégration numérique ou « Quadrature de Gauss»

Soit $]\,a\,;\,b[$ un intervalle, w une fonction poids sur $]\,a\,;\,b[$ (voir le § sur les polynômes orthogonaux).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\mathrm{L}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une suite de polynômes orthogonaux telle que :

$$\forall k \in [\![\,0\,;\,n]\!]\,, \quad \deg(\mathrm{L}_k) = k.$$

En particulier, $\mathrm{L}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^{\perp}$ et L_n admet n racines distinctes deux à deux $x_1, \dots, x_n$ dans $]\,a\,;\ b[$.
Montrer qu'il existe n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}], \quad \int_a^b \mathrm{P}(t)w(t)\mathrm{d}t = \alpha_1 \mathrm{P}(x_1) + \cdots + \alpha_n \mathrm{P}(x_n) \quad (\mathcal{G})$$

Solution (**Ex.118** – *Intégration numérique ou « Quadrature de* G*AUSS»*)
(i) Cherchons $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pour que $(\mathcal{G})$ soit vérifiée pour tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Par linéarité, il suffit que $(\mathcal{G})$ soit vérifiée pour tous les monômes $(\mathrm{X}^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$.
Soit $k \in [\![\,0\,;\ n-1]\!]$. Notons $\mathrm{I}_k \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_a^b t^k \mathrm{d}t$.
X^k vérifie $(\mathcal{G})$ si, et seulement si, $\alpha_1 x_1^k + \cdots + \alpha_n x_n^k = \mathrm{I}_k$.
Ainsi

$$\begin{array}{c}\forall k \in [\![\,0\,;\ n-1]\!]\,, \\ \mathrm{X}^k \text{ vérifie } (\mathcal{G})\end{array} \iff \left\{\begin{array}{c} \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \mathrm{I}_0 \\ \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \mathrm{I}_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 x_1^{n-1} + \cdots + \alpha_n x_n^{n-1} = \mathrm{I}_{n-1} \end{array}\right.$$

$$\iff \mathrm{V}\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{I}_0 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_{n-1}\end{pmatrix} \text{ où } \mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

V est une matrice de VANDERMONDE, inversible car les racines x_i sont deux à deux distinctes.
Donc ce système admet une unique solution, donc il existe une unique famille de n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ telle que $(\mathcal{G})$ est vérifiée pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.
(ii) Montrons qu'alors $(\mathcal{G})$ est vraie pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}]$.
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}]$. Par la propriété de division euclidienne,

$$\begin{gathered}\exists (\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P} = \mathrm{QL}_n + \mathrm{R} \text{ avec } \deg(\mathrm{R}) \leqslant n-1 \\ \text{et aussi } \deg(\mathrm{Q}) \leqslant n-1 \text{ car } \deg(\mathrm{L}_n) = n \text{ et } \deg(\mathrm{P}) \leqslant 2n-1.\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{P}(t)w(t)\mathrm{d}t &= \int_a^b (\mathrm{Q}(t)\mathrm{L}_n(t) + \mathrm{R}(t))w(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \mathrm{Q}(t)\mathrm{L}_n(t)w(t)\mathrm{d}t + \int_a^b \mathrm{R}(t)w(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or $\mathrm{L}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^{\perp}$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ donc $\mathrm{L}_n \perp \mathrm{Q}$: $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Q}(t)\mathrm{L}_n(t)w(t)\mathrm{d}t = 0$

Et $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ donc $\displaystyle\int_a^b \mathrm{R}(t)w(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathrm{R}(x_i)$.

Mais : $\forall i \in [\![\,1\,;\ n]\!]\,, \quad \mathrm{R}(x_i) = \mathrm{P}(x_i) - \mathrm{Q}(x_i)\mathrm{L}_n(x_i) = \mathrm{P}(x_i)$ car x_i est une racine de L_n. Donc $\displaystyle\int_a^b \mathrm{R}(t)w(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathrm{P}(x_i)$.
Ainsi

$$\int_a^b \mathrm{P}(t)w(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathrm{P}(x_i).$$

Exercice 119

Exemple dans un cas impropre

Établir la formule suivante :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}], \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{2+\sqrt{2}}{4}\mathrm{P}\big(2-\sqrt{2}\big) + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\mathrm{P}\big(2+\sqrt{2}\big)$$

Solution (**Ex.119 –** *Exemple dans un cas impropre*) Ici $]\,a\,;\ b[\, = \,]\,0\,;\ +\infty[$ et $w :]\,0\,;\ +\infty[\, \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$.
Cherchons une famille $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$ orthogonale de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, par le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$.
Je rappelle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(n+1) = n!$.

• $||1|| = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1$ donc $\mathrm{P}_0 = 1$ convient.

• $\mathrm{X} - \langle \mathrm{X}, \mathrm{P}_0 \rangle \mathrm{P}_0 = \mathrm{X} - \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{X} - 1$

$||\mathrm{X}-1||^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t-1)^2 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (t^2 - 2t + 1)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 2! - 2.1! + 0! = 1$

Donc $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X} - 1$ convient.

• $\mathrm{X}^2 - \left\langle \mathrm{X}^2, \mathrm{P}_0 \right\rangle \mathrm{P}_0 - \left\langle \mathrm{X}^2, \mathrm{P}_1 \right\rangle \mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^2 - 2!\mathrm{P}_0 - (3! - 2!)\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 2$

Inutile de normaliser P_2 car je cherche juste une famille orthogonale, donc $\mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 2$.
Ses racines sont $2 \pm \sqrt{2}$.
Il reste à trouver α_1 et α_2 pour que
$\alpha_1 \mathrm{P}(2-\sqrt{2}) + \alpha_2 \mathrm{P}(2+\sqrt{2}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t$
lorsque $\mathrm{P} = 1$ et $\mathrm{P} = \mathrm{X}$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1(2-\sqrt{2}) + \alpha_2(2+\sqrt{2}) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \\ \alpha_2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Chapitre 36

Approximation polynomiale en norme L^2 de Hilbert

☞**Lire le §« généralités sur les polynômes orthogonaux au préalable.**

En dehors de l'approximation uniforme, une autre idée pour mesurer l'écart entre un polynôme P *et une fonction* f *est d'utiliser la norme* $||.||$ *de* Hilbert*. Je rappelle le contexte.*

Définition – Fonctions poids, produits scalaires intégraux, espaces $\mathbf{L^2}$ de Hilbert

① Soit $]\,a\,;\ b[\ \subset \mathbb{R}$ (éventuellement $a = -\infty$ ou/et $b = +\infty$). On appelle fonction poids $w :]\,a\,;\ b[\ \to \mathbb{R}$ toute fonction telle que

(i) f est continue strictement positive sur $]\,a\,;\ b[$,

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n w(x)$ est intégrable sur $]\,a\,;\ b[$.

Dans la suite, w est une fonction poids sur $]\,a\,;\ b[$.

② On appelle espace de Hilbert l'ensemble

$$\mathrm{L}^2_w \overset{\text{déf.}}{=} \left\{ f :]\,a\,;\ b[\ \to \mathbb{R}, f^2 w \text{ est intégrable} \right\}.$$

L^2_w est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

③ On définit sur L^2_w le produit scalaire intégral

$$\langle f, g\rangle \overset{\text{déf.}}{=} \int_a^b f(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x$$

et sa norme associée

$$||f|| \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt{\int_a^b f(x)^2 w(x)\mathrm{d}x}$$

Définition – Écart quadratique moyen

Pour toutes fonctions $(f, g) \in \mathrm{L}^2_w$, on appelle *écart quadratique* ou *distance quadratique* entre f et g le réel

$$d(f, g) = ||f - g|| = \sqrt{\int_a^b (f-g)^2(t)w(t)\mathrm{d}t}.$$

Exercice 120

Meilleure approximation polynomiale en norme L^2, ou au sens de Hilbert

Soit $f \in \mathrm{L}^2_w$.

Justifier que la meilleure approximation polynomiale de degré au plus n au sens de Hilbert est le polynôme $\mathrm{Q}_n(f) = p_{\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}(f)$, projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Autrement dit, justifier que $\mathrm{Q}_n(f) = p_{\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}(f)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que

$$||f - \mathrm{Q}_n(f)|| = \min_{\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]} ||f - \mathrm{P}||.$$

Solution (**Ex.120 –** *Meilleure approximation polynomiale en norme L^2, ou au sens de* Hilbert) C'est la *caractérisation du projeté orthogonal comme meilleure approximation en norme*, qui est une propriété du cours.

Elle repose sur le théorème de Pythagore.

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Alors

$||f - \mathrm{P}||^2 = \left|\left|\big(f - \mathrm{Q}_n(f)\big) + \big(\mathrm{Q}_n(f) - \mathrm{P}\big)\right|\right|^2.$

Or $f - \mathrm{Q}_n(f) \perp \mathrm{Q}_n(f) - \mathrm{P}$ car $f - \mathrm{Q}_n(f) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^\perp$ tandis que $\mathrm{Q}_n(f) - \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Par le théorème de Pythagore,

$||f - \mathrm{P}||^2 = ||f - \mathrm{Q}_n(f)||^2 + ||\mathrm{Q}_n(f) - \mathrm{P}||^2 \geqslant ||f - \mathrm{Q}_n(f)||^2$,
avec égalité si, et seulement si, $\mathrm{P} = \mathrm{Q}_n(f)$.

Chapitre 37

Approximation polynomiale uniforme et polynômes de BERNSTEIN

[CCP – 2016 – PC –] [MP-M2 – 2019 – PSI – Partie II]

... ou comment des idées probabilistes amènent à la démonstration d'un résultat analytique.

Nous allons démontrer le théorème suivant dans un cas particulier mais déjà très vaste : celui où la fonction f est K$-$*lipschitzienne sur* $[\,0\,;\ 1]$*, ce qui englobe toutes les fonctions* $\mathcal{C}^1$.

Théorème de WEIERSTRASS

Toute fonction $f : [\,0\,;\ 1] \to \mathbb{R}$ continue est la limite uniforme d'une suite de polynômes.

Autrement dit, il existe une suite de polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} ||\mathrm{P}_n - f||_\infty = 0.$$

Autrement dit, bis,

$$\overline{\mathbb{R}[\mathrm{X}]} = \mathcal{C}^0([\,0\,;\ 1]\,, \mathbb{R}).$$

Nous étudierons une approche probabiliste, due à BERNSTEIN

Exercice 121

Convergence uniforme des polynômes de BERNSTEIN

Soit $f : [\,0\,;\ 1] \to \mathbb{R}$ une fonction K$-$lipschitzienne.
Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in [\,0\,;\ 1]$. Soit $(\mathrm{X}_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variable aléatoire réelle indépendantes toutes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(x)$.
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \quad \text{ et } \quad \mathrm{F}_n = \frac{\mathrm{S}_n}{n}.$$

Justifier les propriétés suivantes.

1. $\forall \delta > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{F}_n - x\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\delta^2}$

2. $\forall \delta > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{F}_n - x\right| \geqslant \delta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3. *L'idée de BERNSTEIN est que* $\mathrm{F}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} x$*, ce qui se lit « F_n converge en probabilité vers x », et que par conséquent* $f(\mathrm{F}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(x)$*. Or BERNSTEIN remarque que*
(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, x)$, donc
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} \mathbb{E}\big(f(\mathrm{F}_n)\big)$ est un polynôme en x.

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\mathrm{P}_n(x) - f(x)\right| \leqslant \mathbb{E}\big(\,|f(\mathrm{F}_n) - f(x)|\,\big)$

5. On prend $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\mathrm{K}}$. En justifiant que
$\mathbb{E}\big(\,|f(\mathrm{F}_n) - f(x)|\,\big) = \displaystyle\sum_{y/|y-x|<\delta} |f(y) - f(x)|\,\mathbb{P}([\mathrm{F}_n = y])$

$$+ \sum_{y/|y-x|\geqslant\delta} |f(y)-f(x)|\,\mathbb{P}([\mathrm{F}_n=y])$$

on montre que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad |\mathrm{P}_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{||f||_\infty}{2n\delta^2}.$$

6. Finalement

$$||\mathrm{P}_n-f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\ i.e.\ \mathrm{P}_n \overset{\mathrm{CVU}}{\longrightarrow} f.$$

Solution (**Ex.121** – *Convergence uniforme des polynômes de* Bernstein)

1. *Voilà qui sent bon l'inégalité de* Bienaymé-Tchebychev.

$\mathbb{E}(\mathrm{F}_n) \overset{\text{lin.}}{=} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\mathrm{X}_i)=\dfrac{1}{n}n\times x=x$

$\mathbb{V}(\mathrm{F}_n) \overset{\text{indép.}}{=} \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(\mathrm{X}_i)=\dfrac{1}{n^2}n\times x(1-x)=\dfrac{x(1-x)}{n}$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall\delta>0,\quad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{F}_n-x\right|\geqslant\delta\right)\leqslant\frac{x(1-x)}{n\delta^2}.$$

Reste à majorer $x(1-x)$ sachant que $x\in[0\,;\,1]$. On peut étudier la fonction $x\mapsto x(1-x)$ ou observer que $x(1-x)=x-x^2=-\big(x-\dfrac{1}{2}\big)^2+\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{1}{4}$, donc

$$\forall\delta>0,\quad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{F}_n-x\right|\geqslant\delta\right)\leqslant\frac{1}{4n\delta^2}$$

2. Par encadrement, $\forall\delta>0,\quad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{F}_n-x\right|\geqslant\delta\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$

Ceci est exactement la **loi faible des grands nombres** *appliquée à la suite des variable aléatoire réelle* (X_i), *indépendantes, toutes de même loi, possédant une espérance valant* x *et une variance.*

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\mathrm{F}_n=\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}$, or S_n est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de loi $\mathcal{B}(x)$, donc par stabilité $\mathrm{S}_n\hookrightarrow\mathcal{B}(n,x)$, et $\mathrm{S}_n(\Omega)=[[0\,;\,n]]$.

Donc par transfert, en appliquant la fonction $g:u\mapsto f\big(\dfrac{u}{n}\big)$,

$$\mathbb{E}(f(\mathrm{F}_n))=\mathbb{E}\big(g(\mathrm{S}_n)\big)\overset{\text{transfert}}{=}\sum_{k=0}^{n}g(k)\mathbb{P}(\mathrm{S}_n=k)$$

Donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{P}_n(x)\overset{\text{déf.}}{=}\mathbb{E}\big(f(\mathrm{F}_n)\big)=\sum_{k=0}^{n}f\big(\frac{k}{n}\big)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

est un polynôme en x.

4. $\big|\mathrm{P}_n(x)-f(x)\big|\overset{\text{lin.}}{=}\big|\mathbb{E}(f(\mathrm{F}_n)-f(x))\big|$, or pour toute variable aléatoire réelle Y admettant une espérance, $|\mathrm{Y}|$ admet une espérance et $\mathrm{Y}\leqslant|\mathrm{Y}|$ entraîne par croissance de l'espérance $\mathbb{E}(\mathrm{Y})\leqslant\mathbb{E}(|\mathrm{Y}|)$. D'où

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \big|\mathrm{P}_n(x)-f(x)\big|\leqslant\mathbb{E}\big(\,|f(\mathrm{F}_n)-f(x)|\,\big)$$

5. On prend $n\in\mathbb{N}^*$ et $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2\mathrm{K}}$.

$\mathbb{E}\big(\,|f(\mathrm{F}_n)-f(x)|\,\big)\overset{\text{transfert}}{=}\displaystyle\sum_{y\in\mathrm{F}_n(\Omega)}|f(y)-f(x)|\,\mathbb{P}([\mathrm{F}_n=y])$

$\mathbb{E}\big(\,|f(\mathrm{F}_n)-f(x)|\,\big)=\displaystyle\sum_{y/|y-x|<\delta}|f(y)-f(x)|\,\mathbb{P}([\mathrm{F}_n=y])$

$$+ \sum_{y/|y-x|\geqslant\delta} |f(y)-f(x)|\,\mathbb{P}([\mathrm{F}_n=y])$$

Or : $|y-x|<\delta\Longrightarrow|f(y)-f(x)|\leqslant\mathrm{K}\delta\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$

Et pour $|y-x|\geqslant\delta$, on a $|f(y)-f(x)|\leqslant|f(y)|+|f(x)|\leqslant2\,||f||_\infty$.

Donc

$\mathbb{E}\big(\,|f(\mathrm{F}_n)-f(x)|\,\big)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}\displaystyle\sum_{y/|y-x|<\delta}\mathbb{P}([\mathrm{F}_n=y])$

$$+2\,||f||_\infty\sum_{y/|y-x|\geqslant\delta}\mathbb{P}([\mathrm{F}_n=y])$$

$\mathbb{E}\big(\,|f(\mathrm{F}_n)-f(x)|\,\big) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\mathbb{P}([|\mathrm{F}_n - x| < \delta]) + 2\,||f||_\infty\,\mathbb{P}([|\mathrm{F}_n - x| \geqslant \delta])$

En majorant la première probabilité par 1 et en utilisant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad |\mathrm{P}_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{||f||_\infty}{2n\delta^2}.$$

6.

7. Finalement, on a pris $\varepsilon > 0$ quelconque, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\mathrm{K}}$, indépendant de n et x. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 \geqslant \dfrac{||f||_\infty}{\delta^2}$, par exemple $n_0 = \left\lfloor \dfrac{||f||_\infty}{\delta^2} \right\rfloor + 1$.

Alors pour tout $n \geqslant n_0$: $\forall x \in [\,0\,;\ 1]\,,\quad |\mathrm{P}_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$

Donc : $\forall n \geqslant n_0,\quad ||\mathrm{P}_n - f||_\infty \leqslant \varepsilon.$

On a bien démontré :$||\mathrm{P}_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *i.e.* $\mathrm{P}_n \overset{\mathrm{CVU}}{\longrightarrow} f$.

Définition – Polynômes de Bernstein

La démarche de Bernstein fait apparaître une famille de polynômes baptisés *polynômes de Bernstein.*

8. Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose

$$\mathrm{B}_{n,k}(\mathrm{X}) \overset{\text{déf.}}{=} \binom{n}{k}\mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k}.$$

9. Soit $f : [\,0\,;\ 1] \to \mathbb{R}$. On appelle $n-$ième polynôme de Bernstein de f le polynôme

$$\mathrm{P}_n(f)(\mathrm{X}) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{B}_{n,k}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k}$$

Nous avons démontré que, lorsque f est K*−lipschitzienne,* $\mathrm{P}_n(f) \overset{CVU}{\longrightarrow} f$.

Exercice 122

Quelques propriétés des polynômes de Bernstein

Justifier les propriétés suivantes.

1. $\deg(\mathrm{B}_{n,k}) = n$ et $\mathrm{dom}(\mathrm{B}_{n,k}) = (-1)^{n-k}\dbinom{n}{k}$.

2. Pour tout $x \in [\,0\,;\ 1]$,

$$\mathrm{B}_{n,k}(x) \geqslant 0,\quad \sum_{k=0}^{n}\mathrm{B}_{n,k}(x) = 1,\quad \mathrm{B}_{n,k}(x) = \mathrm{B}_{n,n-k}(1-x)$$

3. $\mathrm{B}_{n,k}(0) = \delta_{k,0}$ et 0 est racine de multiplicité k,
$\mathrm{B}_{n,k}(1) = \delta_{n-k,0}$ et 1 de multiplicité $n-k$ de $\mathrm{B}_{n,k}$.

4. Décomposition dans la base canonique :

$$\mathrm{B}_{n,k}(\mathrm{X}) = \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}\mathrm{X}^i$$

5. Dérivé : $\mathrm{B}'_{n,k} = n(\mathrm{B}_{n-1,k-1} - \mathrm{B}_{n-1,k})$

6. La famille $(\mathrm{B}_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Solution (**Ex.122 –** *Quelques propriétés des polynômes de Bernstein*)

4. $\mathrm{B}_{n,k}(\mathrm{X}) = \dbinom{n}{k}\mathrm{X}^k\displaystyle\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}(-1)^j\mathrm{X}^j1^{n-k-j}$

$\mathrm{B}_{n,k}(\mathrm{X}) \overset{i=j+k}{=} \dbinom{n}{k}\mathrm{X}^k\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{i-k}(-1)^{i-k}\mathrm{X}^{i-k}$

or $\dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{i-k} = \dfrac{n!}{k!(i-k)!(n-i)!} = \dbinom{n}{i}\dbinom{i}{k}$ donc

$\mathrm{B}_{n,k}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}\mathrm{X}^i$

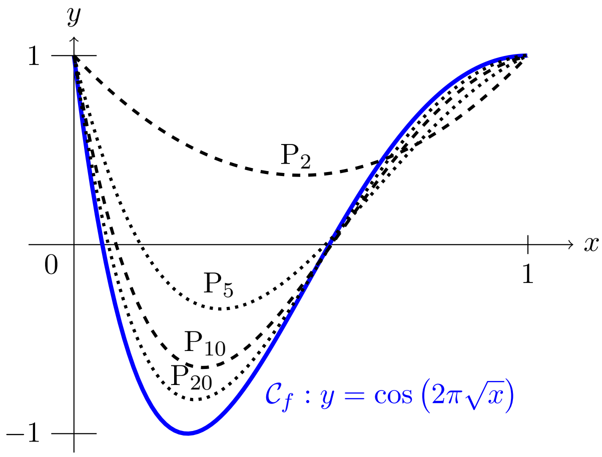
6. Le monôme de plus bas degré de $B_{n,k}$ est $\binom{n}{k}X^k$, donc dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\det_{\mathcal{B}}\big((B_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}\big) = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & 0 & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \times & \dots & \times & \binom{n}{n} \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \neq 0$$

donc $\big((B_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}\big)$ est une base.

Illustration graphique

Les polynômes de Bernstein P_2, P_5, P_{10} & P_{20}
pour la fonction $f : x \mapsto \cos\big(2\pi\sqrt{x}\big)$ sur $[\,0\,;\ 1]$



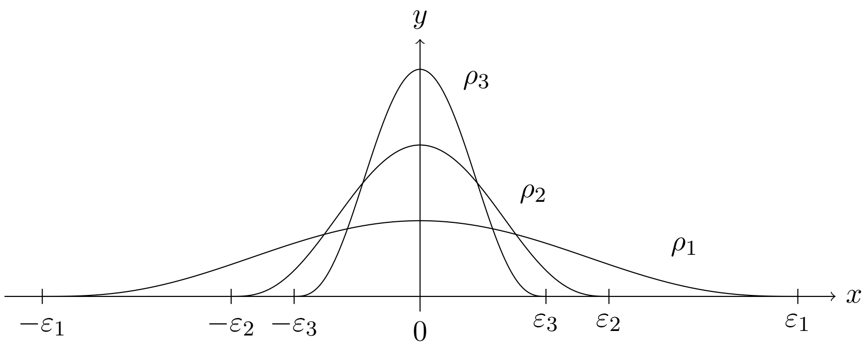
Chapitre 38

Produit de convolution et régularisation

Exercice 123

Suites régularisantes

On dit qu'une suite de fonctions $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est une **suite régularisante** si :
(i) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et positive ;
(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varepsilon_n \in]\,0\,;\ +\infty[$ tel que ρ_n est nulle en dehors du segment $[-\varepsilon_n\,;\ \varepsilon_n]$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$;
(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\mathrm{d}x = 1$.



1. Soit $k \in \mathbb{N}$.

a) Soit $\mathrm{I}_k \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{k+1}\mathrm{d}x$. Montrer que

$$\mathrm{I}_k = 2^{2k+3}\frac{\big((k+1)!\big)^2}{(2k+3)!}.$$

b) On pose

$$\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{I}_k}(1-x^2)^{k+1} & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que ρ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto n\rho(nx)$$

est une suite régularisante de fonctions, toutes de classe $\mathcal{C}^k$, et préciser, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une valeur possible de ε_n.

Solution (**Ex.123** – *Suites régularisantes*)

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.

a) Soit $\mathrm{I}_k \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{k+1}\mathrm{d}x$. Montrer que

$$\mathrm{I}_k = 2^{2k+3}\frac{\big((k+1)!\big)^2}{(2k+3)!}.$$

Raisonnons par récurrence.

• $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1 - x^2 \mathrm{d}x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 2^3 \frac{1!^2}{3!}$

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat acquis au rang $k-1$.

En intégrant par parties avec $x \mapsto x$ et $x \mapsto (1-x^2)^{k+1}$ de classe $\mathcal{C}^1$,

$\mathrm{I}_k = \left[x(1-x^2)^{k+1}\right]_{-1}^{1} + 2(k+1)\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^k \mathrm{d}x$

$\quad = 2(k+1)\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2-1+1)(1-x^2)^k \mathrm{d}x = 2(k+1)(\mathrm{I}_{k-1} - \mathrm{I}_k)$

D'où :

$\mathrm{I}_k = \dfrac{2(k+1)}{2k+3}\mathrm{I}_{k-1} = 2^{2k+2}\dfrac{(k+1)!k!}{(2k+3)(2k+1)!} = 2^{2k+3}\dfrac{\big((k+1)!\big)^2}{(2k+3)!}$.

• Par récurrence, l'égalité est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) ρ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;\ 1[$ et nulle donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty\,;\ -1[\cup]\,1\,;\ +\infty[$.
Il reste à étudier les raccordements en ± 1. Comme ρ est paire, il suffit d'établir que ρ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[\,0\,;\ +\infty[$.
$\mathrm{P} : x \mapsto (1-x^2)^{k+1}$ est polynomiale et admet 1 comme racine de multiplicité $k+1$ donc $\mathrm{P}^{(i)}(1) = 0$ pour tout i de $[\![\,0\,;\ k]\!]$. Donc ρ est k fois dérivable à gauche en 1 avec $\rho_g^{(i)}(1) = 0$ pour tout $i \in [\![\,0\,;\ k]\!]$.
De façon analogue, $\mathrm{N} : x \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $\mathrm{N}^{(i)}(1) = 0$ pour tout i de $[\![\,0\,;\ k]\!]$. Donc ρ est k fois dérivable à droite en 1 avec $\rho_d^{(i)}(1) = 0$ pour tout $i \in [\![\,0\,;\ k]\!]$.
Par conséquent, ρ est bien de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de 1.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par composition, ρ_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.
Comme ρ est positive, ρ_n aussi.
Pour $|x| > \dfrac{1}{n}$, $|nx| > 1$ donc $\rho_n(x) = n\rho(nx) = 0$. Donc en prenant $\varepsilon_n \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{n}$, ρ_n est nulle en dehors de $[\,-\varepsilon_n\,;\ \varepsilon_n]$.
Et on a bien : $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-1/n}^{1/n} n\rho(nx)\mathrm{d}x \overset{u=nx}{=} \int_{-1}^{1} \rho(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{I}_k}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{k+1}\mathrm{d}u$$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\mathrm{d}x = 1$.

La suite (ρ_n) est une suite régularisante de fonctions, toutes de classe $\mathcal{C}^k$.

Exercice 124

Heuristique de la convolution

Soit $[\,a\,;\ b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
Pour tout x de $[\,a\,;\ b]$, on note $f(x^-)$ et $f(x^+)$ respectivement les limites $\displaystyle\lim_{t\to x^-} f(t)$ et $\displaystyle\lim_{t\to x^+} f(t)$.

Soit $h > 0$ et $f_h : x \mapsto \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

Autrement dit, $f_h(x)$ est la valeur moyenne de f sur un petit intervalle centré en x (« petit » dépendant de la valeur de h).

1. a) Montrer que, si f est continue en x, alors

$$f_h(x) \xrightarrow[h\to 0^+]{} f(x).$$

b) Montrer que, si f n'est pas continue en x, alors

$$f_h(x) \xrightarrow[h\to 0^+]{} \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

On appelle régularisée de f, noté $\widetilde{f}$, la fonction définie par

$$\widetilde{f}(a) = f(a^+), \quad \forall x \in \,]\,a\,;\ b[\,, \widetilde{f}(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}, \qquad \text{et} \qquad \widetilde{f}(b) = f(b^-).$$

2. a) On pose

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [\,-h\,;\ h] \\ \dfrac{1}{2h} & \text{si } x \in [\,-h\,;\ h] \end{cases}$$

Que vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_h(x)\mathrm{d}x$?

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_h(x-t)\mathrm{d}t$$

On n'oubliera pas de justifier l'existence des intégrales généralisées ci-dessus.

3. *La fonction positive φ_h, dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1, concentre ses valeurs valeurs autour de 0, et ceci d'autant plus que $h > 0$ est petit. Cependant, φ_h n'est pas continue. Nous allons observer ce qui se passe en substituant une suite régularisante à φ_h.*

Dans toute cette question, $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite régularisante de fonctions ρ_n, chacune nulle en dehors du segment $[-\varepsilon_n\,;\ \varepsilon_n]$, avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$(f*\rho_n)(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\rho_n(x-t)\mathrm{d}t.$$

a) Vérifier que $f*\rho_n$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad (f*\rho_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\rho_n(t)\mathrm{d}t.$$

c) Montrer qu'en tout $x \in \mathbb{R}$ où f est continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty}(f*\rho_n)(x) = f(x).$$

On commencera par écrire $f(x) - (f*\rho_n)(x)$ comme une unique intégrale sur l'intervalle $[-\varepsilon_n\,;\ \varepsilon_n]$.

Solution (**Ex.124** – *Heuristique de la convolution*)

1. a) Soit $\varepsilon > 0$. En remarquant que $\displaystyle\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(x)\mathrm{d}t = \frac{1}{2h}2hf(x) = f(x)$,

$$\begin{aligned}|f_h(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}(f(t)-f(x)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme f est continue en x, il existe $h_0 > 0$ tel que

$$\forall h \in\,]\,0\,;\ h_0\,[\,, \forall t \in [\,x-h\,;\ x+h\,]\,|f(t)-f(x)| \leqslant \varepsilon, \text{ donc}$$

$$|f_h(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2h}2h\varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

On a bien $f_h(x) \xrightarrow[h\to 0^+]{} f(x)$.

b) $\displaystyle\forall h > 0,\quad f_h(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t\right)$

f est continue par morceaux et discontinue en x, il existe $h_g > 0$ tel que f est continue sur $[\,x-h_g\,;\ x\,[$. En posant

$$f_g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [\,x-h_g\,;\ x\,[\\ f(x^-) & \text{si } t = x\end{cases}$$

f_g est continue sur $[\,x-h_g\,;\ x\,]$ et coïncide avec f sur $[\,x-h_g\,;\ x\,[$, donc

$$\forall h \in\,]\,0\,;\ h_g\,[\,,\quad \int_{x-h}^{x} f_g(t)\mathrm{d}t = \int_{x-h}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

Et par un raisonnement analogue à la question précédente, puisque f_g est continue,

$$\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[h\to 0^+]{} f(x^-).$$

On montre de même que

$$\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} x\mathrm{d}tf(t) \xrightarrow[h\to 0^+]{} f(x^+),$$

d'où

$$f_h(x) \xrightarrow[h\to 0^+]{} \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

2. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_h(x)\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h}\frac{1}{2h}\mathrm{d}x = 1.$

b) Pour $t \in [\,x-h\,;\ x+h\,]$, $x-t \in [\,-h\,;\ h\,]$ donc $f(t)\varphi_h(x-t) = \dfrac{1}{2h}f(t)$.

Pour $t \notin [x-h\,;\ x+h]$, $x-t \notin [-h\,;\ h]$ donc $f(t)\varphi_h(x-t) = 0$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_h(x-t)\mathrm{d}t$ se réduit à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur le segment $[x-h\,;\ x+h]$, donc existe et on a

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_h(x-t)\mathrm{d}t = \int_{x-h}^{x+h} \frac{1}{2h} f(t)\mathrm{d}t = f_h(x).$

3. *La fonction positive φ_h, dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1, concentre ses valeurs valeurs autour de 0, et ceci d'autant plus que $h > 0$ est petit. Cependant, φ_h n'est pas continue. Nous allons observer ce qui se passe en substituant une suite régularisante à φ_h.*

Dans toute cette question, $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite régularisante de fonctions ρ_n, chacune nulle en dehors du segment $[-\varepsilon_n\,;\ \varepsilon_n]$, avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$(f * \rho_n)(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\rho_n(x-t)\mathrm{d}t.$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme précédemment, on a :

$$f(t)\rho_n(x-t) = \begin{cases} f(t)\rho_n(x-t) & \text{si } t \in [x-\varepsilon_n\,;\ x+\varepsilon_n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $(f * \rho_n)(x)$ est défini par l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur le segment $[x-\varepsilon_n\,;\ x+\varepsilon_n]$, donc qui existe.

b) Le changement de variable $u = x - t$, affine donc $\mathcal{C}^1$ strictement monotone, donne directement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * \rho_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\rho_n(u)\mathrm{d}u.$$

c) Soit x un point où f est continue. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\mathrm{d}t = 1$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_n(t)\mathrm{d}t = f(x)$, et comme ρ_n est nulle hors de $[-\varepsilon_n\,;\ \varepsilon_n]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |f(x) - (f*\rho_n)(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x-t))\rho_n(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} |f(x) - f(x-t)|\,\rho_n(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Comme f est continue en x, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [-\delta\,;\ \delta], \quad |f(x) - f(x-t)| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, [-\varepsilon_n\,;\ \varepsilon_n] \subset [-\delta\,;\ \delta].$$

Alors : $\forall n \geqslant n_0$,

$$|f(x) - (f*\rho_n)(x)| \leqslant \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} \varepsilon\rho_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

On a bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (f*\rho_n)(x) = f(x)$.

Définition – Produit de convolution

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que φ est nulle en dehors du segment $[-\alpha\,;\ \alpha]$.

On appelle *convolée de f et φ, notée $f * \varphi$,* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*\varphi)(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)\mathrm{d}t.$$

L'exercice précédent montre que, si $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite régularisante, la suite des convolées $(f*\rho_n)$ converge simplement vers f en tout point de continuité de f.

En particulier,

$$\textit{si } f \textit{ est continue, alors } f*\varphi_n \overset{CVS}{\longrightarrow} f \textit{ sur } \mathbb{R}.$$

Nous allons voir dans la suite de cette partie que $f*\varphi$ hérite des propriétés de régularité de φ.

Exercice 125

Régularité des convolées

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que φ est nulle en dehors du segment $[-\alpha\,;\ \alpha]$.
On pose
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * \varphi)(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)\mathrm{d}t.$$

1. a) Justifier que $f * \varphi$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * \varphi)(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose de plus φ de classe $\mathcal{C}^k$.
Montrer que $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et que, pour tout $i \in [[1\,;\ k]]$,
$$(f * \varphi)^{(i)} = f * \varphi^{(i)}.$$

3. En déduire, à l'aide des exercices précédents, que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, toute fonction continue est limite simple d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Solution (**Ex.125 –** *Régularité des convolées*)

1. a) • Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car φ l'est.
• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux.
Remarque : en fait, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur le segment $[x-\alpha\,;\ x+\alpha]$ et nulle en dehors de ce segment (car $t \notin [x-\alpha\,;\ x+\alpha] \implies x-t \notin [-\alpha\,;\ \alpha]$), donc est intégrable sur $\mathbb{R}$. Mais être intégrable n'est pas une hypothèse du théorème, c'en est une conclusion.
• Soit $[a\,;\ b]$ un segment quelconque de $\mathbb{R}$.
φ est continue sur le segment $[-\alpha\,;\ \alpha]$ donc bornée, et nulle en dehors, donc bornée sur $\mathbb{R}$. Donc $||\varphi||_\infty$ existe.
f est continue par morceaux donc bornée sur le segment $[a-\alpha\,;\ b+\alpha]$. Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(t)| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $t \in [a-\alpha\,;\ b+\alpha]$.
Alors
$$\forall (x,t) \in [a\,;\ b] \times \mathbb{R}, \quad |f(t)\varphi(x-t)| \leqslant \psi(t)$$
où $\psi(t) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} \mathrm{M}\,||\varphi||_\infty & \text{si } t \in [a-\alpha\,;\ b+\alpha] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
En effet, si $t < a-\alpha$, alors $x-t > \alpha$ car $x \geqslant a$ donc $\varphi(x-t) = 0$, et de même, si $t > b+\alpha$, alors $x-t < -\alpha$ car $x \leqslant b$ donc $\varphi(x-t) = 0$.
Or ψ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque constante sur un segment et nulle en dehors.
• Par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $f*\varphi$ est continue sur $[a\,;\ b]$, et ceci pour tout segment $[a\,;\ b]$ de $\mathbb{R}$. Donc $f*\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Le changement de variable $u = x-t$, affine donc $\mathcal{C}^1$ strictement monotone, donne directement
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\varphi(u)\mathrm{d}u.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose de plus φ de classe $\mathcal{C}^k$.
On reprend exactement la même démarche mais pour le théorème de la classe $\mathcal{C}^k$ des intégrales à paramètre. Il n'y a aucun problème car il suffit d'observer que, pour tout $i \in [[1\,;\ k]]$, $\left|\left|\varphi^{(i)}\right|\right|_\infty$ existe puisque $\varphi^{(i)}$ est continue sur le segment $[-\alpha\,;\ \alpha]$ et nulle en dehors, donc bornée sur $\mathbb{R}$. Ceci donne l'intégrabilité des $t \mapsto f(t)\varphi^{(i)}(x-t)$ pour tout $i \in [[0\,;\ k-1]]$ et la domination de $t \mapsto f(t)\varphi^{(k)}(x-t)$ par
$$\psi : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{M}\left|\left|\varphi^{(i)}\right|\right|_\infty & \text{si } t \in [a-\alpha\,;\ b+\alpha] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$
elle-même intégrable.
D'où la classe $\mathcal{C}^k$ de $f*\varphi$ et la formule
$$(f * \varphi)^{(i)} = f * \varphi^{(i)}$$
pour tout $i \in [[0\,;\ k]]$, par dérivation sous l'intégrale.

3. Par le premier exercice, il existe des suites régularisantes (ρ_n) de fonctions toutes de classe $\mathcal{C}^k$.
Par le deuxième exercice, si f est continue, alors $f * \rho_n \xrightarrow{\text{CVS}} f$.
Et par cet exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ puisque ρ_n l'est.
En conclusion, toute fonction continue est limite simple d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, ceci pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 126

Suite régularisante de fonctions $\mathcal{C}^\infty$

Soit g la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \exp\big(-1/x^2\big) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a) Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, g est de classe $\mathcal{C}^k$ et qu'il existe un polynôme P_k tel que

$$\forall x > 0, \quad g^{(k)}(x) = \frac{\mathrm{P}_k(x)}{x^{3k}} \exp\big(-1/x^2\big).$$

2. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \rho(x) = g(x+1)g(1-x).$$

a) Justifier que ρ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, positive, et nulle en dehors du segment $[-1\,;\,1]$.

b) Justifier l'existence de $\mathrm{I} \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_{-1}^{1} \rho(x)\mathrm{d}x$.

3. Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n}{\mathrm{I}}\rho(nx)$$

est une suite régularisante de fonctions, toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$, et préciser, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une valeur possible de ε_n.

4. Justifier que toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ est la limite simple d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Solution (**Ex.126 –** *Suite régularisante de fonctions $\mathcal{C}^\infty$*)

1. a) g est continue sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes opératoires usuels et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} = 0 = g(0)$ donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

b) • Pour $k = 0$, la propriété est vraie avec $\mathrm{P}_0(x) = 1$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété est vraie au rang k.

(i) g est $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}^*$ (par les théorèmes opératoires usuels).

(ii) Comme g est $\mathcal{C}^k$ avec $\forall x \in\,]-\infty\,;\,0[, \quad g^{(k)}(x) = 0$, g est $\mathcal{C}^{k+1}$ avec $\forall x \in\,]-\infty\,;\,0[, \quad g^{(k+1)}(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-} g^{(k+1)}(x) = 0$.

(iii) $\forall x > 0, \quad g^{(k)}(x) = \dfrac{\mathrm{P}_k(x)}{x^{3k}} \exp\big(-1/x^2\big)$, donc g est $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $]\,0\,;\,+\infty[$ avec

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad g^{(k+1)}(x) &= \left(\frac{\mathrm{P}_k'(x)}{x^{3k}} - \frac{3k\mathrm{P}(x)}{x^{3k+1}} + \frac{2\mathrm{P}_k(x)}{x^{3k+3}}\right) \exp(-1/x^2) \\ &= \frac{\mathrm{P}_{k+1}(x)}{x^{3(k+1)}} \exp(-1/x^2) \end{aligned}$$

en posant $\mathrm{P}_{k+1}(x) = x^3\mathrm{P}_k'(x) - 3kx^2\mathrm{P}_k(x) + 2\mathrm{P}_k(x)$, qui est bien un polynôme.

Alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} g^{(k+1)}(x) \overset{u=1/x}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{u^{3(k+1)}\mathrm{P}_{k+1}(1/u)}{\exp(u)} = 0$, par croissance comparée (car aussi $\mathrm{P}_{k+1}(1/u) \xrightarrow[u\to 0^+]{} \mathrm{P}(0)$, limite finie).

(iv) Finalement : $g^{(k+1)}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, limite réelle finie.

D'après le théorème de régularité du prolongement, g est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$.

J'ai prouvé la propriété au rang $k+1$.

• Par récurrence sur k, la propriété est établie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. a) ρ est le produit de deux fonctions positives et $\mathcal{C}^\infty$ donc est positive et $\mathcal{C}^\infty$.

Pour $x < -1$, $g(x+1) = 0$ donc $\rho(x) = 0$.

Pour $x > 1$, $g(1-x) = 0$ donc $\rho(x) = 0$.

b) ρ est continue sur le segment $[-1\,;\,1]$ et nulle en dehors donc $\mathrm{I} \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_{-1}^{1} \rho(x)\mathrm{d}x$ existe.

3. *Copier-coller du premier exercice.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par composition, ρ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Comme ρ est positive, ρ_n aussi.

Pour $|x| > \dfrac{1}{n}$, $|nx| > 1$ donc $\rho_n(x) = n\rho(nx) = 0$. Donc en prenant $\varepsilon_n \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{n}$, ρ_n est nulle en dehors de $[-\varepsilon_n\,;\,\varepsilon_n]$.

Et on a bien : $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-1/n}^{1/n} n\rho(nx)\mathrm{d}x \overset{u=nx}{=} \frac{1}{\mathrm{I}}\int_{-1}^{1} \rho(u)\mathrm{d}u = 1$$

La suite (ρ_n) est une suite régularisante de fonctions, toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$.

4. Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Alors $f * \rho_n \overset{\text{CVS}}{\longrightarrow} f$, et par l'exercice 3, question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 127

Uniforme continuité et convergence uniforme

On se donne une suite régularisante $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions toutes de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
D'après les exercices précédents, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$, et que, en tout point x de $\mathbb{R}$ où f est continue, $f * \rho_n(x)$ tend vers $f(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. On suppose que f est continue par morceaux sans être continue. Justifier que la suite de fonctions $(f * \rho_n)$ ne converge pas uniformément vers f.

On suppose dorénavant que f est continue sur $\mathbb{R}$

On se donne un segment $[\,a\,;\;b]$ de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$).

2. Dans cette question un peu technique, on se propose de démontrer le *théorème de* Heine qui affirme que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in [\,a\,;\;b]^2, \quad |x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \quad (\mathcal{U})$$

a) En quoi cette propriété $(\mathcal{U})$ n'est pas équivalente à la continuité de f sur $[\,a\,;\;b]$?

b) Si f vérifie la propriété $(\mathcal{U})$, f est-elle continue ?
La propriété $(\mathcal{U})$ s'appelle l'*uniforme continuité.*
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $\mathrm{A} \subset [\,a\,;\;b]$ l'ensemble des points c tels que

$$\exists \delta_c > 0, \forall (x,y) \in [\,a\,;\;c]^2, \quad |x-y| \leqslant \delta_c \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \quad (\mathcal{U}_c)$$

Comme A est non vide, puisque $a \in \mathrm{A}$, et majorée par b, A possède une borne supérieure. On note β la borne supérieure de A, qui est donc le plus petit des majorants de A.

c) Justifier qu'il existe $h > 0$ tel $|x - \beta| \leqslant h$ et $x \in [\,a\,;\;b]$ entraînent $|f(x) - f(\beta)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

d) Justifier l'existence de $c \in \mathrm{A}$ tel que $\beta - \dfrac{h}{2} < c \leqslant \beta$.
On note δ_c défini par $(\mathcal{U}_c)$.

e) Soit $\delta' = \min\left(\delta_c, \dfrac{h}{2}\right)$.
Montrer que, pour tout $(x,y) \in \big([\,a\,;\;b] \cap [\,a\,;\;\beta+h]\big)^2$,
$|x-y| \leqslant \delta'$ entraîne $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

f) En déduire que $\beta \in \mathrm{A}$, puis que $\beta = b$.

g) Que peut-on en conclure ?

3. Montrer alors que, sur tout segment $[\,a\,;\;b]$ de $\mathbb{R}$, la suite de fonctions $(f * \rho_n)$ converge uniformément vers f.

Solution (**Ex.127** – *Uniforme continuité et convergence uniforme*)

1. Puisque les ρ_n sont toutes continues ($k \geqslant 0$), les $f * \rho_n$ sont toutes continues. Et $f * \rho_n \overset{\text{CVS}}{\longrightarrow} f$.
Si la convergence était uniforme, alors f serait aussi continue, d'après le théorème du cours. Comme f n'est pas, la suite de fonctions $(f * \rho_n)$ ne converge pas uniformément vers f.
On se donne un segment $[\,a\,;\;b]$ de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$).

2. Dans cette question un peu technique, on se propose de démontrer le *théorème de* Heine qui affirme que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in [\,a\,;\;b]^2, \quad |x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \quad (\mathcal{U})$$

a) Observons :

$$f \text{ continue sur } [\,a\,;\;b]$$
$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall y \in [\,a\,;\ b\,]\,,\quad \lim_{x\to y} f(x) = f(y)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall y \in [\,a\,;\ b\,]\,, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [\,a\,;\ b\,]\,,\quad |x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon \quad (\mathcal{C})$$

Dans cette dernière assertion $(\mathcal{C})$, δ dépend de y et de ε, tandis que dans $(\mathcal{U})$, δ ne dépend que de ε (on peut prendre le même δ pour tous les y de $[\,a\,;\ b\,]$).
$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{U})$ ne sont donc pas équivalentes.

b) Par l'ordre des quantificateurs, $(\mathcal{U}) \Longrightarrow (\mathcal{C})$, autrement dit, toute fonction uniformément continue est continue.
Le théorème de Heine dit que, **sur un segment**, si f est continue, alors elle est uniformément continue.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $\mathrm{A} \subset [\,a\,;\ b\,]$ l'ensemble des points c tels que

$$\exists \delta_c > 0, \forall (x,y) \in [\,a\,;\ c\,]^2\,,\quad |x-y| \leqslant \delta_c \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon \quad (\mathcal{U}_c)$$

Comme A est non vide, puisque $a \in \mathrm{A}$, et majorée par b, A possède une borne supérieure. On note β la borne supérieure de A.

c) $\beta \in [\,a\,;\ b\,]$ et f est continue en β, donc $f(x) \xrightarrow[x\to\beta]{} f(\beta)$, et il existe $h > 0$ tel que :

$$\big(\,|x-\beta| \leqslant h \text{ et } x \in [\,a\,;\ b\,]\,\big) \Longrightarrow |f(x)-f(\beta)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

d) Si on avait : $\forall c \in \left]\,\beta - \dfrac{h}{2}\,;\ \beta\,\right], c \notin \mathrm{A}$, β ne serait pas la borne supérieure de A puisque $\beta - \dfrac{h}{2}$ serait un majorant de A plus petit que β : c'est absurde.
Donc : $\exists c \in \left]\,\beta - \dfrac{h}{2}\,;\ \beta\,\right]$ tel que $c \in \mathrm{A}$.
On note δ_c défini par $(\mathcal{U}_c)$.

e) Soit $\delta' = \min\left(\delta_c, \dfrac{h}{2}\right)$.
Soit $(x,y) \in \big([\,a\,;\ b\,] \cap [\,a\,;\ \beta+h\,]\big)^2$. Supposons, pour fixer les idées, que $x \leqslant y$, ceci sans perdre de généralité puisque dans la conclusion attendue, x et y jouent un rôle symétrique ($|x-y| = |y-x|$ et $|f(x)-f(y)| = |f(y)-f(x)|$).

• Si $y \leqslant c$, alors

$$|x-y| \leqslant \delta' \Longrightarrow |x-y| \leqslant \delta_c \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

• Si $y > c$, alors $\beta - \dfrac{h}{2} \leqslant y \leqslant \beta + h$.
Supposons $|x-y| \leqslant \delta'$, $|x-y| \leqslant \dfrac{h}{2}$, donc finalement

$$\beta - h \leqslant x \leqslant y \leqslant \beta + h.$$

Du coup, par le choix de h (*cf.* c)) :

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(\beta)| + |f(\beta)-f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

f) Ceci prouve que $\beta \in \mathrm{A}$ car on a :

$$\forall (x,y) \in [\,a\,;\ \beta\,]^2\,,\quad |x-y| \leqslant \delta' \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon \quad (\mathcal{U}_\beta)$$

Et si on avait $\beta < b$, alors on aurait $c = \min\big(\beta+h, b\big) \in \mathrm{A}$: β ne serait plus un majorant de A puisque $c > \beta$.
Donc $\beta = b \in \mathrm{A}$.

g) Comme $b \in \mathrm{A}$, on a :

$$\exists \delta_b > 0, \forall (x,y) \in [\,a\,;\ b\,]^2\,,\quad |x-y| \leqslant \delta_b \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon \quad (\mathcal{U}_b).$$

Comme la propriété $(\mathcal{U}_b)$ est exactement $(\mathcal{U})$, f vérifie $(\mathcal{U})$: f est uniformément continue.

3. Soit $[\,a\,;\ b\,] \subset \mathbb{R}$. Adaptons la fin du raisonnement de l'exercice « *Heuristique de la convolution* »
Soit $x \in [\,a\,;\ b\,]$. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme f est uniformément continue sur le segment $[\,a-1\,;\ b+1\,]$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [\,a-1\,;\ b+1\,]\,, |x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Si $\delta > 1$ alors la propriété précédente est vraie en remplaçant δ par 1, donc on peut supposer $\delta \leqslant 1$. On peut alors réécrire la propriété précédente :

$$\forall x \in [\,a\,;\ b\,]\,, \forall t \in [\,-\delta\,;\ \delta\,]\, |f(x)-f(x-t)| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall x \in [\,a\,;\ b\,]\,, \forall n \geqslant n_0, [\,-\varepsilon_n\,;\ \varepsilon_n\,] \subset [\,-\delta\,;\ \delta\,].$$

Alors : $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in [\,a\,;\ b]$,

$$\begin{aligned}|f(x)-(f*\rho_n)(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x)-f(x-t))\rho_n(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n}|f(x)-f(x-t)|\,\rho_n(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n}\varepsilon\rho_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

Donc : $\forall n \geqslant n_0, \quad ||f - f*\rho_n||_\infty \leqslant \varepsilon$.

Autrement dit : $||f-f*\rho_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *i.e.* $f*\rho_n \overset{\text{CVU}}{\longrightarrow} f$ sur $[\,a\,;\ b]$.

Chapitre 39

Transformée de Laplace

[E3A-M2 – 2017 – PC – Partie II] [E3A-M2 – 2018 – PSI – Partie I] [CS-M2 – 2016 – PSI – Partie VI]

La Transformée de Laplace permet notamment de transformer certaines équations différentielles en des équations plus simples. Elle est d'usage courant en S.I. par exemple. Certains sujets de maths abordent ses aspects théoriques.

Je présente ici une version pour les fonctions f continues par morceaux sur $[0\,;\,+\infty[$, on pourrait procéder à quelques adaptations sur $]0\,;\,+\infty[$.

Définition – Fonctions d'ordre exponentiel et transformée de Laplace

① Soit $f : [0\,;\,+\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On appelle transformée de Laplace de f, *si elle existe*, la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$\mathcal{L}(f) : p \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\mathrm{d}t.$$

Sur quel espace de fonctions f peut-on définir $\mathcal{L}(f)$?

② Soit $f : [0\,;\,+\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
Si : $\quad \exists(\mathrm{M},\gamma) \in \mathbb{R}^2, \exists \mathrm{A} > 0, \quad \forall t \geqslant \mathrm{A}, |f(t)| \leqslant \mathrm{M}t^{\gamma}$,
alors on dit que f est *d'ordre exponentiel.*
Autrement dit, f est d'ordre exponentiel si $\exists \gamma \in \mathbb{R},\ f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(t^{\gamma}\right)$.
Dans ce cas, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$ existe car $\left|\mathrm{e}^{-pt} f(t)\right| \leqslant \mathrm{M}t^{\gamma}\mathrm{e}^{-pt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
En particulier, tout polynôme P est d'ordre exponentiel puisqu'en $+\infty$, on a : $\mathrm{P}(t) = \mathcal{O}\left(t^{\deg(\mathrm{P})}\right)$.

Exercice 128

Structure d'espace vectoriel

Montrer que l'ensemble des fonctions d'ordre exponentiel forme un espace vectoriel E, sous-espace de $\mathcal{C}^{p.m}([0\,;\,+\infty[,\mathbb{K})$.

Solution (**Ex.128** – *Structure d'espace vectoriel*)
Par définition, $\mathrm{E} \subset \mathcal{C}^{p.m}([0\,;\,+\infty[,\mathbb{K})$, et $0 \in \mathrm{E}$.
Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\begin{cases} \exists \mathrm{M}_f, \gamma_f, \mathrm{A}_f, \quad \forall t \geqslant \mathrm{A}_f, |f(t)| \leqslant \mathrm{M}_f t^{\gamma_f} \\ \exists \mathrm{M}_g, \gamma_g, \mathrm{A}_g, \quad \forall t \geqslant \mathrm{A}_g, |g(t)| \leqslant \mathrm{M}_g t^{\gamma_g} \end{cases}$
Prenons $\mathrm{M} = |\lambda|\,\mathrm{M}_f + \mathrm{M}_g$, $\gamma = \max(\gamma_f,\gamma_g)$ et $\mathrm{A} = \max(\mathrm{A}_f,\mathrm{A}_g,1)$, alors

$$\forall t \geqslant \mathrm{A}, |\lambda f(t) + g(t)| \leqslant \mathrm{M}t^{\gamma}$$

☞ *J'impose* $\mathrm{A} \geqslant 1$ *pour avoir* $t \geqslant \mathrm{A} \Longrightarrow \begin{cases} t^{\gamma_f} \leqslant t^{\gamma} \\ t^{\gamma_g} \leqslant t^{\gamma} \end{cases}$ *(faux si $t \in\ ]0\,;\,1[$).*
Donc $\lambda f + g$ est aussi d'ordre exponentiel. $\mathcal{C}qfd$.

Exercice 129

Quelques exemples

p désigne un réel de $]0\,;\,+\infty[$.

1. Montrer que $\mathcal{L}(1)(p) = \dfrac{1}{p}$, et que plus généralement $\mathcal{L}(t^n)(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ pour tout n de sN.

2. On suppose $p - \alpha > 0$. Montrer que $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha t})(p) = \dfrac{1}{p-\alpha}$.

3. **a)** Montrer que $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{it})(p) = \dfrac{p+i}{p^2+1}$.

b) En déduire que

$$\mathcal{L}(\cos(t))(p) = \frac{p}{p^2+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\sin(t))(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Solution (**Ex.129 –** *Quelques exemples*)

1. *J'utilise la fonction Γ d'*E*uler, mais on peut raisonner par récurrence sur n avec une intégration par parties.*

$\mathcal{L}(t^n)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} t^n \mathrm{d}t \overset{u=pt}{=} \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}$

2. $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\alpha t})(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-p+\alpha)t} \mathrm{d}t \overset{\alpha-p<0}{=} \frac{1}{p-\alpha}$

3. $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{it})(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(p-i)t} \mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-(p-i)t}}{-p+i}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p-i} = \frac{p+i}{p^2+1}$

car $|\exp((-p+i)t)| = \exp(-pt) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

En prenant les parties réelles puis imaginaires des deux membres, on obtient les deux valeurs de b).

Exercice 130

Quelques propriétés classiques

p désigne toujours un réel de $]\,0\,;\,+\infty[$ et f une fonction d'ordre exponentiel : $f \in \mathrm{E}$.

1. *Linéarité* –
Justifier que $\mathcal{L} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est linéaire.

2. *Translation* –
Soit $p + \alpha > 0$. Montrer que

$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{-\alpha t} f(t))(p) = \mathcal{L}(f)(p+\alpha).$$

3. *Retard* –
Soit $a > 0$. On note $g : t \mapsto \begin{cases} f(t-a) & \text{si } t \geqslant a, \\ 0 & \text{si } t < a. \end{cases}$
Montrer que

$$\mathcal{L}(g(t))(p) = \mathrm{e}^{-ap}\mathcal{L}(f)(p).$$

... qui s'écrit parfois abusivement :

$$\mathcal{L}(f(t-a))(p) = \mathrm{e}^{-ap}\mathcal{L}(f)(p).$$

4. *Changement d'échelle* –
Soit $\alpha > 0$. On note $h : t \mapsto f(\alpha t)$. Montrer que

$$\mathcal{L}(h(t))(p) = \frac{1}{\alpha}\big(\mathcal{L}(f)\big)\big(\frac{p}{\alpha}\big).$$

... qui s'écrit parfois abusivement :

$$\mathcal{L}(f(\alpha t))(p) = \frac{1}{\alpha}\big(\mathcal{L}(f)\big)\big(\frac{p}{\alpha}\big)$$

Solution (**Ex.130 –** *Quelques propriétés classiques*)

1. *Linéarité* – par linéarité de l'intégrale.

2. *Translation* – Pour $p + \alpha > 0$,

$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{-\alpha t} f(t))(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+p)t} f(t) \mathrm{d}t = \mathcal{L}(f)(p+\alpha)$

3. *Retard* – Soit $a > 0$. On note $g : t \mapsto \begin{cases} f(t-a) & \text{si } t \geqslant a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$

$$\mathcal{L}(g(t))(p) = \int_0^a 0\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t-a)\mathrm{d}t \overset{u=t-a}{=} \mathrm{e}^{-ap}\mathcal{L}(f)(p).$$

4. *Changement d'échelle* – Pour $\alpha > 0$,

$$\mathcal{L}(f(\alpha t))(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(\alpha t)\mathrm{d}t \overset{u=\alpha t}{=} \frac{1}{\alpha}\big(\mathcal{L}(f)\big)\big(\frac{p}{\alpha}\big).$$

Exercice 131

Classe de dérivabilité de $\mathcal{L}(f)$

Soit $f \in \mathrm{E}$.

1. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

2. Justifier que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\ +\infty[$, avec

$$\big(\mathcal{L}(f)\big)'(p) = -\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-pt} f(t)\mathrm{d}t = -\mathcal{L}(tf(t))(p).$$

3. En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0\,;\ +\infty[$ et

$$\big(\mathcal{L}(f)\big)^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t)).$$

Solution (**Ex.131 –** *Classe de dérivabilité de $\mathcal{L}(f)$*)

1. Soit $g :]\,0\,;\ +\infty[\times [\,0\,;\ +\infty[\to \mathbb{R}, (p,t) \mapsto \mathrm{e}^{-pt} f(t)$.
(i) $\forall t \geqslant 0, p \mapsto g(p,t)$ est continue sur $]\,0\,;\ +\infty[$.
(ii) $\forall p > 0, t \mapsto g(p,t)$ est c.p.m sur $[\,0\,;\ +\infty[$.
(iii) Soit $[\,a\,;\ b] \subset]\,0\,;\ +\infty[$.
$\begin{cases} p \geqslant a \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow pt \geqslant at \Longrightarrow \mathrm{e}^{-pt} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$, d'où la domination

$$\forall p \in [\,a\,;\ b\,], \forall t \in [\,0\,;\ +\infty[\,, |g(p,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-at}\,|f(t)|$$

or $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\,|f(t)|$ est intégrable sur $[\,0\,;\ +\infty[$ car $|f|$ est d'ordre exponentiel.
Par le théorème de continuité sous l'intégrale, $\mathcal{L}(f)$ est continue sur tout segment de $]\,0\,;\ +\infty[$, donc continue sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

2. (i) $\forall t \geqslant 0, p \mapsto g(p,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\ +\infty[$.
(ii) $\forall p > 0, t \mapsto g(p,t)$ est intégrable sur $[\,0\,;\ +\infty[$.
(iii) $\forall p > 0, t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial p}(p,t) = -t\mathrm{e}^{-pt} f(t)$ est c.p.m. sur $[\,0\,;\ +\infty[$.
(iv) Soit $[\,a\,;\ b] \subset]\,0\,;\ +\infty[$. On a une domination analogue à ①

$$\forall p \in [\,a\,;\ b\,], \forall t \in [\,0\,;\ +\infty[\,, \left|\frac{\partial g}{\partial p}(p,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at}\,|tf(t)|$$

or $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\,|tf(t)|$ est intégrable sur $[\,0\,;\ +\infty[$ car $t \mapsto tf(t)$ est d'ordre exponentiel. Donc $\mathcal{L}(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $]\,0\,;\ +\infty[$, donc $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

Exercice 132

Transformée de la dérivée $\mathcal{L}(f')$

Soit $f \in \mathrm{E}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\mathcal{L}(f')$ existe et

$$\mathcal{L}(f'(t))(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

Solution (**Ex.132 –** *Transformée de la dérivée $\mathcal{L}(f')$*)
Comme $\mathrm{e}^{-pt} f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, on peut effectuer une intégration par parties qui prouve au passage l'existence de $\mathcal{L}(f')(p)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t))(p) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f'(t)\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \big[\mathrm{e}^{-pt} f(t)\big]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\mathrm{d}t \\ &= -f(0) + p\mathcal{L}(f)(p)\end{aligned}$$

Deux exemples élémentaires pour comprendre l'intérêt de la transformation de Laplace

Une application classique et efficace de la transformation de Laplace est l'utilisation dans les équations différentielles. Je prends deux exemples très simples.

On admet que **la transformation de Laplace est injective** pour les fonctions continues d'ordre exponentiel sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. Soit à résoudre pour $t \in [0\,;\,+\infty[$: $(\mathcal{C})\begin{cases} f'(t)+f(t)=0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

Soit $p \in]0\,;\,+\infty[$. Je prends la transformée de Laplace (linéaire) de l'équation différentielle

$$\mathcal{L}(f'(t))(p)+\mathcal{L}(f(t))(p)=\mathcal{L}(0)(p)$$

$$\big(p\mathcal{L}(f(t))(p)-f(0)\big)+\mathcal{L}(f(t))(p)=0$$

$$(p+1)\mathcal{L}(f(t))(p)=1$$

$$\mathcal{L}(f(t))(p)=\frac{1}{p+1}$$

Or $\mathcal{L}(e^{-t})(p)=\dfrac{1}{p+1}$ et $\mathcal{L}(.)$ est injective, donc

$$f(t)=\mathrm{e}^{-t}$$

2. Soit à résoudre pour $t \in [0\,;\,+\infty[$: $(\mathcal{C})\begin{cases} f''(t)+f(t)=0 \\ f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases}$

Soit $p \in]0\,;\,+\infty[$. Je prends la transformée de Laplace (linéaire) de l'équation différentielle

$$\mathcal{L}(f''(t))(p)+\mathcal{L}(f(t))(p)=\mathcal{L}(0)(p)$$
$$\big[p\mathcal{L}(f'(t))(p)-f'(0)\big]+\mathcal{L}(f(t))(p)=0$$
$$p\big[p\mathcal{L}(f(t))(p)-f(0)\big]+\mathcal{L}(f(t))(p)=1$$
$$(p^2+1)\mathcal{L}(f(t))(p)=1$$

$$\mathcal{L}(f(t))(p)=\frac{1}{p^2+1}$$

Or $\mathcal{L}(\sin(t))(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$ et $\mathcal{L}(.)$ est injective, donc

$$f(t)=\sin(t)$$

Chapitre 40

Séries de FOURIER

[CS-M2 – 2016 – PSI – Partie IV]

☞ *Avant la réforme des programmes de 2015, les séries de Fourier étaient au programme. Du coup, et par leur utilité, elles constituent du coup un thème classique de concours.*

Très brève introduction historique

C'est dans un mémoire intitulé *Théorie analytique de la chaleur*, soumis en 1807 à l'Académie des Sciences, que Joseph FOURIER introduit les concepts qui lancent les bases de l'*analyse harmonique*, parfois appelée *analyse de Fourier.*

En s'intéressant à l'*équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CD}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

et après quelques transformations que Fourier débouche sur l'équation

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0$$

dont les solutions sont évidemment $x \mapsto a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x)$.

Les conditions aux bords imposent de plus que $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$.

Par principe de superposition, il obtient des solutions en forme de *séries trigonométriques*[1]

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx) \quad (\mathcal{F})$$

Notons $f_1 = \dfrac{1}{2\pi}$ la fréquence associée à la période 2π et observons que :

- $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont sinusoïdales de fréquence f_1.
- $x \mapsto \cos(2x)$ et $x \mapsto \sin(2x)$ sont sinusoïdales de fréquence $2f_1$.
- $x \mapsto \cos(3x)$ et $x \mapsto \sin(3x)$ sont sinusoïdales de fréquence $3f_1$.

$\vdots$

La solution f est donc une somme de signaux périodiques dont les fréquences sont les multiples de la fréquence fondamentale f_1. Ses signaux sont les *harmoniques* du signal fondamental, leur amplitude est donnée par les coefficients (a_n) et (b_n).

En s'appuyant sur les intégrales suivantes :

$$\forall k \geqslant 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\mathrm{d}x = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\mathrm{d}x$$

$$\forall (k,n),\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0$$

$$\forall k \neq n,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\mathrm{d}x$$

$$\forall k \geqslant 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\mathrm{d}x = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\mathrm{d}x$$

on peut expliciter les coefficients a_k et b_k.

1. Dans le texte originel, les considérations aux bords faisaient aussi que tous les coefficients a_k étaient nul, Fourier obtenant alors une série uniquement somme de sinus. Daniel BERNOULLI avait déjà échafaudé en 1753 une approche analogue, mais bien moins générale pour la résolution des l'*équation des cordes vibrantes*.

• En intégrant ($\mathcal{F}$) entre $-\pi$ et π, on obtient

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

• Pour $n \geqslant 1$ fixé, en multipliant ($\mathcal{F}$) par $\cos(nx)$ puis en intégrant, on obtient

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x$$

• De même, multipliant ($\mathcal{F}$) par $\sin(nx)$ puis en intégrant, on obtient

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$$

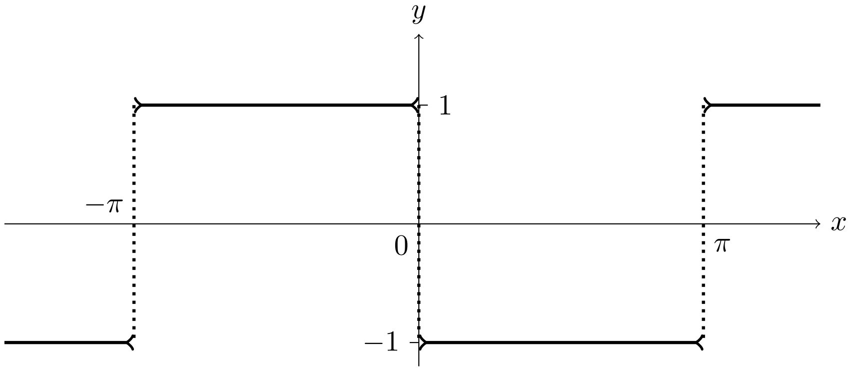
La collection des coefficients $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ constitue le **spectre** de f.
Quelques interrogations soulevées par l'analyse de Fourier
• Étant donnée une fonction f T−périodique continue par morceaux, à quelle(s) condition(s) a-t-on

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \quad ?$$

• Étant donné un spectre (a_n), ou (b_n), ou les deux, que dire de la somme de la série trigonométrique ainsi formée ?

Exemple d'un signal carré ou « créneau »

Soit f $2\pi-$périodique telle que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left]-\pi\,;\ 0\right[\\ -1 & \text{si } x \in \left]0\,;\ \pi\right[\end{cases}$



f est impaire.

Calcul des a_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est impaire donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0, \text{ donc } a_n = 0.$$

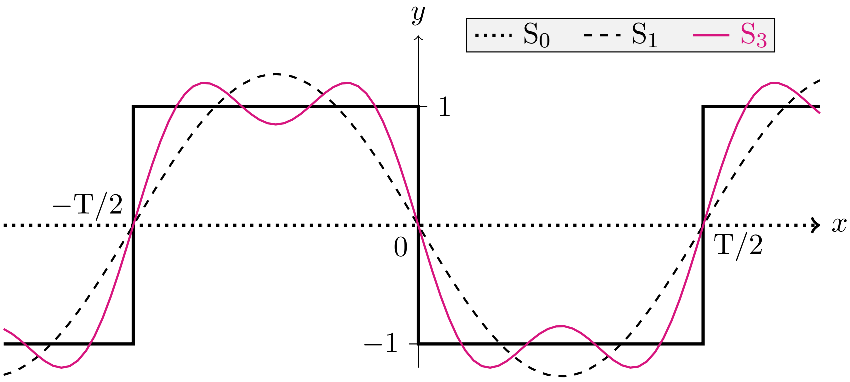
Calcul des b_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est paire donc

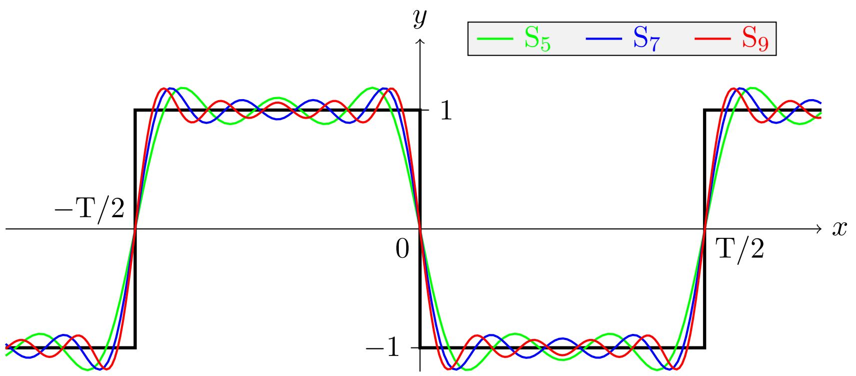
$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\pi} -\sin(nx)\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n}\big(\cos(n\pi) - 1\big) = \begin{cases} -\dfrac{4}{n} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}.$$

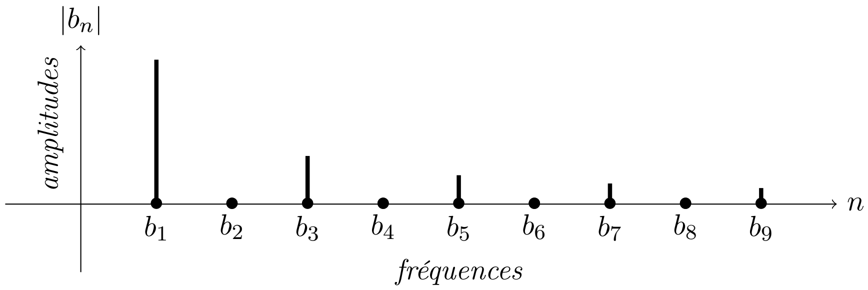
Les trois premières sommes partielles de Fourier :



Les trois suivantes :



Le « spectre » :



Définition – Série de Fourier d'une fonction

Soit $T \in]0\,;\ +\infty[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T−périodique et continue par morceaux (ce qui signifie que f admet des limites finies à gauche et à droite de ses points de discontinuité).

On note $\omega \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{2\pi}{T}$ la pulsation associée à la période T. On pose

$$\text{Version complexe} \quad \left\{ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{e}^{-ni\omega x}\mathrm{d}x \right.$$

$$\text{Version réelle} \quad \left\{ \begin{array}{ll} & a_0 \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}x = c_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & a_n \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}x = c_n + c_{-n} \\ & b_n \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}x = i(c_n - c_{-n}) \end{array} \right.$$

Notons que f étant T−périodique, ces intégrales peuvent être calculées sur tout intervalle de longueur T, comme par exemple $[0\,;\ T]$.

Nous allons étudier quelques propriétés fréquemment rencontrées dans les sujets traitant des séries de Fourier.

Dans toute la suite, f désigne une fonction T−périodique continue par morceaux et on note $S_n(f)$ la n−ème somme partielle de sa série de Fourier

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_n \mathrm{e}^{ik\omega x} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(\omega x) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(\omega x).$$

Exercice 133

Cas des fonctions paires ou impaires

1. Si f est paire, montrer que b_n est nul pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Si f est impaire, montrer que a_n est nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution (**Ex.133** – *Cas des fonctions paires ou impaires*)

Il suffit d'observer que l'intervalle $[-T/2\,;\ T/2]$ est symétrique par rapport à 0 et que $t \mapsto f(t)\sin(n\omega t)$ est impaire si f est paire tandis que $t \mapsto f(t)\cos(n\omega t)$ est impaire si f est impaire.

Une condition nécessaire pour avoir un espoir que

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(n\omega x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x)$$

est que les termes généraux de ces séries tendent vers 0 *(sinon divergence grossière...)*

Exercice 134

Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [a\,;\ b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par conséquent, (a_n), (b_n) et (c_n) tendent vers 0.
Démontrer ce résultat pour les cas suivants :

1. lorsque f est constante ;

2. lorsque f est en escalier ;

3. lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$, **démonstration classique**.

Solution (**Ex.134 –** *Lemme de Riemann-Lebesgue*)

1. Supposons f constante égale à k. Alors
$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{in\omega t}\mathrm{d}t = \left[\frac{k\mathrm{e}^{in\omega t}}{-in\omega}\right]_a^b = \frac{k\mathrm{e}^{in\omega b}}{-in\omega} - \frac{k\mathrm{e}^{in\omega a}}{-in\omega} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
car $\displaystyle\left|\frac{k\mathrm{e}^{in\omega b}}{-in\omega}\right| = \frac{k}{n\omega} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, idem pour a.
Le raisonnement est le même pour cos ou sin, les primitives font apparaître $n\omega$ au dénominateur et des numérateurs bornés par $|k|$.

2. On peut découper $[\,a\,;\ b]$ en m intervalles sur lesquels f est constante. En appliquant le cas précédent à chacun des m intervalles, chacune des m intégrales tend vers 0, et l'intégrale sur $[\,a\,;\ b]$ qui est leur somme tend vers 0.

3. Je la traite par exemple sur le cos. Comme f est $\mathcal{C}^1$, on intègre par parties
$\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{f(t)\sin(n\omega t)}{n\omega t}\right]_a^b - \frac{1}{n\omega}\int_a^b f'(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t$
f et f' sont continues sur le segment $[\,a\,;\ b]$ donc bornée. Alors :

- $\displaystyle\left|\frac{f(b)\sin(n\omega b)}{n\omega}\right| \leqslant \frac{||f||_\infty}{n\omega} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $\displaystyle\left|\frac{f(a)\sin(n\omega a)}{n\omega}\right| \leqslant \frac{||f||_\infty}{n\omega} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $\displaystyle\left|\frac{1}{n\omega}\int_a^b f'(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n\omega}\int_a^b \left|f'(t)\sin(n\omega t)\right|\mathrm{d}t$
  $\displaystyle\left|\frac{1}{n\omega}\int_a^b f'(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{(b-a)\,||f'||_\infty}{n\omega} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Chaque terme tend bien vers 0.

Gustav Lejeune DIRICHLET *a franchi dès 1829 des pas décisifs dans l'étude de la convergence des séries de Fourier. Il a introduit une suite de fonctions fondamentales pour l'étude de cette convergence.*

Exercice 135

Noyau de Dirichlet

On appelle noyau de Dirichlet d'ordre $n \in \mathbb{N}$ la fonction définie par

$$\mathrm{D}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$$

Justifier les propriétés suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n est $2\pi-$périodique.

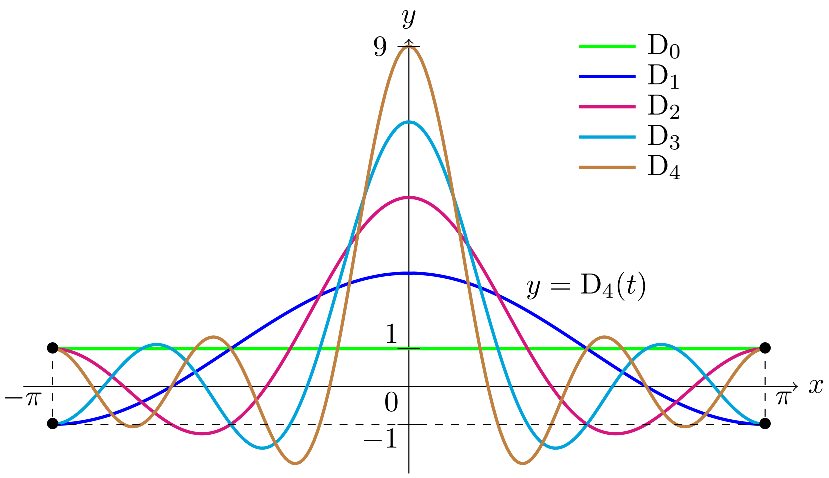
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{D}_n(x) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{D}_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\big((n+1/2)x\big)}{\sin(x/2)} & \text{si } x \not\equiv 0\ [2\pi] \\ 2n+1 & \text{sinon} \end{cases}$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{D}_n(-\pi) = \mathrm{D}_n(\pi) = (-1)^n.$

5. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{D}_n(x)\mathrm{d}x = \pi.$

Courbes des premiers noyaux de Dirichlet



Solution (**Ex.135** – *Noyau de Dirichlet*)

1. Car les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{ikx}$ sont $2\pi-$périodique.

2. En regroupant les indices opposés : $\mathrm{e}^{-ikx} + \mathrm{e}^{ikx} = 2\cos(kx)$.

3. $\mathrm{D}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \left(\mathrm{e}^{ix}\right)^k = \mathrm{e}^{-inx}\frac{1-\mathrm{e}^{ix(2n+1)}}{1-\mathrm{e}^{ix}}$

$\mathrm{D}_n(x) = \mathrm{e}^{-inx}\dfrac{\mathrm{e}^{ix(2n+1)/2}(-2i\sin((2n+1)x/2)}{\mathrm{e}^{ix/2}(-2i\sin(x/2)} = \dfrac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$

4. D_n est paire et $\mathrm{D}_n(\pi) = \dfrac{\sin(n\pi+\pi/2)}{1} = (-1)^n$.

5. Se calcule immédiatement sur ② par linéarité, car pour $k \geqslant 1$,
$\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(kx)\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = 0.$

Changeons un peu de point vue et munissons-nous d'un produit scalaire adapté à la situation.

Exercice 136

Orthonormalité, projection et inégalité de Bessel

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([-\mathrm{T}/2\,;\ \mathrm{T}/2], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}-$espace des fonctions continues sur le segment $[-\mathrm{T}/2\,;\ \mathrm{T}/2]$. On note $\omega = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}$.
On munit E du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Justifier les propriétés suivantes.

1. Soit $\gamma_0 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{T}}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\gamma_n : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\mathrm{T}}}\cos(n\omega x) \quad \text{et} \quad \sigma_n : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\mathrm{T}}}\sin(n\omega x).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ est une famille orthonormale.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la $n-$ème somme de Fourier

$$\mathrm{S}_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\cos(k\omega x) + \sum_{k=1}^{n} b_k\sin(k\omega x)$$

est le projeté orthogonal de f sur $\mathrm{F}_n = \mathrm{Vect}(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

3. *Inégalité de* Bessel

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2}\big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x$$

4. *Corollaire : le retour de* Riemann-Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

Solution (**Ex.136 –** *Orthonormalité, projection et inégalité de Bessel*)

1. • On peut commencer par observer que pour tout $n \geqslant 1$:
$\displaystyle\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2}\cos(n\omega x)\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(n\omega x)}{n\omega}\right]_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} = 0$ et
$\displaystyle\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2}\sin(n\omega x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(n\omega x)}{n\omega}\right]_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} = 0$
• On vérifie que les fonctions sont unitaires :
$\gamma_0^2 = \dfrac{1}{\mathrm{T}}$ donc $||\gamma_0||^2 = \mathrm{T} \times \dfrac{1}{\mathrm{T}} = 1$,
et pour $n \geqslant 1$,
$\displaystyle ||\gamma_n||^2 = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2}\frac{1+\cos(2n\omega x)}{2}\mathrm{d}x = 1$
$\displaystyle ||\sigma_n||^2 = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2}\frac{1-\cos(2n\omega x)}{2}\mathrm{d}x = 1$
• L'orthogonalité se vérifie de façon analogue, notamment par linéarisation :
$\gamma_m\gamma_n = \dfrac{1}{2}\big(\gamma_{m+n} - \gamma_{m-n}\big)$ d'intégrale nulle sur $[-\mathrm{T}/2\,;\ \mathrm{T}/2]$.
$\sigma_m\sigma_n = \dfrac{1}{2}\big(\gamma_{m-n} - \gamma_{m+n}\big)$ d'intégrale nulle sur $[-\mathrm{T}/2\,;\ \mathrm{T}/2]$.
$\gamma_m\sigma_n$ est une fonction impaire donc son intégrale sur $[-\mathrm{T}/2\,;\ \mathrm{T}/2]$ est nulle.

2. Puisqu'on dispose d'une base orthonormale de F_n, les coordonnées de du projeté $p_n(f)$ de f sur F_n dans cette base sont les produits scalaires :
$\displaystyle\langle f, \gamma_0\rangle = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}}}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2}f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\mathrm{T}}a_0$, et pour $n \geqslant 1$,
$\displaystyle\langle f, \gamma_n\rangle = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{T}}}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2}f(x)\cos(n\omega x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{2}}a_n$
$\displaystyle\langle f, \sigma_n\rangle = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{T}}}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2}f(x)\sin(n\omega x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{2}}b_n$
Donc

$$\begin{aligned}
p_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^{n}\langle f, \gamma_k\rangle\,\gamma_k(x) + \sum_{k=1}^{n}\langle f, \sigma_k\rangle\,\sigma_k(x)\\
&= \sqrt{\mathrm{T}}a_0\frac{1}{\sqrt{\mathrm{T}}} + \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{2}}a_k\sqrt{\frac{2}{\mathrm{T}}}\cos(k\omega x) + \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{2}}b_k\sqrt{\frac{2}{\mathrm{T}}}\sin(k\omega x)\\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n}a_k\cos(k\omega x) + \sum_{k=1}^{n}b_k\sin(k\omega x)\\
&= \mathrm{S}_n(f)(x)
\end{aligned}$$

3. De $f = \mathrm{S}_n(f) + \big(f - \mathrm{S}_n(f)\big)$ avec $\mathrm{S}_n(f) \in \mathrm{F}_n$ et $f - \mathrm{S}_n(f) \in \mathrm{F}_n^{\perp}$ (caractérisation du projeté orthogonal), on obtient par le théorème de Pythagore
$||f||^2 = ||\mathrm{S}_n(f)||^2 + ||f - \mathrm{S}_n(f)||^2$, donc $||\mathrm{S}_n(f)||^2 \leqslant ||f||^2 \quad (\heartsuit)$.
Or : $\displaystyle\mathrm{S}_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n}\langle f, \gamma_k\rangle\,\gamma_k(x) + \sum_{k=1}^{n}\langle f, \sigma_k\rangle\,\sigma_k(x)$, et comme cette décomposition se fait dans une base orthonormale,

$$||S_n(f)||^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle f, \gamma_k \rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} \langle f, \sigma_k \rangle^2 = Ta_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$$

De plus, $||f||^2 = \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(x)^2 dx$.

En remplaçant par ces expressions dans (♡), on obtient l'inégalité de Bessel

4. Le membre de gauche de l'inégalité de Bessel forme une suite croissante et majorée (le majorant ne dépend pas de n), donc convergente, donc la série de terme général $a_k^2 + b_k^2$ converge, donc ce terme général tend vers 0, donc $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et $b_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

Le raisonnement précédent, qui mêle astucieusement algèbre et analyse, ne se généralise pas directement aux fonctions non continues car

$$N(f) = \sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} f^2(x)dx}$$

ne vérifie pas l'axiome de séparation des normes. Si f est partout nulle sauf en 0 où elle vaut 1, alors $N(f) = 0$ bien que f ne soit pas la fonction nulle.
Revenons à un calcul plus élémentaire qui permet d'établir ces résultats pour les fonctions continuent par morceaux.

Exercice 137

Bessel et Riemann-Lebesgue pour les fonctions continues par morceaux

Soit $f : [-T/2\,;\; T/2] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
Justifier les propriétés suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la $n-$ème somme de Fourier

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\omega x) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(k\omega x)$$

vérifie

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)S_n(x)dx = T\left(a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right) = \int_{-T/2}^{T/2} \left(S_n(f)(x)\right)^2 dx.$$

2. *Inégalité de Bessel*

On observant que $\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \left(f(x) - S_n(f)(x)\right)^2 dx \geqslant 0$,

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left(f(x)\right)^2 dx$$

3. *Lemme de Riemann-Lebesgue*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

Solution (**Ex.137** – *Bessel et Riemann-Lebesgue pour les fonctions continues par morceaux*)

1. La première égalité est un simple constat, vu les définitions des a_k et b_k.

$$\begin{aligned}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)S_n(x)dx &\overset{\text{lin.}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega x)dx + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega x)dx \\ &= T\left(a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right).\end{aligned}$$

La seconde égalité provient des intégrales déjà calculées dans la version précédente de l'inégalité de Bessel :

$$\left(S_n(f)(x)\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\omega x) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(k\omega x)\right)^2$$

$\left(\mathrm{S}_n(f)(x)\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \cos^2(k\omega x) + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \sin^2(k\omega x) + 2\sum \left(\textit{tous les produits}\right)$

En intégrant, les intégrales des produits sont nulles donc

$\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \left(\mathrm{S}_n(f)(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \mathrm{T}a_0^2 + \frac{\mathrm{T}}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$

2. Par positivité de l'intégrale : $\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \left(f(x) - \mathrm{S}_n(f)(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 0$, or

$\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \left(f(x) - \mathrm{S}_n(f)(x)\right)^2 \mathrm{d}x$

$= \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x - 2\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(x)\mathrm{S}_n(f)(x)\mathrm{d}x + \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \left(\mathrm{S}_n(f)(x)\right)^2 \mathrm{d}x$

$= \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x - \mathrm{T}\left(a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right)$

D'où l'inégalité de Bessel, établie cette fois pour toute fonction continue par morceaux.

Étudions maintenant le théorème de Dirichlet*. Dans l'exemple du créneau, on peut remarquer qu'aux points de discontinuité* $-\mathrm{T}/2$, 0 *et* $\mathrm{T}/2$ *(identique à* $-\mathrm{T}/2$ *par périodicité), les sommes partielles de la série de Fourier valent* 0*, qui est exactement la moyenne des limites à gauche et à droite de la fonction. La série de Fourier opère une régularisation de* f *en ces points de discontinuité.*

Définition – Régularisée d'une fonction continue par morceaux

Soit $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On appelle régularisée de f, notée $\tilde{f}$, définie pour tout x de $[\,a\,;\ b]$ par

- si f est continue en x alors $\tilde{f}(x) \overset{\text{déf.}}{=} f(x)$,
- si f est discontinue en x alors $\tilde{f}(x) \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{\lim\limits_{t\to x^-} f(t) + \lim\limits_{t\to x^+} f(t)}{2}$.

Pour alléger les notations, on écrira

$$f(x^-) = \lim_{t\to x^-} f(t) \text{ et } f(x^+) = \lim_{t\to x^+} f(t).$$

On peut résumer cette définition en écrivant

$$\forall x \in [\,a\,;\ b]\,,\quad \tilde{f}(x) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Exercice 138

Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et T−périodique. On pose $\omega = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}$ et on note $\left(\mathrm{S}_n(f)\right)_n$ la suite des sommes partielles de la série de Fourier

$$\mathrm{S}_n(f) : x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ki\omega x} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\omega x) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(k\omega x).$$

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, *i.e.* f est continue par morceaux, dérivable sauf éventuellement en un nombre fini de point sur une période, et que f' est continue par morceaux.

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(f)(x) = \tilde{f}(x).$$

Autrement dit, la série de Fourier de f converge simplement vers sa régularisée.

Pour alléger les notations, on prouve ce résultat dans le cas particulier $\mathrm{T} = 2\pi$. Il se généralise par un simple changement de variable.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Justifier les propriétés suivantes.

1. $\mathrm{S}_n(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{D}_n(x-t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\mathrm{D}_n(t)\mathrm{d}t$

2. $\mathrm{S}_n(f)(x) - \tilde{f}(x) =$
$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi}\left(\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\right)\dfrac{f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = 0.$

Solution (**Ex.138** – *Théorème de Dirichlet*)

1. Passons par les coefficients complexes :

$$\mathrm{S}_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{ikx}$$
$$\overset{\text{lin.}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{D}_n(x-t)\mathrm{d}t$$

Le changement de variable affine $u = x-t$ fournit alors
$\mathrm{S}_n(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)\mathrm{D}_n(u)\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\mathrm{D}_n(u)\mathrm{d}u$ par $2\pi-$périodicité (l'intégrale est la même sur tout intervalle de longueur 2π).

2. D_n est paire, donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x-t)\mathrm{D}_n(t)\mathrm{d}t \overset{u=-t}{=} \int_{0}^{\pi} f(x+u)\mathrm{D}_n(u)\mathrm{d}u$, d'où

$$\mathrm{S}_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{D}_n(t)\big(f(x+t)+f(x-t)\big)\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{S}_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{D}_n(t)\big(f(x+t)+f(x-t)\big)\mathrm{d}t - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

Or : $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\mathrm{D}_n(t)\mathrm{d}t = \pi$ donc par linéarité

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{D}_n(t)\big(f(x^+)+f(x^-)\big)\mathrm{d}t$$

Et toujours par linéarité

$$\mathrm{S}_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{D}_n(t)\left(f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)\right)\mathrm{d}t$$

où on peut écrire $\mathrm{D}_n(t) = \dfrac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$.

3. Posons

$$g(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)}{\sin(t/2)}.$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_n(f)(x) - \tilde{f}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\sin\big((n+1/2)t\big)g(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nt)\cos(t/2)g(t)\mathrm{d}t \\ &\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nt)\sin(t/2)g(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Si g est continue par morceaux, on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue pour conclure.

- Comme f est continue par morceaux sur $[0\,;\,\pi]$, g est continue par morceaux sur $]0\,;\,\pi]$.
- $\dfrac{f(x-t)-f(x^-)}{\sin(t/2)} = \dfrac{f(x-t)-f(x^-)}{t}\times\dfrac{t}{\sin(t/2)} \underset{t\to 0^+}{\sim} f'(x^-)\times 2$ car f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

De même $\dfrac{f(x+t)-f(x^+)}{\sin(t/2)} \underset{t\to 0^+}{\sim} 2f'(x^+)$.

Donc f admet une limite finie en 0, donc est continue par morceaux sur $[0\,;\,\pi]$.

Pour terminer, voyons une égalité qui clôt l'inégalité de BESSEL, *due à Marc-Antoine* PARSEVAL DES CHÊNES. *Cette formule peut être interprétée comme une généralisation du théorème de Pythagore pour les séries dans les espaces ℓ^2 de Hilbert.*

Dans de nombreuses applications physiques (courant électrique par exemple), cette formule peut s'interpréter comme suit : l'énergie totale s'obtient en sommant les contributions des différents harmoniques.

Elle permet aussi le calcul rapide de somme de séries, comme certaines séries de Riemann, que je propose en application.

Exercice 139

Identité de PARSEVAL *et application au calcul de sommes*

Soit f satisfaisant les hypothèses du théorème de DIRICHLET.
Justifier les propriétés suivantes.

1. Identité de PARSEVAL

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(x)^2 \mathrm{d}x = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

2. *Application 1 : calcul de* $\zeta(2)$
En utilisant la fonction $2\pi-$périodique telle que $f(x) = x$ pour x dans $]-\pi\,;\ \pi[$, on obtient

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. *Application 2 : calcul de* $\zeta(4)$
En utilisant la fonction $2\pi-$périodique et paire telle que $f(x) = x$ pour x dans $[\,0\,;\ \pi[$, on obtient

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Solution (**Ex.139** – *Identité de PARSEVAL et application au calcul de sommes*)

1. Puisque f satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet,
$\tilde{f}(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\big)$
En multipliant par $\tilde{f}(x)$ et en intégrant sur $[-\mathrm{T}/2\,;\ \mathrm{T}/2]$, toujours grâce à l'orhogonalité de la famille $(1, \cos(\omega x), \cos(2\omega x)$
on obtient, au facteur $1/\mathrm{T}$ près, l'identité de Parseval pour $\tilde{f}$. Et comme f et $\tilde{f}$ ne diffèrent au plus qu'en un nombre fini de points, leurs intégrales sur $[-\mathrm{T}/2\,;\ \mathrm{T}/2]$ sont égales.

2. Soit f la fonction $2\pi-$périodique telle que $f(x) = x$ pour x dans $]-\pi\,;\ \pi[$. f vérifie les conditions de Dirichlet et, étant impaire, on a $a_n = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + 0 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \text{ d'où } \frac{1}{2}b_n^2 = \frac{2}{n^2}.$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

Par l'identité de Parseval :
$\dfrac{\pi^2}{3} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2} = 2\zeta(2)$, donc $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

3. Soit f la fonction $2\pi-$périodique et paire telle que $f(x) = x$ pour x dans $]\,0\,;\ \pi[$. f vérifie les conditions de Dirichlet et, étant paire, on a $b_n = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x \text{ (parité), donc } a_0 = \frac{\pi}{2}.$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\mathrm{d}x \text{ (parité)}$$
$$\overset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x\right) = 0 + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2\big((-1)^n - 1\big)}{n^2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{-4}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Ainsi : $a_n^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{16}{n^4\pi^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \dfrac{\pi^2}{3}$

Par l'identité de Parseval : $\dfrac{\pi^2}{3} = \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{16}{(2n+1)^4\pi^2}$, or

$\zeta(4) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^4} = \dfrac{1}{16}\zeta(4) + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^4}$, soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^4} = \dfrac{15}{16}\zeta(4)$, d'où :

$\dfrac{\pi^2}{12} = \dfrac{15}{2\pi^2}\zeta(4)$, donc $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$.

Chapitre 41

Transformée de Fourier

[CS-M1 – 2016 – PC – Partie II][CS-M2 – 2016 – PSI – Parties I, II & III] [CS-M1 – 2018 – PC – Parties I & II] [MP-M2 – 2019 – PSI – Partie IV]

☞ *Les séries de Fourier pour les fonctions périodiques associent à chaque signal temporel son spectre fréquentiel, association d'ailleurs réversible puisqu'on peut reconstituer le signal connaissant son spectre. Si les séries de Fourier font des merveilles avec les ondes sonores par exemple, en les décomposant en somme d'harmoniques de fréquences multiples de la fréquence fondamentale, comment généraliser l'idée à des signaux non périodiques ?*

La généralisation débouche sur la transformation de Fourier, exemple le plus courant nécessitant d'intégrer des fonctions à valeurs complexes.

Introduction : des séries de Fourier à la transformée de Fourier, l'idée empirique

Lorsqu'une fonction T−périodique vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{in\omega x} \quad \text{où } \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}.$$

Dans son *Traité de la chaleur*, Fourier propose d'envisager les fonctions non périodiques comme des fonctions T−périodiques dont la période T tend vers $+\infty$.

Comme il ne s'agit plus d'empiler des harmoniques de fréquences nf_1 multiples de la fréquence fondamentale $f_1 = \dfrac{1}{\mathrm{T}}$, l'astuce consiste à effectuer un « changement de variable » faisant disparaître n et permettant un passage à la limite lorsque $\mathrm{T} \to +\infty$: on pose $\xi \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{n}{\mathrm{T}}$.

En écrivant :

• $\Delta\xi = \dfrac{n+1}{\mathrm{T}} - \dfrac{n}{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{\mathrm{T}}$ et

• $\mathrm{C}(\xi) = \mathrm{T}c_n = \displaystyle\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(x)\mathrm{e}^{-in\omega x}\mathrm{d}x = \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x$ - quantité ne dépendant que de ξ -, il vient

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{C}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi i\xi x}\Delta\xi.$$

En faisant tendre T vers $+\infty$, $\Delta\xi \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} 0$ et on passe de la somme discrète à la somme continue, alias l'intégrale,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{C}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi i\xi x}\mathrm{d}\xi.$$

Quant à $\mathrm{C}(\xi)$, il devient, puisque $\mathrm{T} \longrightarrow +\infty$,

$$\mathrm{C}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x.$$

Ce coefficient $\mathrm{C}(\xi)$, fonction complexe de la variable réelle ξ, joue le rôle de la suite des coefficients complexes (c_n). $\mathrm{C}(\xi)$ est la *transformée de Fourier* de f, couramment notée $\mathcal{F}(f)$ ou $\hat{f}$ (se lit souvent « f chapeau»).

Ces considérations heuristiques débouchent sur les idées suivantes :

• $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) fonction « signal », dont la variable est en général dans le domaine « temporel » en physique,

• $\mathcal{F}(f) = \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \xi \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x$ fonction « spectre », dont la variable est dans le domaine « fréquentiel »,

• avec comme transformation inverse $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi i\xi x}\mathrm{d}\xi$.

Comme $\mathcal{F}(f)$ est définie par une intégrale impropre, on n'évitera pas les questions de convergence.

Exercice 140

Transformée de Fourier dans l'espace L_1*, transformée de la dérivée*

Soit L_1 le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $f \in \mathrm{L}_1$. Montrer que $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f \in \mathrm{L}_1$. Montrer que $\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que, si de plus f est de classe $\mathcal{C}^n$ avec $f^{(k)}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \in [\![1\,;\ n]\!]$, alors

$$\forall k \in [\![1\,;\ n]\!], \quad \mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (2\pi i\xi)^k \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Solution (**Ex.140 –** *Transformée de Fourier dans l'espace* L_1*, transformée de la dérivée*)

1. Il suffit d'observer que $\left|f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\right| \leqslant |f(x)|$ et f est intégrable.

2. Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
(i) Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
(iii) Pour tout $(\xi, x) \in \mathbb{R}^2$, $\quad \left|f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\right| \leqslant |f(x)|$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (et indépendante de ξ).
Par conséquent, $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Il suffit de le démontrer pour $n = 1$. Le résultat se généralise par une récurrence immédiate.
$\mathcal{F}(f') = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x$ incite à tenter une intégration par parties.
Avec f et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on sait déjà que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\mathrm{d}x = -2\pi i\xi x\mathcal{F}(f)$$

existe.
Reste à étudier $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)g(x)$.
Comme f' est intégrable, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$ existe, *i.e.* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - f(0)$ existe. Donc $\displaystyle\lim_{+\infty} f$ existe. Soit ℓ cette limite.
Si $\ell \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell$, orc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ell\mathrm{d}x$ diverge, donc f n'est pas intégrable. C'est absurde, donc $\ell = 0$.
Un raisonnement analogue en $-\infty$ montre aussi que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.
De plus, $|f(x)g(x)| = |f(x)|$ donc $|f(x)g(x)| \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$. L'intégration par parties est licite et

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$$

Exercice 141

Dans l'espace $\mathcal{S}$*, dérivée de la transformée et transformée de la dérivée*

On note $\mathcal{S}$ l'espace de Schwartz[1] ou espace des *fonctions à décroissance rapide*.
$\mathcal{S}$ est le $\mathbb{C}-$espace vectoriel

$$\mathcal{S} \overset{\text{déf.}}{=} \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ \mathcal{C}^\infty | \forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, x \mapsto x^k f^{(n)}(x) \text{ est bornée}\right\}.$$

Soit $f \in \mathcal{S}$.

1. Ainsi nommé en hommage à Laurent Schwartz (1915– 2002), premier mathématicien français à recevoir la médaille Fields pour ses travaux sur la *théorie des distributions*, en 1950 – il est alors professeur à l'université de Nancy. À ne pas confondre avec Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Montrer que pour tout $(k,n)\in\mathbb{N}^2$, $x\mapsto x^k f^{(n)}(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $\xi\in\mathbb{R}$,

$$\big(\mathcal{F}(f)\big)^{(n)}(\xi)=(-2\pi i)^n\int_{-\infty}^{+\infty}x^n f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x=(-2\pi i)^n\mathcal{F}(x^n f(x))(\xi).$$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $\xi\in\mathbb{R}$, montrer que

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\xi)=(2\pi i\xi)^n\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Solution (**Ex.141 –** *Dans l'espace $\mathcal{S}$, dérivée de la transformée et transformée de la dérivée*)

1. Soit $(k,n)\in\mathbb{N}^2$. Par définition de $\mathcal{S}$, $x\mapsto x^k f^{(n)}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $x^{k+2}f^{(n)}(x)=\mathcal{O}(1)$, donc $x^k f^{(n)}(x)=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, ce qui assure que $x\mapsto x^k f^{(n)}(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Appliquons le théorème de régularité des intégrales à paramètre. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Soit $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C},(\xi,x)\mapsto f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}$.
(i) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\xi\mapsto g(\xi,x)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.
(ii) Pour tout $k\in[\![0\,;\ n-1]\!]$, pour tout $\xi\in\mathbb{R}$,

$$x\mapsto\frac{\partial^k g}{\partial\xi^k}(\xi,x)=\big(-2\pi ix\big)^k f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}$$

est continue par morceaux et intégrable (toujours $\mathrm{O}(1/x^2)$) sur $\mathbb{R}$.
(iii) Pour tout $\xi\in\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{\partial^n g}{\partial\xi^n}(\xi,x)=\big(-2\pi ix\big)^n f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
(iv) $\forall(\xi,x)\in\mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial^n g}{\partial\xi^n}(\xi,x)\right|\leqslant(2\pi)^n\,|x^n f(x)|$ et $x\mapsto(2\pi)^n\,|x^n f(x)|$ est continue par morceaux et intégrable (...toujours $\mathrm{O}(1/x^2)$) sur $\mathbb{R}$.
Le théorème s'applique et on obtient l'expression voulue.

3. Même raisonnement que dans la propriété précédente (IPP). On peut noter que $x\mapsto xf^{(n)}(x)$ bornée donne directement $f^{(n)}(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$ puisque $f^{(n)}(x)=\mathcal{O}(1/x)$.

Exercice 142

Exemples de calculs de transformées Fourier

Justifier les propriétés suivantes.

1. *Transformée d'une fonction porte et d'une fonction indicatrice*

a) Soit $\Pi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},x\mapsto\begin{cases}1 & \text{si } |x|<1/2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Alors $\mathcal{F}(\Pi):\xi\mapsto\operatorname{sinc}(\pi\xi)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} & \text{si } \xi\neq0\\ 1 & \text{si } \xi=0\end{cases}$

b) Soit $a<b$ et $\chi_{[\,a\,;\ b]}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},x\mapsto\begin{cases}1 & \text{si } x\in[\,a\,;\ b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Alors $\mathcal{F}(f):\xi\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi(b-a)\xi)}{\pi\xi}\mathrm{e}^{-i\pi(a+b)\xi} & \text{si } \xi\neq0\\ b-a & \text{si } \xi=0\end{cases}$

Remarque : « sinc » ainsi défini s'appelle le *sinus cardinal.*

2. *Transformée d'une exponentielle*

Soit $a\in\,]\,0\,;\ +\infty[$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},x\mapsto\begin{cases}\mathrm{e}^{-ax} & \text{si } x\geqslant0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Alors $\mathcal{F}(f):\xi\mapsto\dfrac{1}{a+2\pi i\xi}$.

3. *Transformée d'une exponentielle symétrisée*
Soit $a \in]\,0\,;\ +\infty[$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{-a|x|}$.
Alors $\mathcal{F}(g) : \xi \mapsto \dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$.
Remarque : cette fonction est la fonction lorentzienne de paramètre a.

4. *Transformée d'une gaussienne*
Soit $a \in]\,0\,;\ +\infty[$ et $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{-a\pi x^2}$.
En formant une équation différentielle du premier ordre dont $\widehat{\varphi_a}$ est solution, on montre, grâce à l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$, que

$$\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{e}^{-\pi\xi^2/a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\varphi_{1/a}(\xi).$$

Solution (**Ex.142 –** *Exemples de calculs de transformées Fourier*)

1. $\displaystyle \mathcal{F}(\Pi)(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} 1\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}}{-2\pi i\xi}\right]_{-1/2}^{1/2} = \dfrac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\chi_{[\,a\,;\,b]})(\xi) &= \int_a^b 1\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}}{-2\pi i\xi}\right]_a^b = \dfrac{\sin(\pi(b-a)\xi)}{\pi\xi}\mathrm{e}^{-i\pi(a+b)\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b-a & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

car $\mathrm{e}^{2i\beta} - \mathrm{e}^{2i\alpha} = \mathrm{e}^{i(\beta+\alpha)}\left(\mathrm{e}^{i(\beta-\alpha)} - \mathrm{e}^{i(-\beta+\alpha)}\right) = 2i\mathrm{e}^{i(\beta+\alpha)}\sin(\beta-\alpha)$

2. $\displaystyle \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+2\pi i\xi)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a+2\pi i\xi}$

3. En notant $g : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{ax} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\displaystyle \mathcal{F}(g)(\xi) = \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{(a-2\pi i\xi)x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{(a-2\pi i\xi)x}}{a-2\pi i\xi}\right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{a-2\pi i\xi}$

Par linéarité de l'intégrale (donc de $\mathcal{F}$ au passage),
$\displaystyle \mathcal{F}(h)(\xi) = \mathcal{F}(f+g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) + \mathcal{F}(g)(\xi) = \frac{2a}{a^4 + 4\pi^2\xi^2}$

4. $\varphi_a'(x) = -2a\pi x\varphi_a(x)$ donc $\varphi_a'(x) + 2a\pi x\varphi_a(x) = 0$.
En prenant la transformée de Fourier des deux membres,

$$\mathcal{F}(\varphi_a')(\xi) + 2a\pi\mathcal{F}(x \mapsto x\varphi_a(x))(\xi) = 0$$

Comme $\varphi_a \in \mathcal{S}$ donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et par les liens entre dérivation et transformation de Fourier, on a

$$2\pi i\xi\widehat{\varphi_a}(\xi) - \frac{1}{i}a\widehat{\varphi_a}'(\xi) = 0$$

soit encore

$$\widehat{\varphi_a}'(\xi) + \frac{2\pi}{a}\xi\widehat{\varphi_a}(\xi) = 0$$

Cette équation différentielle du premier ordre s'intègre facilement et il existe $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\widehat{\varphi_a}(\xi) = \mathrm{K}\exp\left(-\frac{\pi}{a}\xi^2\right)$$

De plus
$\displaystyle \widehat{\varphi_a}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(x)\mathrm{d}x \overset{u=x\sqrt{a\pi}}{=} \frac{1}{\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{a}}.$

Donc $\mathrm{K} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Exercice 143

Transformation inverse

Soit $f \in \mathcal{S}$ telle que $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On pose $\varphi = \varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-\pi x^2)$ de sorte que $\widehat{\varphi} = \varphi$ d'après la propriété précédente.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) \mathrm{d}\xi \text{ et } \mathrm{J}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) \widehat{\varphi}(x) \,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = f(0)$.

2. À l'aide de la formule de Fubini (admise)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) \mathrm{e}^{-2i\pi\xi x}\mathrm{d}\xi\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) \mathrm{e}^{-2i\pi\xi x}\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}\xi$$

montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{I}_n = \mathrm{J}_n$.

3. Justifier que $f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi$.

4. Montrer que par translation

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2i\pi u\xi}\mathrm{d}\xi$$

qui est bien la formule « intuitée » dans l'introduction.

Solution (**Ex.143 –** *Transformation inverse*)

1. • Appliquons le théorème de convergence dominée de Lebesgue en posant pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g_n : \xi \mapsto \widehat{f}(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{n}\right).$$

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue par morceaux.

(ii) $g_n \overset{\mathrm{CVS}}{\longrightarrow} \widehat{f}$ car φ est continue donc $\varphi\left(\dfrac{\xi}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(0) = 1$.

(iii) Comme $|\varphi| \leqslant 1$, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |g_n(\xi)| \leqslant \left|\widehat{f}(\xi)\right|$ avec $\widehat{f}$ intégrable.
Par le théorème de Lebesgue,

$$\mathrm{I}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(\xi)\mathrm{d}\xi \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

• Rappelons que $\widehat{\varphi} = \varphi$ et que, par l'intégrale de Gauss,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x \overset{u=x\sqrt{\pi}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \sqrt{\pi} = 1.$$

Appliquons le théorème de convergence dominée de Lebesgue en posant pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h_n : x \mapsto f\left(\frac{x}{n}\right) \widehat{\varphi}(x).$$

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, h_n est continue par morceaux.

(ii) $h_n \overset{\mathrm{CVS}}{\longrightarrow} f(0)\varphi$ car f est continue donc $f\left(\dfrac{x}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$.

(iii) Comme $f \in \mathcal{S}$, f est bornée car $f(t) = t^0 f(t)$, donc on a :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |h_n(x)| \leqslant ||f||_\infty \varphi(x)$ avec φ intégrable.
Par le théorème de Lebesgue,

$$\mathrm{J}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\varphi(x)\mathrm{d}x = f(0) \times 1 = f(0)$$

2.
$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2i\pi\xi x}\right) \mathrm{d}x\varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2i\pi\xi x}\varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi, \text{ et par la formule de Fubini} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2i\pi\xi x}\varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) \mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2i\pi\xi x}\varphi\left(\frac{\xi}{n}\right) \mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \\
&\overset{t=\xi/n}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2i\pi ntx}\varphi(t)\, n\mathrm{d}t\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\overset{u=nx}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2i\pi tu} \varphi(t)\, \mathrm{d}t\mathrm{d}u$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) \widehat{\varphi}(u)\mathrm{d}u$$

Donc : $\mathrm{I}_n = \mathrm{J}_n$.

3. Par unicité de la limité, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n$, *i.e.* $f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi$.

④ Soit $u \in \mathbb{R}$. Posons $h : x \mapsto f(u+x)$ de sorte que $h(0) = f(u)$. On va appliquer ce qui précède à h.

- h est clairement dans $\mathcal{S}$ car $(x+u)^k \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^k$ et $h^{(n)}(x) = f^{(n)}(u+x)$.
- $\widehat{h}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u+x)\mathrm{e}^{-2i\pi\xi x}\mathrm{d}x \overset{t=u+x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi\xi(t-u)}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{2i\pi\xi u}\widehat{f}(\xi)$,

et comme $\widehat{f}$ est intégrable, $\widehat{h}$ est intégrable.

Donc par ce qui précède,

$$f(u) = h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{h}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2i\pi\xi u}\mathrm{d}\xi$$

Chapitre 42

Séries entières complexes et grands principes

Dans ce chapitre, nous allons étudier certaines propriétés remarquables des fonctions développables en série entière de la variable complexe.

Rappels sur la notion de voisinage –

• On rappelle qu'une propriété $\mathcal{P}(z)$ est dite *vraie au voisinage de* z_0 s'il existe une partie ouverte $\mathcal{V}$ contenant z_0 telle que, pour tout $z \in \mathcal{V}$, la propriété $\mathcal{P}(z)$ est vérifiée.

Vu la définition d'un ouvert, il revient au même de dire qu'il existe $r > 0$ tel que la propriété $\mathcal{P}(z)$ est vraie pour tout $z \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(z_0; r)$, $\overset{\circ}{\mathrm{D}}(z_0; r)$ désignant le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r.

Ainsi par exemple, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\text{« } f \text{ ne s'annule pas au voisinage de } z_0 \text{ » ;}$$
$$\text{« } \exists r > 0, \quad \forall z \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(z_0; r), f(z) \neq 0 \text{ » ;}$$
$$\text{« } \exists r > 0, \quad \big(|z - z_0| < r\big) \Longrightarrow (f(z) \neq 0) \text{ ».}$$

• Pour manipuler les voisinages, et notamment les disques ouverts, il est bon d'avoir à l'esprit que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$

$$\forall z \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(z_0; r), \quad \overset{\circ}{\mathrm{D}}(z; r - |z - z_0|) \subset \overset{\circ}{\mathrm{D}}(z_0; r).$$

Exercice 144

Principe des zéros isolés en 0

On rappelle que l'expression *« le nombre x est un zéro de la fonction f »* signifie que $f(x) = 0$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue.

b) Montrer que, pour tout $r > 0$, il existe x tel que $0 < |x| < r$ et $f(x) = 0$.

Autrement dit, tout voisinage $]-r\,;\ r[$ de 0 contient au moins un zéro de f autre que le nombre 0. Le zéro 0 de f n'est pas isolé : on peut trouver des zéros de f aussi proche que l'on veut de 0.

2. Soit f une fonction développable en série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ (éventuellement $\mathrm{R} = +\infty$).

On pose

$$\forall z \text{ tel que } |z| < \mathrm{R}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

On suppose de plus que f n'est pas la fonction nulle.

a) Justifier l'existence de $k = \min\{n \in \mathbb{N} |\ c_n \neq 0\}$.

b) Montrer qu'il existe une fonction g développable en série entière de rayon R telle que

$$\begin{cases} |z| < \mathrm{R} \Longrightarrow f(z) = z^k g(z) \\ g(0) \neq 0 \end{cases}$$

c) Justifier qu'il existe $r \in\ ]0\,;\ \mathrm{R}[$ tel que

$$|z| < r \Longrightarrow |g(z) - g(0)| \leqslant \frac{|c_k|}{2}.$$

d) Justifier finalement que

$$\forall z \text{ tel que } 0 < |z| < r, \text{ on a : } f(z) \neq 0.$$

Autrement dit, il existe un voisinage $\overset{\circ}{\mathrm{D}}(0; r)$ de 0 dans lequel le seul point où f peut s'annuler est 0.
Si 0 est un zéro de f, alors f est isolé...

3. Existe-t-il des fonctions développables en série entière telles qu'à partir d'un certain rang n_0 on ait :

a) $\forall n \geqslant n_0, \quad f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{n}$?

b) $\forall n \geqslant n_0, \quad f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = f\left(\dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{n}$?

Solution (**Ex.144** – *Principe des zéros isolés en 0*)

1. a) • Par composition de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ continue sur $\mathbb{R}^*$ et sin continue sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(1/x)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions continues.

• $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |f(x)| \leqslant |x|$ donc par encadrement $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = f(0)$. Donc f est continue.

b) • $\sin(1/x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}^*, x = \dfrac{1}{k\pi}$.

Or $\dfrac{1}{k\pi} < r$ pour $k > \dfrac{1}{r\pi}$: prenons par exemple $k = \left\lfloor \dfrac{1}{r\pi} \right\rfloor + 1$ et $x = \dfrac{1}{k\pi}$.

Alors $0 < x < r$ et $f(x) = 0$. *Cqfd.*

2. a) Si tous les coefficients de f étaient nuls, f serait la fonction nulle. Comme f n'est pas nulle, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} |\ c_n \neq 0\}$ n'est pas vide. Or toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

b) Soit z tel que $|z| < \mathrm{R}$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{j=0}^{+\infty} c_{j+k} z^{j+k} = z^k \sum_{j=0}^{+\infty} c_{j+k} z^j$$

En posant $g(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} c_{j+k} z^j$, g est de même rayon que R et $g(0) = c_k \neq 0$.

c) g est continue en 0 (comme toute fonction DSE de rayon non nul), donc $g(z) \xrightarrow[z \to 0]{} g(0)$.

En prenant $\varepsilon = \dfrac{|c_k|}{2} > 0$ dans la définition de la limite,

$$\exists r > 0 \text{ tel que } |z| < r \Longrightarrow |g(z) - g(0)| \leqslant \frac{|c_k|}{2}.$$

d) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |z| < r$. Comme $g(0) = c_k$,

$|g(z) - c_k| \leqslant \dfrac{|c_k|}{2}$ donc $\big|\,|g(z)| - |c_k|\,\big| \leqslant \dfrac{|c_k|}{2}$ donc $-\dfrac{|c_k|}{2} \leqslant |g(z)| - |c_k|$ donc $\dfrac{|c_k|}{2} \leqslant |g(z)|$.

Comme $c_k \neq 0$, $|g(z)| > 0$ donc $g(z) \neq 0$.

Comme $f(z) = z^k g(z)$ avec $z \neq 0$ et $g(z) \neq 0$, $f(z) \neq 0$.

3. a) •*Analyse* –

Supposons f DSE au voisinage de 0 avec un rayon R non nul et vérifiant

$$\forall n \geqslant n_0, \quad f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Soit $g : z \mapsto f(z) - 2z$. Alors :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad g\left(\frac{1}{2n}\right) = 0.$$

g est DSE (même rayon que f) et admet une infinité de zéros non isolés au voisinage de 0.
D'après le principe précédent, g est la fonction nulle, donc f est la fonction $z \mapsto 2z$.

•*Synthèse* –

Réciproquement, $f : z \mapsto 2z$ est clairement solution au problème.

•*Conclusion* –

Il existe une unique fonction répondant au problème : $z \mapsto 2z$.

b) S'il existe une solution, elle est solution du problème précédent, donc du type $z \mapsto 2z$. Or $f : z \mapsto 2z$ ne vérifie pas

$$\forall n \geqslant n_0, \quad f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}.$$

Donc ce problème n'a aucune solution.

Exercice 145

Principe du maximum en 0

Soit f une fonction développable en série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ (éventuellement $\mathrm{R} = +\infty$).
On pose

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < \mathrm{R}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

On suppose que la fonction $z \mapsto |f(z)|$ atteint un maximum local en 0, c'est-à-dire

$$\exists r > 0, \quad \forall z \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(0, r), \quad |f(z)| \leqslant |f(0)|.$$

1. Justifier, à l'aide du principe des zéros isolés du premier exercice, que si $c_0 = 0$, alors f est la fonction nulle.

2. Dans cette question, on suppose $c_0 \neq 0$.

a) On suppose de plus qu'il existe au moins un coefficient c_n avec $n \in \mathbb{N}^*$ non nul et on pose

$$k = \min\big\{n \in \mathbb{N}^* |\ c_n \neq 0\big\}.$$

Justifier l'existence d'un nombre complexe b_k et d'une fonction g développable en série entière de rayon au moins égal à r tel que

$$\forall z \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(0; r), \quad f(z) = c_0\big(1 + b_k z^k\big(1 + z g(z)\big)\big).$$

b) Justifier l'existence d'un réel $\mathrm{M} \in \left]0\,;\ +\infty\right[$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \Big(|z| \leqslant \frac{r}{2}\Big) \Longrightarrow \big(|g(z)| \leqslant \mathrm{M}\big).$$

c) On pose $b_k = \rho \mathrm{e}^{i\alpha}$ avec $\rho \in \left]0\,;\ +\infty\right[$ et $\alpha \in \left[0\,;\ 2\pi\right[$.

Soit $m = \min\Big(\dfrac{1}{2\mathrm{M}}, \dfrac{r}{2}\Big)$, $\theta = \dfrac{2\pi - \alpha}{k}$ et $z = m \mathrm{e}^{i\theta}$.

Justifier que

$$\big|1 + b_k z^k\big(1 + z g(z)\big)\big| \geqslant \Big|\,\big|1 + b_k z^k\big| - \big|b_k z^{k+1} g(z)\big|\,\Big|$$

et en déduire que

$$|f(z)| > |c_0|.$$

d) En déduire que f est constante.

3. a) Énoncer une conclusion synthétique des questions 1 & 2. Cette conclusion s'appelle le *principe du maximum.*

b) Donner une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, non constante, telle que $|f|$ atteigne un maximum en 0.

Solution (**Ex.145** – *Principe du maximum en 0*)

1. Si $c_0 = 0$, alors $f(0) = 0$ et pour tout z tel que $|z| < r$, $|f(z)| \leqslant |f(0)|$, *i.e.* $f(z) = 0$. Donc le zéro 0 de f n'est pas isolé, et ce n'est possible que si la fonction f est nulle par le principe des zéros isolés.

2. Dans cette question, on suppose $c_0 \neq 0$.

a) $\forall z \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(0; r)$,

$$f(z) = \sum_{n=\mathrm{O}}^{+\infty} c_n z^n = c_0 + \sum_{n=k}^{+\infty} c_n z^n = c_0 + c_k z^k + z^{k+1} \sum_{j=0}^{+\infty} c_{k+1+j} z^j$$

$$= c_0 \left(1 + \frac{c_k}{c_0} z^k \left(1 + z \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{c_{k+1+j}}{c_k} z^j\right)\right)$$

En posant $b_k = \dfrac{c_k}{c_0}$ et $g(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{c_{k+1+j}}{c_k} z^j$ de rayon au moins r par le calcul précédent (en fait de rayon identique à f, donc R), on a

$$\forall z \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(0; r), \quad f(z) = c_0\big(1 + b_k z^k\big(1 + z g(z)\big)\big).$$

b) g est continue sur le disque fermé de rayon $r/2$. Ce disque étant aussi borné, g est bornée et $|g|$ atteint un maximum M sur ce disque. On a alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \Big(|z| \leqslant \frac{r}{2}\Big) \Longrightarrow \big(|g(z)| \leqslant \mathrm{M}\big).$$

c) $\big|1 + b_k z^k\big(1 + z g(z)\big)\big| = \big|1 + b_k z^k + b_k z^{k+1} g(z)\big|$, et par l'inégalité triangulaire $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a + b|$,

$$(1) \quad \big|1 + b_k z^k\big(1 + z g(z)\big)\big| \geqslant \Big|\,\big|1 + b_k z^k\big| - \big|b_k z^{k+1} g(z)\big|\,\Big|.$$

Or :

- $\big|1 + b_k z^k\big| = \big|1 + \rho \mathrm{e}^{i\alpha} m^k \mathrm{e}^{i(2\pi - \alpha)}\big| = \big|1 + \rho m^k\big| = 1 + \rho m^k$

- $\left|b_k z^{k+1} g(z)\right| = \rho m^{k+1} |g(z)| \leqslant \rho m^{k+1} \mathrm{M}$ car $|z| \leqslant r/2$.
  Et $m\mathrm{M} \leqslant \dfrac{1}{2\mathrm{M}}\mathrm{M} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\rho m^{k+1}\mathrm{M} \leqslant \dfrac{\rho m^k}{2}$.
  D'où $\left|b_k z^{k+1} g(z)\right| \leqslant \dfrac{\rho m^k}{2} \leqslant 1 + \rho m^k$.
  (1) fournit alors
  $$\left|1 + b_k z^k\big(1 + z g(z)\big)\right| \geqslant 1 + \rho m^k - \frac{\rho m^k}{2} \geqslant 1 + \frac{\rho m^k}{2} > 1.$$
  Par conséquent, $|f(z)| > |c_0|$.

d) On a trouvé $z \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(0; r)$ (car $|z| = m \leqslant \dfrac{r}{2}$) tel que $|f(z)| > |f(0)|$, ce qui contredit l'hypothèse initiale.
Par l'absurde, on doit rejeter l'hypothèse de a), donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = 0$ et f est constante, égale à c_0.

3. a) *Principe du maximum :* si $|f|$ atteint un maximum local en 0, alors f est constante sur tout son domaine de définition.

b) cos de classe $\mathcal{C}^\infty$ et non constante sur $\mathbb{R}$, et $|\cos|$ atteint un maximum local (et même global sur $\mathbb{R}$) en 0.

Exercice 146

Taylor et les trois principes généraux

Le principe des zéros isolés et le principe du maximum précédemment étudiés supposent que le zéro ou le maximum est atteint en $z = 0$. Nous allons voir que ces principes se transportent en tout point intérieur au disque de convergence.
Soit f une fonction développable en série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ (éventuellement $\mathrm{R} = +\infty$) et on note $\mathcal{D}$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R (éventuellement $\mathcal{D} = \mathbb{C}$).
On pose
$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < \mathrm{R}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

1. On admet le théorème de Fubini de permutation de l'ordre des sommations pour les séries doubles absolument convergentes (théorème régulièrement admis dans les énoncés de concours), dont l'énoncé est le suivant.

Théorème de Fubini
Soit $(u_{i,j})_{i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}}$ une suite double de nombres complexes :
$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{i,j} \in \mathbb{C}.$$
On suppose que :
① pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0} u_{i,j}$ est absolument convergente,
② la série $\displaystyle\sum_{i\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}|\right)$ est convergente.
Alors :
❶ pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{i\geq 0} u_{i,j}$ est absolument convergente,
❷ la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}|\right)$ est convergente,
❸ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}|\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}|\right)$.
On dit que la série double $\displaystyle\sum_{i,j} u_{i,j}$ est absolument convergente, et sa somme est indépendante de l'ordre des sommations :
$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right).$$

a) Soit $z_0 \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$. On pose $r_0 = |z_0|$.
Soit $r \in [r_0\,;\ \mathrm{R}[$. On pose

$$\forall (n,k)\in\mathbb{N}^2,\quad u_{n,k}\overset{\text{déf.}}{=}|a_n|\binom{n}{k}(r-r_0)^k r_0^{n-k}.$$

Montrer que la série double $\displaystyle\sum_{n,k}u_{n,k}$ converge absolument.

b) Soit $k\in\mathbb{N}$. Justifier la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|a_n|\binom{n}{k}(r-r_0)^k r_0^{n-k}$ converge absolument et que

$$\left|\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\right|(r-r_0)^k\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|\binom{n}{k}(r-r_0)^k r_0^{n-k}.$$

c) En déduire que la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}z^k$ a un rayon de convergence au moins égal à $r-r_0$.

d) En déduire finalement que la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}z^k$ a un rayon de convergence au moins égal à $\mathrm{R}-r_0$, et, toujours à l'aide du théorème de Fubini, montrer que :

$$\text{pour tout } z\in\mathbb{C} \text{ tel que } |z-z_0|<\mathrm{R}-r_0,$$
$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k.$$

Taylor, quand tu nous tiens...

e) Cette relation demeure-t-elle si $z_0=0$?

2. *Principe du prolongement analytique* –

Soit $z_0\in\mathcal{D}$. L'objectif de cette question est de démontrer le principe du prolongement analytique qui sera énoncé en d).

Dans les sous-questions a) à c), on établit que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_0)=0$,

(ii) f est la fonction nulle sur un voisinage de z_0,

(iii) f est la fonction nulle sur $\mathcal{D}$ tout entier.

a) Justifier que (i) entraîne (ii).

b) On suppose (ii). On note $\mathcal{D}'$ l'ensemble des points de $\mathcal{D}$ au voisinage desquels la fonction f est nulle :

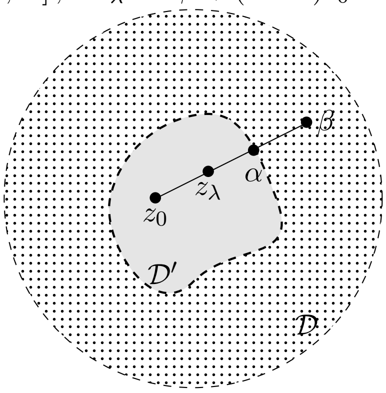
$$\mathcal{D}'=\{z\in\mathcal{D}|\ \exists r_z>0, f \text{ est nulle sur } \overset{\circ}{\mathrm{D}}(z;r_z)\}$$

i – Justifier que $\mathcal{D}'$ est un ouvert non vide.

ii – On suppose que $\mathcal{D}'\neq\mathcal{D}$, donc il existe au moins un nombre $\beta\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}'$.

On paramètre le segment $[\,z_0\,;\ \beta]$ en posant

$$\forall\lambda\in[\,0\,;\ 1]\,,\quad z_\lambda=\lambda\beta+(1-\lambda)z_0.$$



Justifier que l'ensemble $\mathrm{I}=\{\lambda\in[\,0\,;\ 1]\,|z_\lambda\notin\mathcal{D}'\}$ admet une borne inférieure μ.

iii – Montrer que $\mu\geqslant\dfrac{r_{z_0}}{|\beta-z_0|}>0$.

iv – Soit $\alpha=z_\mu$. Justifier que α n'appartient pas à $\mathcal{D}'$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

v – Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de $[\,0\,;\ \mu[$ convergente, de limite μ.

En considérant la suite $\left(z_{\lambda_k}\right)$, montrer que,

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f^{(n)}(\alpha)=0.$$

vi – En déduire une contradiction.

vii – Justifier alors que (iii) est vérifiée.

c) Conclure.

d) Justifier le *principe du prolongement analytique :*

« Soit f et g deux fonctions développables en série entière de rayon $\mathrm{R} > 0$. On note $\mathcal{D} = \overset{\circ}{\mathrm{D}}(0;\mathrm{R})$.
On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathcal{D}$ tel qu'au voisinage de z_0, f et g coïncident, *i.e.*

$$\exists r > 0 \text{ tel que } |z - z_0| < r \text{ entraîne } f(z) = g(z).$$

Alors $f = g$ sur $\mathcal{D}$ tout entier. »

3. *Principe des zéros isolés –*
On suppose que f n'est pas la fonction nulle. Soit $z_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(z_0) = 0$.
À l'aide de la série entière $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} z^k$ et du premier exercice, montrer que z_0 est un zéro isolé de f, c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall z \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < r, \quad f(z) \neq 0.$$

4. *Principe du maximum –*
Soit $z_0 \in \mathcal{D}$. On suppose que $z \mapsto |f(z)|$ atteint un maximum local en z_0.
Montrer, en utilisant le deuxième exercice, que f est constante sur $\mathcal{D}$ tout entier.

Solution (**Ex.146 –** *Taylor et les trois principes généraux*)

1. a) ① Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. $\displaystyle\sum_{k \geq 0} u_{n,k}$ converge absolument car ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls puisque $\dbinom{n}{k} = 0$ pour $k > n$, et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} |a_n| \binom{n}{k} (r - r_0)^k r_0^{n-k} \overset{\text{Newton}}{=} |a_n| \, r^n$$

② Comme $0 < r < \mathrm{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ converge absolument, donc $\displaystyle\sum_{n \geq 0} |a_n| \, r^n$ converge absolument.

- Par le théorème de Fubini, la série double $\displaystyle\sum_{n,k} u_{n,k}$ converge absolument.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$.
D'après la conclusion ❶ du théorème de Fubini, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} |a_n| \binom{n}{k} (r - r_0)^k r_0^{n-k}$ converge absolument.
Par dérivation terme à terme de la série entière définissant f, on a :

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(k+i)!}{i!} a_{k+i} z_0^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{k+i}{k} a_{k+i} z_0^i$$

$$\overset{n=k+i}{=} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k} \text{ car } \binom{n}{k} = 0 \text{ pour } n < k$$

D'où : $\displaystyle\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (r - r_0)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n (r - r_0)^k z_0^{n-k}$.
Comme $|z_0| = r_0$, cette série est absolument convergente et par l'inégalité triangulaire

$$\left| \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \right| (r - r_0)^k \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \binom{n}{k} (r - r_0)^k r_0^{n-k}.$$

c) • Soit z tel que $|z| \leqslant r - r_0$. D'après ce qui précède :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \left| \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} z^k \right| \leqslant \left| \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \right| (r - r_0)^k \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}$$

- D'après la conclusion ❷ du théorème de Fubini, la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right)$ converge.

- Donc la série entière $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} z^k$ converge, ce qui prouve que le rayon de convergence de cette série vaut au moins $r - r_0$.

d) • Soit z tel $|z| < \mathrm{R} - r_0$. On a : $|z| + r_0 < \mathrm{R}$. Prenons $r \in \left]\, |z| + r_0 \,;\, \mathrm{R} \right[$ de sorte que $r \in [\, r_0 \,;\, \mathrm{R}[$ et $|z| < r - r_0$.

Par le raisonnement précédent, la série $\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} z^k$ converge, donc la série entière $\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} z^k$ a un rayon de convergence au moins égal à $\mathrm{R} - r_0$.

• Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| < \mathrm{R} - r_0$. Il existe $r \in [\, r_0\,;\ \mathrm{R}[$ tel que $|z - z_0| \leqslant r - r_0$.

Par ce qui précède, la série double $\sum_{n,k} a_n \binom{n}{k} (z - z_0)^k z_0^{n-k}$ converge absolument puisque le module de son terme général est majorée par $u_{n,k}$.

Sommons alors cette série double de deux façons.

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_n \binom{n}{k} (z - z_0)^k z_0^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} (z - z_0)^k z_0^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = f(z)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_n \binom{n}{k} (z - z_0)^k z_0^{n-k} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} (z - z_0)^k z_0^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k} \\
&\overset{i=n-k}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} (z - z_0)^k \sum_{i=0}^{+\infty} a_{k+i} \binom{k+i}{k} z_0^{i} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{k+i} \frac{(k+i)!}{i!} z_0^{i} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} f^{(k)}(z_0)
\end{aligned}$$

Par la conclusion ❸ du théorème de Fubini, on a

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

e) Oui, d'après la formule de Taylor en 0 (qui est au programme : si $\mathrm{R} > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$...)

2. *Principe du prolongement analytique* –

Soit $z_0 \in \mathcal{D}$. L'objectif de cette question est de démontrer le principe du prolongement analytique qui sera énoncé en d).

Dans les sous-questions a) à c), on établit que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_0) = 0$,

(ii) f est la fonction nulle sur un voisinage de z_0,

(iii) f est la fonction nulle sur $\mathcal{D}$ tout entier.

a) Supposons (i).

D'après 1), pour tout $z \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(z_0; \mathrm{R} - r_0)$, $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = 0$.

Ce qui prouve (ii).

b) On suppose (ii). On note $\mathcal{D}'$ l'ensemble des points de $\mathcal{D}$ au voisinage desquels la fonction f est nulle :

$$\mathcal{D}' = \{z \in \mathcal{D} |\ \exists r_z > 0, f \text{ est nulle sur } \overset{\circ}{\mathrm{D}}(z; r_z)\}$$

i – • D'après (ii), $z_0 \in \mathcal{D}'$ donc $\mathcal{D}' \neq \emptyset$.

• Montrons que $\mathcal{D}'$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathcal{D}'$ quelconque.

Alors il existe $r_z > 0$ tel que f est nulle sur $\overset{\circ}{\mathrm{D}}(z; r_z)$.

Montrons que $\overset{\circ}{\mathrm{D}}(z; r_z) \subset \mathcal{D}'$, ce qui prouvera que $\mathcal{D}'$ est ouvert.

Soit $w \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(z; r_z)$ quelconque.

Alors $|z - w| < r_z$ donc $\rho = r_z - |z - w| > 0$.

Et pour tout $t \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(w; \rho)$,

$$|t - z| \leqslant |t - w + w - z| \leqslant |t - w| + |w - z| < \rho + |w - z|$$

donc $|t-z|<r_z$ et $f(t)=0$.
Ainsi il existe un voisinage de w sur lequel f est nulle, donc $w \in \mathcal{D}'$.
Du coup $\overset{\circ}{\mathrm{D}}(z;r_z) \subset \mathcal{D}'$, ce qui achève de montrer que $\mathcal{D}'$ est ouvert.

ii – • I est non vide car $z_1=\beta \notin \mathcal{D}'$.
• $\mathrm{I} \subset [0\,;\ 1]$ donc I est minoré.
• Par conséquent, I possède une borne inférieure.

iii – Soit λ tel que : $0 \leqslant \lambda < \dfrac{r_{z_0}}{|\beta-z_0|}$.
On a : $|z_\lambda - z_0| = |\lambda\beta+(1-\lambda)z_0-z_0| = \lambda\,|\beta-z_0| < r_{z_0}$.
Donc : $z_\lambda \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(z_0;r_{z_0})$.
$\overset{\circ}{\mathrm{D}}(z_0;r_{z_0})$ est un voisinage de z_λ sur lequel f est nulle.
Donc $z_\lambda \in \mathcal{D}'$ et $\lambda \in \mathrm{I}$. Par conséquent, $\mu \geqslant \lambda$.
Comme ceci est vrai pour tout λ tel que $0 \leqslant \lambda < \dfrac{r_{z_0}}{|\beta-z_0|}$, on a $\mu \geqslant \dfrac{r_{z_0}}{|\beta-z_0|}$, et du coup $\mu>0$.

iv – Supposons que $\alpha \in \mathcal{D}'$, ce qui induit $\mu<1$ car $\alpha=z_\mu$ et $z_1=\beta\notin\mathcal{D}'$.
f est nulle sur $\overset{\circ}{\mathrm{D}}(\alpha;r_\alpha)$: du coup, sur le segment $[\,z_0\,;\ \beta]$, il va y avoir des z_λ au-delà de α au voisinage desquels f est nulle. Étudions cela.
$|z_\lambda-\alpha|<r_\alpha \Longleftrightarrow |\lambda-\mu| < \dfrac{r_\alpha}{|\beta-z_0|}$
Prenons alors λ tel que $\mu \leqslant \lambda < \mu + \dfrac{r_\alpha}{|\beta-z_0|}$.
Alors $\overset{\circ}{\mathrm{D}}(\alpha;r_\alpha)$ est un voisinage de z_λ sur lequel f est nulle. Du coup $z_\lambda\in\mathcal{D}'$ et $\lambda\notin\mathrm{I}$.
J'ai démontré :

$$\forall \lambda \in \left[\mu\,;\ \mu+\frac{r_\alpha}{|\beta-z_0|}\right[,\quad \lambda\in\mathrm{I},$$

ce qui contredit que $\mu=\inf(\mathrm{I})$.
Donc $\alpha\notin\mathcal{D}'$.

v – • Soit $k\in\mathbb{N}$. $\lambda_k<\mu$ donc $\lambda_k\notin\mathrm{I}$ et $z_{\lambda_k}\in\mathcal{D}'$, donc f est nulle au voisinage de z_{λ_k}.
Du coup : $\forall n\in\mathbb{N},\quad f^{(n)}(z_{\lambda_k})=0$. Et ceci pour tout $k\in\mathbb{N}$.
• Soit $n\in\mathbb{N}$. $f^{(n)}$ est continue sur $\mathcal{D}$ car f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme somme de série entière. Par continuité :

$$f^{(n)}(z_{\lambda_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f^{(n)}(\alpha) \text{ car } z_{\lambda_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \alpha.$$

Or

$$f^{(n)}(z_{\lambda_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Donc $f^{(n)}(\alpha)=0$, et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}$.

vi – D'après a) qui a établit $(i)\Longrightarrow(ii)$, on en déduit que f est nulle au voisinage de α. Donc $\alpha\in\mathcal{D}'$: ce qui contredit le point précédent.

vii – $\mathcal{D}'\neq\mathcal{D}$ conduit à une contradiction. Donc $\mathcal{D}'=\mathcal{D}$, ce qui signifie exactement que f est nulle au voisinage de tout point de $\mathcal{D}$, et (iii) est vérifiée.

c) Il reste à établir que $(iii)\Longrightarrow(i)$, ce qui est évident car les dérivées successives de la fonction nulle sont toutes nulles.

d) En posant $h=f-g$, h est DSE sur $\mathcal{D}$ et nulle sur un voisinage de z_0, donc par $(ii)\Longrightarrow(iii)$, h est nulle sur $\mathcal{D}$, donc $f=g$ sur $\mathcal{D}$.

3. *Principe des zéros isolés –*
• g est une fonction DSE autour de 0, de rayon non nul.
• g n'est pas la fonction nulle car si elle l'était, on aurait :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f^{(n)}(0)=0,$$

donc par ce qui précède, f serait la fonction nulle, hypothèse exclue ici.
• Par 1),

$$\forall z\in\overset{\circ}{\mathrm{D}}(z_0;\mathrm{R}-|z_0|)\,,\quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=g(z-z_0).$$

Comme $f(z_0)=0$, on a $g(0)=0$.
On peut appliquer le premier exercice à g :

$$\exists r>0 \text{ tel que } \big(0<|z|<r\big)\Longrightarrow\big(g(z)\neq0\big).$$

Par conséquent,

$$\big(0 < |z - z_0| < r\big) \Longrightarrow \big(f(z) \neq 0\big),$$
ce qui signifie exactement que z_0 est un zéro isolé de f : il existe un voisinage de z_0 dans lequel f ne s'annule pas, sauf en z_0 évidemment.

4. *Principe du maximum –*

- $\exists r > 0, \forall z \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(z_0; r), |f(z)| \leqslant |f(z_0)|$.
- En définissant g comme dans la question précédente, on a :
$$\forall z \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(0; \min(r, \mathrm{R} - |z_0|)), \quad |g(z)| = |f(z + z_0)| \leqslant |f(z_0)| = |g(0)|$$
car $z + z_0 \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}(z_0; r)$.
- Par le second exercice, j'en déduis que g est constante sur $\overset{\circ}{\mathrm{D}}(0; \mathrm{R} - |z_0|)$.
- Donc f est constante au voisinage de z_0, égale à $f(z_0)$.
- Alors $h = f - f(z_0)$ est nulle au voisinage de z_0, donc, par 2), est nulle sur $\mathcal{D}$.
- Donc finalement f est constante sur $\mathcal{D}$.

Exercice 147

Fonctions entières et dominations

Une fonction est dite *entière* si elle est développable en série entière de rayon infini sur $\mathbb{C}$.
Soit
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$
la somme d'une série entière définie sur $\mathbb{C}$, donc de rayon $+\infty$.

1. *Une formule de Cauchy –*
Montrer que, pour tout $r > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-ipt}\mathrm{d}t = 2\pi r^p c_p.$$

2. *Un théorème de Liouville –*
Dans cette question, on suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$.

a) Montrer qu'il existe un réel M tel que
$$\forall r > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \quad |c_p| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{r^p}.$$
b) Montrer que tous les coefficients c_p pour $p \in \mathbb{N}^*$ sont nuls.
c) Que peut-on dire de f ?
d) *Application* - Les fonctions *complexes* sin et cos sont-elles bornées sur $\mathbb{C}$?

3. Dans cette question, on suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leqslant \alpha\,|z|^q + \beta.$$
Montrer que f est un polynôme.

4. Dans cette question, on suppose quelle
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leqslant e^{\mathcal{R}e(z)}.$$
Montrer qu'il existe une constante complexe K telle que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \mathrm{K}e^z.$$
On pourra s'intéresser à $g : z \mapsto f(z)\mathrm{e}^{-z}$.

Solution (**Ex.147 –** *Fonctions entières et dominations*)

1. *Une formule de Cauchy –*
Soit $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$.
$$\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-ipt}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(r\mathrm{e}^{it})^n \mathrm{e}^{-ipt}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n \mathrm{e}^{i(n-p)t}\mathrm{d}t$$
Or d'après le cours, la convergence est normale donc uniforme sur tout disque de $\mathbb{C}$ donc en particulier que $\mathrm{D}(0, r)$.
On peut donc permuter $\int$ et $\sum$.
$$\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-ipt}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} c_n r^n \mathrm{e}^{i(n-p)t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)t}\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)t}\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}t = 2\pi & \text{si } n = p, \\ \left[\dfrac{\mathrm{e}^{i(n-p)t}}{n-p}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } n \neq p. \end{cases}$

D'où la formule de Cauchy :

$$\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-ipt}\mathrm{d}t = 2\pi r^p c_p.$$

2. *Un théorème de Liouville –*

a) Puisque f est bornée sur $\mathbb{C}$, il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leqslant \mathrm{M}.$$

Alors par l'inégalité triangulaire

$$\forall r > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-ipt}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \mathrm{M}\mathrm{d}t \leqslant 2\pi\mathrm{M},$$

et par la formule précédente,

$$\forall r > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \quad |c_p| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{r^p}.$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors : $\dfrac{\mathrm{M}}{r^p} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$. Et par encadrement : $|c_p| \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$.

Comme $|c_p|$ ne dépend pas de r, cela signifie que $|c_p| = 0$, donc $c_p = 0$.

c) f est constante, égale à $c_0 = f(0)$.

d) *Application -*

Comme sin est DSE de rayon infini, si sin était bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle serait constante. Comme ce n'est pas le cas, sin n'est pas bornée sur $\mathbb{C}$ et on peut faire le même raisonnement pour cos.

On peut aussi noter que sin et cos ne sont pas bornées sur l'axe imaginaire pur :

$\forall x \in [\,0\,;\ +\infty[\,, \quad |\sin(ix)| = \left|\dfrac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2i}\right| \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$\forall x \in [\,0\,;\ +\infty[\,, \quad |\cos(ix)| = \left|\dfrac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2i}\right| \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

3. Pour tout $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$2\pi r^p\,|c_p| = \left|\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-ipt}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \alpha r^q + \beta\mathrm{d}t \leqslant 2\pi\big(\alpha r^q + \beta\big),$$

d'où $|c_p| \leqslant \dfrac{\alpha r^q + \beta}{r^p}$.

Or pour tout $p > q$: $\quad \alpha r^q + \beta \underset{r\to+\infty}{=} o\,(r^p)$.

Donc, pour tout $p > q$, par encadrement, $|c_p| \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$, donc $c_p = 0$.

Par conséquent

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{p} c_n z^n,$$

donc f est bien polynomiale.

4. Soit $g : z \mapsto f(z)\mathrm{e}^{-z}$. Par le produit de Cauchy de deux fonctions DSE de rayon infini, g est DSE de rayon infini.

On a alors : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |g(z)| \leqslant \mathrm{e}^{\mathcal{R}e(z)}\mathrm{e}^{-\mathcal{R}e(z)} \leqslant 1$.

Par 3., j'en déduis que g est constante sur $\mathbb{C}$. Soit K la valeur de g. On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = g(z)\mathrm{e}^{z} = \mathrm{K}\mathrm{e}^{z}.$$

Chapitre 43

La quête de π par l'Arc-tangente

Exercice 148

Étude au bord du domaine de convergence, développement en série de π

On pose, sous réserve de,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

1. Justifier que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;\ 1[$.

2. a) Justifier que f est définie en -1 et en 1.

b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;\ 1]$,

$$\mathrm{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Justifier que R_n est bornée sur $[0\,;\ 1]$ et que

$$||\mathrm{R}_n||_{\infty,[0\,;\ 1]} \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

c) En déduire que f est continue sur $[-1\,;\ 1]$.

3. Justifier que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Cette formule a été établie indépendamment vers 1670 par James Gregory et Gottfried Wilhelm Leibniz[1]*, mais on la trouve déjà dans des écrits du milieu du XVème siècle provenant du sud de l'Inde.*

Solution (**Ex.148 –** *Étude au bord du domaine de convergence, développement en série de π*)

1. D'après le cours, f est la somme du développement en série entière de la fonction Arctan de rayon de convergence 1, donc f est de classe classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;\ 1[$.

2. a) $\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)$ est une suite décroissante de limite nulle donc par le théorème des séries alternées, la série définissant $f(1)$ converge.

De plus, f est impaire donc $f(-1)$ existe et vaut $-f(1)$.

b) $\left(\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$ est une suite décroissante de limite nulle (car $x \in [0\,;\ 1]$), donc par le théorème des séries alternées,

$|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$, ceci pour tout $x \in [0\,;\ 1]$.

Donc R_n est bornée sur $[0\,;\ 1]$ et $||\mathrm{R}_n||_{\infty,[0\,;\ 1]} \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$.

c) Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} ||\mathrm{R}_n||_{\infty,[0\,;\ 1]} = 0$, donc la série converge uniformément sur $[0\,;\ 1]$. Comme chaque monôme $x \mapsto x^n$ est continu, f est continue sur $[0\,;\ 1]$.

1. Au fait, le théorème des séries alternées s'appelle aussi théorème de Leibniz, non ?

f étant impaire, elle est continue sur $[-1\,;\,1]$.

3. On a, par continuité de f, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

De plus, $\forall x \in [0\,;\,1[, f(x) = \operatorname{Arctan}(x)$, et par continuité de Arctan, $\operatorname{Arctan}(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$. Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{\pi}{4}$. Par unicité de la limite,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 149

Application au calcul numérique de π

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1\,;\,1]$,

$$\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

1. Écrire une fonction `SATAN_1(x,n)` calculant la somme partielle $\mathrm{S}_n(x)$.

2. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n(1)$ est une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$ avec une erreur inférieur à $\frac{1}{2n+3}$.

b) En déduire une fonction `PI(e)` écrite en `Python` retournant une valeur approchée de π avec une erreur inférieure à `e`.

c) À l'aide de cette fonction, donner les 8 premières décimales de π en précisant le nombre de termes sommés pour obtenir ce résultat. *Cela peut prendre du temps, avec mon ordinateur personnel environ 3 minutes.*

3. *Optimisons le temps de calcul*

Vous avez vraisemblablement eu besoin à deux reprises de l'opérateur puissance « `**` ».

a) Compléter la fonction suivante afin de calculer $\mathrm{S}_n(x)$ à l'aide uniquement des opérations « `+` » et « `*` ».

```python
def SATAN_2(x,N):
    somme = 0
    signe = 1
    puissance = x
    facteur = x*x
    diviseur = 1
    for n in range(N+1):
        somme += signe*puissance/diviseur
        signe = ..........
        puissance *= ..........
        diviseur += ..........
    return somme
```

b) À l'aide de la fonction `time()` du module `time`, indiquer le temps pris par l'exécution de `PI(1e-6)` en utilisant `SATAN_1` puis `SATAN_2`.

4. *Une amélioration notable par une stratégie due à John Machin(1680-1752).*

a) Justifier que, pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, $\mathrm{S}_n(x)$ est une valeur approchée de $\operatorname{Arctan}(x)$ avec une erreur inférieure à $\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

b) Justifier que

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right).$$

c) En déduire une expression de π comme somme de deux séries alternées.

d) Justifier que l'erreur commise en calculant les n premiers termes de la première (respectivement les n de la seconde) est inférieure à $2 \times \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ (resp. $\frac{4}{3} \times \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{9}\right)^n$).

L'erreur commise est ainsi au moins divisée par 4 à chaque nouveau terme calculé.

e) Justifier qu'il faut calculer environ $\dfrac{n}{0,6}$ termes pour avoir n décimales exactes.

f) Écrire un script calculant les 8 premières décimales de π en exploitant cette décomposition. S'assurer de l'exactitude du résultat et chronométrer ce script.

5. a) Montrer que pour deux réels p et q strictement positifs, on a

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{p}\right)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{p+q}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{q}{p^2+pq+1}\right)\qquad(\heartsuit).$$

b) Retrouver la formule donnée en 3.b), puis toujours à l'aide de $(\heartsuit)$ prouver que

$$\frac{\pi}{4}=2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right).$$

c) Justifier qu'alors il suffit d'environ $\dfrac{n}{0,95}$ termes pour calculer n décimales exactes.

6. a) Justifier successivement que

$$\tan\left(2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)=\frac{5}{12},\ \text{puis que}\ \tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)=\frac{120}{119}.$$

b) En déduire la formule de John Machin (1706)

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

c) On note

$$\mathrm{T}_{m,n}=16\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1}-4\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1}.$$

Justifier que $\mathrm{T}_{5,1}$ fournit une valeur approchée de π avec 8 décimales exactes.
Combien de termes faut-il sommer pour obtenir cette valeur ?

d) Vérifier cela par un script en `Python`.

John Machin calcula en 1706 les 100 premières décimales de π à l'aide de cette technique... évidemment à la main, ce qui est une joli prouesse !!!

On peut penser que Machin fut guidé d'une part par le fait qu'avoir des puissances de $\frac{1}{5}$ est pratique pour obtenir une écriture en base 10, et d'autre part par $\pi\simeq 3,2=\frac{16}{5}$ et $\operatorname{Arctan}(x)\simeq x$ près de 0, donc $4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\simeq\frac{4}{5}\simeq\frac{\pi}{4}$.

Reste à préciser le petit écart entre $\frac{\pi}{4}$ et $4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$. Il vaut $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\simeq 0,00418$.

7. *En 1844, le calculateur prodige John Dahse calcula de tête 205 décimales de π avec la formule*

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right).$$

Montrer cette formule à l'aide de la relation $(\heartsuit)$.

Solution (**Ex.149** – *Application au calcul numérique de π*)

1. Par exemple,

```python
def SATAN_1(x,N):
    s = 0
    for n in range(N+1):
        s += (-1)**n/(2*n+1)*x**(2*n+1)
    return s
```

2. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|\mathrm{S}_n(1)-\dfrac{\pi}{4}\right|=|\mathrm{R}_n(1)|\leqslant\dfrac{1}{2n+3}$ par l'exercice précédent.

b) En déduire une fonction `PI(e)` écrite en `Python` retournant une valeur approchée de π avec une erreur inférieure à `e`.

$|4\mathrm{S}_n(1)-\pi|\leqslant\dfrac{1}{2n+3}$ donc pour n tel que $\dfrac{1}{2n+3}\leqslant e$, $4\mathrm{S}_n(1)$ est une approximation de π avec une erreur inférieure à e.

En prenant $n=\left\lfloor\left(\dfrac{4}{e}-3\right)/2\right\rfloor+1$, on est assuré de la précision voulue.

```python
def PI(e):
    n = int((4/e-3)/2)+1
    return 4*SATAN_1(1,n)
```

c) `PI(1e-8)` fournit `3.141 592 658 589 407` alors que `math.pi` donne `3.141 592 653 589 793`, soit une erreur de l'ordre de 5.10^{-9}.

3. *Optimisons le temps de calcul*

a)

```python
def SATAN_2(x,N):
    somme = 0
    signe = 1
    puissance = x
    facteur = x*x
    diviseur = 1
    for n in range(N+1):
        somme += signe*puissance/diviseur
        signe = -signe
        puissance *= facteur
        diviseur += 2
    return somme
```

b) Avec mon ordinateur, l'exécution de `PI(1e-6)` en utilisant `ATAN_1` prend $1,72$ seconde contre $0,34$ seconde avec `ATAN_2`.

4. *Une amélioration notable par une stratégie due à John Machin(1680-1752).*

a) En conséquence du théorème des séries alternées utilisé dans l'exercice 1, pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, $\mathrm{S}_n(x)$ est une valeur approchée de $\mathrm{Arctan}\,(x)$ avec une erreur inférieure à $\dfrac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$ car $|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

b) $\tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) = \dfrac{1/2+1/3}{1-(1/2)(1/3)} = \dfrac{5/6}{5/6} = 1.$

Comme $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{3}\right) \in [0\,;\,\pi/2]$, j'en déduis que $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \mathrm{Arctan}\,(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

c) $\pi = 4\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} + 4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}.$

d) Toujours en majorant fidèlement au théorème des séries alternées, en notant que sommer n premiers termes revient à prendre les sommes partielles d'ordre $n-1$, les erreurs commises en calculant les n premiers termes des sommes sont respectivement inférieures à $2 \times \dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{1}{9}\right)^n$).

e) Pour gagner une décimale, il faut diviser l'erreur par 10, or s termes supplémentaires divisent l'erreur par $\left(\dfrac{1}{4}\right)^s$
$\left(\dfrac{1}{4}\right)^s \simeq \dfrac{1}{10} \iff s \simeq \dfrac{\ln(4)}{\ln(10)} \simeq 0,60$ d'où l'estimation donnée.

f)

```python
n = int(8/0.6)+1
print(n)
deb = time()
a = 4*(SATAN_2(1/2,n)+SATAN_2(1/3,n))
print(a)
print(a-pi)
print(time()-deb)
```

fournit

```
14
3.141592653381539
-2.0825430269155731e-10
8.320808410644531e-05
```

donc en fait 9 décimales exactes en calculant exactement 30 termes ($2\times(14+1)$) en moins d'un dix-millième de seconde.

5. a) On raisonne comme en 4.b)

$\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{p}\right)-\text{Arctan}\left(\frac{1}{p+q}\right)\right)=\frac{1/p-1/(p+q)}{1+(1/p)(1/(p+q))}=\frac{q}{p(p+q)+1}\ldots$

b) • En prenant $p=q=1$, on retrouve la formule donnée en 3.b).

• En prenant $p=2$, $q=1$, on trouve $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)=\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right)$, qui injectée dans 3.b) donne

$$\frac{\pi}{4}=2\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right).$$

c) L'erreur est alors divisée au moins par 9 à chaque nouveau terme, or $\ln(9)/ln(10)\simeq 0,95$, donc en raisonnant comme dans la question précédente, il suffit d'environ $\frac{n}{0,95}$ termes pour calculer n décimales exactes.

6. a) $\tan\left(2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)=\frac{2/5}{1-1/5^2}=\frac{5}{12}$, puis $\tan\left(4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)=\frac{10/12}{1-5^2/12^2}=\frac{120}{119}$.

b) $\tan\left(4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{120/119-1}{1+120/119\times 1}=\frac{1}{239}$ d'où la formule de John Machin

$$\frac{\pi}{4}=4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

c) Avec $m=5$, l'erreur commise sur la première somme est inférieure à $\frac{16}{13\times 5^{13}}\simeq 10^{-9}$ et avec $n=1$, l'erreur commise sur la seconde somme est inférieure à $\frac{4}{5\times 239^5}\simeq 10^{-12}$.

Les erreurs cumulées sont nettement inférieures à 10^{-8} et on obtient 8 décimales exactes avec seulement 8 termes $((5+1)+(1+1))$.

d) Vérifions cela par un script en `Python` :

```python
a = 16*SATAN_2(1/5,5)-4*SATAN_2(1/239,1)
print(a,a-pi)
```

produit

```
3.14159265261633345 -9.734586470244722e-10
```

où on constate une erreur de l'ordre de 10^{-9}, donc 8 décimales exactes.

7. La relation ($\heartsuit$) avec $p=3$ et $q=2$ donne

$\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)=\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{2}{16}\right)$ qui injectée dans 3.b) donne bien

$$\frac{\pi}{4}=\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right).$$

Exercice 150

Euler à l'assaut de π

1. Soit $x\in\mathbb{R}$.

a) À l'aide du changement de variable $t=x\sqrt{1-s}$ dans l'identité $\text{Arctan}\,(x))=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, établir que

$$\text{Arctan}\,(x)=\frac{x}{1+x^2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}s}{2\sqrt{1-s}\left(1-\frac{x^2}{1+x^2}s\right)}.$$

b) On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\int_0^1\frac{s^n}{2\sqrt{1-s}}\mathrm{d}s$.

On admet que, l'intégrale de Wallis $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}(\theta)\mathrm{d}\theta$ vaut, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Déterminer la valeur de a_n.

c) En déduire la formule d'Euler (1755)

$$\text{Arctan}\,(x) = \frac{x}{1+x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n.$$

d) En déduire

$$\pi = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

e) Programmer une fonction `EATAN(x,N)` calculant la somme partielle d'ordre N du développement de $\text{Arctan}\,(x)$ par la formule d'Euler et vérifier que la somme partielle de d'ordre 26 de la série ci-dessus fournit les 8 premières décimales de π.

2. a) À l'aide des formules établies dans l'exercice précédent, montrer successivement

$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right),$$
$$\text{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right).$$

b) Montrer finalement la formule toujours due à Euler

$$\frac{\pi}{4} = 5\text{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + 2\text{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right).$$

c) Justifier alors le développement

$$\frac{\pi}{4} = \frac{7}{10}\left(1+\frac{2}{3}.\frac{2}{100}+\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{2^2}{100^2}+\dots\right)$$
$$+\frac{7\,584}{10^5}\left(1+\frac{2}{3}.\frac{144}{10^5}+\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{144^2}{10^{10}}+\dots\right)$$

d) *À l'aide de ce développement, Euler a calculé en une heure à la main 20 décimales de π.*
En quoi les choix faits par Euler sont-ils pratiques pour déterminer les décimales de π ?

e) Vérifier qu'en prenant les 5 premiers termes de la première série et les 3 premiers de la seconde, on obtient déjà les 8 premières décimales de π.

Solution (**Ex.150** – *Euler à l'assaut de π*)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Le changement est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $s = 1$ pour $t = 0$, et $s = 0$ pour $t = x$, et $\dfrac{\mathrm{d}(x\sqrt{1-s})}{\mathrm{d}s} = \dfrac{-x}{2\sqrt{1-s}}$,

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+x^2(1-s)} \quad\text{or}\quad \frac{1}{\left(1-\dfrac{x^2}{1+x^2}s\right)} = \frac{1+x^2}{1+x^2(1-s)},$$

Donc on a bien

$$\text{Arctan}\,(x) = \frac{x}{1+x^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{2\sqrt{1-s}\left(1-\dfrac{x^2}{1+x^2}s\right)}.$$

b) Posons $s = \sin^2(\theta)$, changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissant donc bijectif sur $]\,0\,;\ \pi/2[$.
$\mathrm{d}s = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ et $\sqrt{1-s} = \cos(\theta)$.

Alors $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\frac{\sin^{2n}(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)}{2\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

c) Comme $\left|\dfrac{x^2}{1+x^2}s\right| < 1$, $\dfrac{1}{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}s} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n s^n$

Donc $\text{Arctan}\,(x) = \dfrac{x}{1+x^2}\displaystyle\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{s^n}{2\sqrt{1-s}}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n \mathrm{d}s.$

La question est de savoir si on peut permuter $\sum$ et $\int$.

Soit pour tout n de $\mathbb{N}$,
$$\mathrm{I}_n \overset{df.}{=} \int_0^1 \left| \frac{s^n}{2\sqrt{1-s}} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n \right| \mathrm{d}s = a_n \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n.$$
$$\frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) < 1$$
Par le critère de D'Alembert, la série de terme général I_n converge.
La permutation est donc licite et
$$\operatorname{Arctan}(x) = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{s^n}{2\sqrt{1-s}} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n \mathrm{d}s,$$
ce qui s'écrit aussi par linéarité de l'intégrale
$$\operatorname{Arctan}(x) = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n.$$
D'où la formule d'Euler
$$\operatorname{Arctan}(x) = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n.$$

d) En $x=1$, la formule d'Euler donne
$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$
Il n'y a plus qu'à multiplié par 4...

e)
```python
def EATAN(x,N):
    somme = 1
    terme = 1
    raison = x**2/(1+x**2)
    for n in range(1,N+1):
        terme *= 4*n**2*raison/(2*n+1)/2/n
        somme += terme
    return somme*x/(1+x**2)
```
produit
```
In[1] : abs(4*EATAN(1,26)-pi)
Out[1]: 4.929842312151322e-09
```

2. a) • On a prouvé dans l'exercice précédent (♡) :
$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{p}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{p+q}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{q}{p^2+pq+1}\right)$$
Avec $p=3$ et $q=4$, on a $p^2+pq+1=22$, donc
$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right),$$
• Calculons la tangente du second membre :
$\dfrac{1/7+3/79}{1-(1/7)(3/79)} = \dfrac{100/553}{550/553} = \dfrac{100}{550} = \dfrac{2}{11}$. Donc
$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right),$$

b) D'après l'exercice précédent, et grâce aux formules ci-dessus
$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) = 3\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{11}\right)$$
$$\frac{\pi}{4} = 5\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right).$$

c) • En prenant $x = \dfrac{1}{7}$, $\dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{7}{50}$, et $\dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{1}{50} = \dfrac{2}{100}$, donc par le développement de Arctan par la formule d'Euler
$$5\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{7}{10}\left(1 + \frac{2}{3}.\frac{2}{100} + \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{2^2}{100^2} + \dots\right)$$
• En prenant $x = \dfrac{3}{79}$, $\dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{237}{6250} = \dfrac{3792}{10^5}$, et $\dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{9}{6250} = \dfrac{144}{10^5}$, donc par le développement de Arctan par la formule d'Euler

$$2\text{Arctan}\left(\frac{3}{79}\right) = \frac{7\,584}{10^5}\left(1 + \frac{2}{3}.\frac{144}{10^5} + \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{144^2}{10^{10}} + \dots\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \frac{7}{10}\left(1 + \frac{2}{3}.\frac{2}{100} + \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{2^2}{100^2} + \dots\right)\\ &\quad + \frac{7\,584}{10^5}\left(1 + \frac{2}{3}.\frac{144}{10^5} + \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{144^2}{10^{10}} + \dots\right)\end{aligned}$$

d) Ce choix fait apparaître des puissances de 10 plutôt pratiques pour déterminer les décimales.

e) Avec

```
def EULER(m, n ):
    return 4*(5*EATAN(1/7 ,m)+2*EATAN(3/79 , n ) )
```

j'obtiens

```
In [3]: abs(EULER(4,2)-pi)
Out[3]: 3.78679088086642e-09
```

les 5 premiers termes nécessitant le calcul des la somme partielle d'ordre 4 (et idem pour la seconde somme).

Chapitre 44

Droites et sous-espaces stables par un endomorphisme

[CS-M1 – 2015 – PC –]

Exercice 151

Sous-espaces stables

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
Justifier les propriétés suivantes.

1. Le sous-espace $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est stable par f si, et seulement si,
$$\forall i \in [\![1\,;\ p]\!]\,, f(u_i) \in \mathrm{F}.$$
Autrement dit, si et seulement si, la famille génératrice est stable par f.

2. *Corollaire 1 –*
Si $u_1, \ldots, u_p$ sont p vecteurs propres de f, alors $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est stable par f.

3. *Corollaire 2 –*
Les sous-espaces propres de f sont stables par f ainsi que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.

Solution (**Ex.151 –** *Sous-espaces stables*)
L'implication est immédiate.
La réciproque est une conséquence de la linéarité de f.
Soit $x \in \mathrm{F}$. Alors x s'écrit $x = x_1 u_1 + \cdots + x_p u_p$.
Ainsi : $f(x) \overset{\text{lin.}}{=} x_1 \underbrace{f(u_1)}_{\in \mathrm{F}} + \cdots + x_p \underbrace{f(u_p)}_{\in \mathrm{F}} \in \mathrm{F}$

Exercice 152

Droites stables

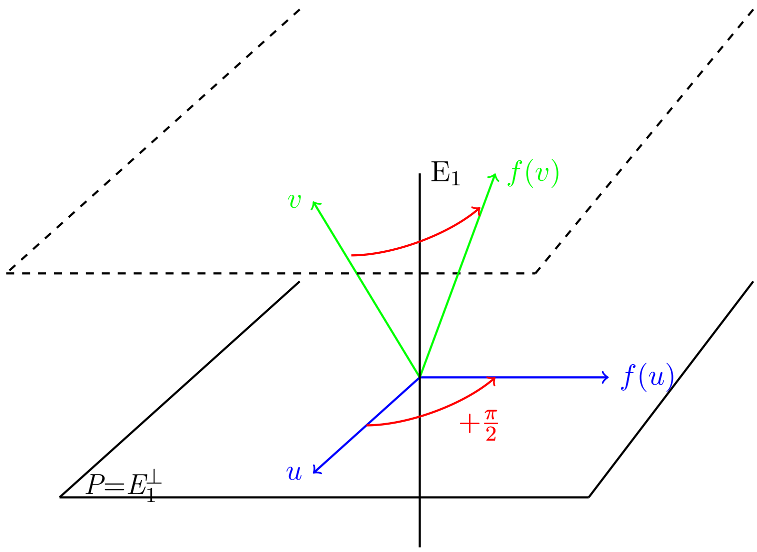
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Soit Δ une droite engendrée par un vecteur u. Démontrer l'équivalence :

$\Delta = \mathrm{Vect}(u)$ est stable par f si, et seulement si,
u est un vecteur propre de f.

Solution (**Ex.152 –** *Droites stables*) Si $\Delta = \mathrm{Vect}(u)$ est stable, alors $f(u) \in \Delta = \mathrm{Vect}(u)$, donc $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ f(u) = \lambda u$.
Si u est un vecteur propre tel que $f(u) = \lambda u$, alors $\Delta = \mathrm{Vect}(u)$ est stable car $f(u) \in \Delta$.
☞*Si un sous-espace est stable, alors...*
... il est engendré par des vecteurs propres ? **NON**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

M est diagonale par blocs et $\Delta = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $\mathrm{P} = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ sont stables par f.
$\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2+1)$ donc 1 est l'unique valeur propre de f et $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$: il n'y a aucun vecteur propre dans P !
D'où vient l'exemple ? En fait, la restriction de f à P est une rotation d'angle $\pi/2$ caractérisée par le bloc $\mathrm{R}_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Or une rotation d'angle $\theta \not\equiv 0[\pi]$ n'a pas de vecteur propre dans $\mathbb{R}$.



Chapitre 45

Éléments de topologie algébrique

[E3A-M1 – 2018 – PSI – Exo 3]

Si l'analyse nous a familiarisé avec les notions d'ouverts, de fermés, de fermés-bornés (alias « compacts ») et quelques unes de leurs propriétés, voyons ici quelques aspects topologiques en algèbre.

Exercice 153

Sous-espaces vectoriels en dimension finie

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel est une partie fermée de E.

2. Quelle est la nature (ouverte ou fermée) des parties suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (symétriques), $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ (antisymétriques) et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ (diagonales) ?

3. Vrai ou faux ? En dimension finie, tout noyau et toute image d'une application linéaire est une partie fermée.

Solution (**Ex.153 –** *Sous-espaces vectoriels en dimension finie*)

2. et **3.** sont des conséquences directes de **1.**.

1. *Il s'agit de montrer que toute suite convergente $(u_k)_{k\geqslant 0}$ de vecteurs de* F *a sa limite dans* F.

Soit $n = \dim(\mathrm{E})$. Soit F un sous-espace vectoriel et $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Je complète $(f_1, \ldots, f_p)$ en une base $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E.

Soit $(u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de vecteurs de F convergente, de limite $\ell \in \mathrm{E}$.

Je décompose chaque u_k dans la base $\mathcal{C}$ de E :

$$u_k = x_1^{(k)} f_1 + x_2^{(k)} f_2 + \cdots + x_n^{(k)} f_n.$$

i.e. $x_j^{(k)} f_j$ est la $j-$ème coordonnée de u_k dans $\mathcal{C}$.

Comme $u_k \in \mathrm{F}$, u_k ne s'exprime qu'avec les p premiers vecteurs de la base (ceux qui engendrent F), donc :

$$\forall j \in [\![p+1\,;\ n]\!], \quad x_j^{(k)} = 0$$

Donc : $x_j^{(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

Or par convergence par coordonnées :

$$\ell = \lim_{k\to+\infty} x_1^{(k)} f_1 + \lim_{k\to+\infty} x_2^{(k)} f_2 + \cdots + \lim_{k\to+\infty} x_n^{(k)} f_n.$$

$$\ell = \lim_{k\to+\infty} x_1^{(k)} f_1 + \lim_{k\to+\infty} x_2^{(k)} f_2 + \cdots + \lim_{k\to+\infty} x_p^{(k)} f_p + 0 f_{p+1} + \cdots + 0 f_n.$$

Donc : $\ell \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{F}$, $\mathcal{C}$*qfd*.

Exercice 154

Sous-ensembles remarquables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tandis que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ une partie fermée.

Conséquence : toute suite convergente de matrices non inversibles a une limite non inversible...

2. a) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose, pour tout k de $\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{M}_k = \mathrm{M} + \frac{1}{k}\mathrm{I}_k.$$

Justifier qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall k \geqslant k_0, \quad \mathrm{M}_k \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

b) En déduire que : $\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Conséquence : toute matrice est la limite d'une suite convergente de matrices inversibles. On dit que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est **dense** *dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: les matrices inversibles sont suffisamment densément réparties partout dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour que toute matrice, même non inversible, ne soit jamais isolée, loin des matrices inversibles.*

3. Redémontrons cette propriété par une autre méthode.
La méthode du pivot de Gauss qui consiste à ramener une matrice M de rang r à la réduite

$$\mathrm{J}_r = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r} \end{array}\right)$$

se formalise par l'existence de deux matrices inversibles P et Q telles que

$$\mathrm{M} = \mathrm{P}\mathrm{J}_r\mathrm{Q}.$$

En utilisant les matrices $\mathrm{J}_{r,k} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{k}\mathrm{I}_{n-r} \end{array}\right)$, retrouver $\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ sont des parties fermées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution (**Ex.154 –** *Sous-ensembles remarquables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*)
Je rappelle que $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ est continu, car $\det(\mathrm{M})$ est un polynôme (produits et sommes) des coefficients de M. *C'est un polynôme de n^2 variables, donc continue. L'addition (linéaire) et la multiplication matricielles (bilinéaire = distributif) matricielles, ainsi que la transposition (linéaire) sont aussi continues.*
Je rappelle aussi qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (si une suite converge pour une norme, elle converge alors vers la même limite pour toute autre norme) et sont continues.

1. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \det(\mathrm{M}) \neq 0\}$ et $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une fonction continue, donc $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \backslash \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \det(\mathrm{M}) = 0\}$ et $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une fonction continue, donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \backslash \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie fermée.

2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est à la fois ouvert et fermé, tout comme $\emptyset$. Ce sont les seuls à partager cette propriété un peu étrange...
Ainsi $\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})}$ qui est le plus petit fermé contenant $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La difficulté est l'inclusion réciproque : il faut montrer que toute matrice de mnkn est dans $\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})}$, i.e. est la limite d'une suite de matrices inversibles.
Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Je vais construire une suite de matrices inversibles très simples qui tend vers M : je pose

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{M}_k \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{M} + \frac{1}{k}\mathrm{I}_n.$$

• On a clairement $\mathrm{M}_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{M}$.
• Les M_k sont-elles inversibles ?
$\det(\mathrm{M}_k) = \det\left(\frac{1}{k}\mathrm{I}_n - (-\mathrm{M})\right) = \chi_{-\mathrm{M}}(\frac{1}{k})$, donc

$$\mathrm{M}_k \text{ n'est pas inversible si, et seulement si, } \frac{1}{k} \text{ est valeur propre de } -\mathrm{M}.$$

(i) Si $-\mathrm{M}$ n'a pas de valeur propre réelle strictement positive, alors

$$\forall k \geqslant 1, \det(\mathrm{M}_k) \neq 0$$

car $1/k > 0$ n'est pas valeur propre de $-\mathrm{M}$.
On posera $k_0 = 1$ pour la suite du raisonnement.
(ii) Si $-\mathrm{M}$ possède au moins valeur propre réelle strictement positive, alors comme elle n'a qu'un nombre fini de valeurs propres (au maximum n), soit λ la plus petite d'entre elles :

$$\lambda = \min\big(\,]\,0\,;\ +\infty[\,\cap \mathrm{Sp}(-\mathrm{M})\big).$$

Comme $\dfrac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et $\lambda > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}^*, \forall k \geqslant k_0, \dfrac{1}{k} < \lambda$ (*définition de la limite avec* $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{2}$ *par exemple*).

Alors $\forall k \geqslant k_0,\quad \dfrac{1}{k} \notin \mathrm{Sp}(-\mathrm{M})$ et M_k est inversible.

Bilan : $\begin{cases} \forall k \geqslant k_0, \quad \mathrm{M}_k \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \qquad \mathrm{M}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{M} \end{cases}$

3. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $r = \mathrm{rg}(\mathrm{M})$. Il existe P et Q inversibles telles que $\mathrm{M} = \mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}$. Alors pour tout k de $\mathbb{N}^*$ la matrice $\mathrm{M}_k = \mathrm{PJ}_{r,k}\mathrm{Q}$ est inversible comme produit de matrices inversibles et par continuité du produit matriciel : $\mathrm{M}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{M}$. *cqfd*

4. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n\}$.
Soit $||.||$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (par exemple $||\mathrm{M}|| = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\right)$), la norme canonique). Soit

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \mathrm{M} \mapsto \left|\left|\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M} - \mathrm{I}_n\right|\right|.$$

f est continue et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(\mathrm{M}) = 0\}$ donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé.
$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(\mathrm{M}) = 1\}$ est une intersection de deux fermés (car $\mathrm{M} \mapsto \det(\mathrm{M}) - 1$ est continue), donc $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Exercice 155

Et l'ensemble des matrices diagonalisables ?

Montrer que l'ensemble des matrices $\mathcal{D}$ diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$ n'est ni fermé, ni ouvert.
Et si on travaille dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$?

Solution (**Ex.155 –** *Et l'ensemble des matrices diagonalisables ?*)

① $\mathrm{A}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

A_k est diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ car $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_k) = \{0, 1/k\}$ (deux valeurs propres distinctes en dimension 2).
L n'est pas diagonalisable puisque $\mathrm{Sp}(\mathrm{L}) = \{0\}$ et $\mathrm{L} \neq 0.\mathrm{I}_2$.
Donc $\mathcal{D}$ n'est pas fermé.

② $\mathrm{B}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1/k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

B_k n'est pas diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ car $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}_k) = \{0\}$ et $\mathrm{B}_k \neq 0$.
M est diagonalisable car... diagonale !
Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{D}$ n'est pas fermé, donc $\mathcal{D}$ n'est pas ouvert.
③ Pour $n = 1$, toute matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est diagonalisable donc $\mathcal{D} = \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est ouvert et fermé, car c'est l'espace tout entier.

Exercice 156

Polynôme caractéristique de AB et de BA

Une application courante de la densité est de pouvoir prolonger une propriété vraie pour des éléments d'une partie dense d'un ensemble à tout élément de l'ensemble.
Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nous allons justifier que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

1. Montrer que si A est inversible alors AB et BA sont semblables, et conclure.
La propriété est donc vraie lorsque A *est inversible.*

2. On ne suppose plus A inversible mais on sait par l'exercice *Sous-ensembles remarquables de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'il existe une suite de matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ (A_k) convergente de limite A.
Montrer en utilisant une telle suite que $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$.

3. *Pour la culture,* on rencontre souvent la démonstration suivante de cette propriété.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $\mathrm{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \lambda \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathrm{B} & -\lambda \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & \mathrm{A} \end{pmatrix}$.
En exploitant $\det(\mathrm{M}(\lambda)\mathrm{N}(\lambda)) = \det(\mathrm{N}(\lambda)\mathrm{M}(\lambda))$, montrer que $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$.

4. *Question subsidiaire* – Est-il vrai que AB et BA sont toujours semblables ?

Solution (**Ex.156** – *Polynôme caractéristique de AB et de BA*)

1. $\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{AB})\mathrm{A} = \mathrm{BA}$... et deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

2. On ne suppose plus A inversible mais on sait par l'exercice *Sous-ensembles remarquables de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'il existe une suite de matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ (A_n) convergente de limite A.
Montrer en utilisant une telle suite que $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$.
Soit (A_k) une suite de matrices inversible convergente, de limite A.
On a :
• $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\chi_{\mathrm{A}_k\mathrm{B}} = \chi_{\mathrm{BA}_k}$ par 1. ;
• $\mathrm{A}_k\mathrm{B} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{AB}$ donc $\chi_{\mathrm{A}_k\mathrm{B}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \chi_{\mathrm{AB}}$ par continuité de $\chi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}_n[\mathrm{X}], \mathrm{M} \longmapsto \chi_{\mathrm{M}}$ (continuité du déterminant) ;
• $\mathrm{BA}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{BA}$ donc $\chi_{\mathrm{BA}_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \chi_{\mathrm{BA}}$;
• donc $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$ par unicité de la limite.

3. En développant les produits, on trouve :
$\det(\mathrm{M}(\lambda)\mathrm{N}(\lambda)) = (-\lambda)^n \chi_{\mathrm{AB}}(\lambda)$,
$\det(\mathrm{N}(\lambda)\mathrm{M}(\lambda)) = (-\lambda)^n \chi_{\mathrm{BA}}(\lambda)$.
Donc les fonctions polynomiales $\widetilde{\chi_{\mathrm{AB}}}$ et $\widetilde{\chi_{\mathrm{BA}}}$ coïncident en tout λ non nul donc les polynomes χ_{AB} et χ_{BA} sont égaux.

4. FAUX ! $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, or deux matrices semblables ont le même rang.

Exercice 157

Bases de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formées de matrices de rang fixé

1. Justifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède une base formée de matrice de rang 1.

2. Montrons par un argument de densité que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède une base formée de matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, i.e. toutes de rang n.
a) Justifier que $\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})} \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$.
b) En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède une base formée de matrices inversibles.

3. Montrons qu'en fait, pour tout $r \in [[1 ; n]]$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base formée uniquement de matrices de rang r.
Soit $r \in [[1 ; n]]$.
a) Montrer, en utilisant la méthode du pivot, que toute matrice de rang 1 peut s'écrire comme somme de deux matrices de rang r.
b) Conclure.

4. Soyons constructifs. On pose, pour tout $(i, j) \in [[1 ; n]]^2$,

$$\mathrm{F}_{i,j} = \mathrm{E}_{i,j} + \mathrm{I}_n.$$

Montrer que la famille $(\mathrm{F}_{i,j})_{(i,j)\in[[1 ; n]]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles.

Solution (**Ex.157** – *Bases de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formées de matrices de rang fixé*)

1. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une base formée de matrice de rang 1.

2. a) Montrons par un argument de densité que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède une base formée de matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, i.e. toutes de rang n.
$\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})}$ est le plus petit fermé contenant $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Vect}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$ est un fermé (comme tout sous-espace en dimension finie, voir l'exercice *Sous-espaces vectoriels en dimension finie*). Donc $\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})} \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$.

b) Or $\overline{\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{Vect}\,(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$. Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))$, et on peut extraire de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Soit $r \in [\![1\,;\,n]\!]$.

a) Soit M de rang 1 : il existe P et Q inversibles telles que $\mathrm{M} = \mathrm{PJ_1Q}$.
Alors $\mathrm{M} = \mathrm{P}\big((\mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_r) - \mathrm{J}_r\big)\mathrm{Q} = \mathrm{P}\big(\mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_r\big)\mathrm{Q} + \mathrm{P}(-\mathrm{J}_r)\mathrm{Q}$ est bien la somme de deux matrices de rang r.

b) L'ensemble des matrices de rang r engendre l'ensemble des matrices de rang 1 qui lui-même engendre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc l'ensemble des matrices de rang r engendre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut extraire de cet ensemble une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Soyons constructifs. On pose, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$,

$$\mathrm{F}_{i,j} = \mathrm{E}_{i,j} + \mathrm{I}_n.$$

Montrer que la famille $(\mathrm{F}_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles.

- On a pour tout i $\det(\mathrm{F}_{i,i}) = 2 \neq 0$, et pour tout $i \neq j$ $\det(\mathrm{F}_{i,j}) = 1 \neq 0$. Les matrices $\mathrm{F}_{i,j}$ sont toutes inversibles.
- Supposons $\displaystyle\sum_{i,j} \alpha_{i,j}\mathrm{F}_{i,j} = 0_n$.

Pour $i \neq j$, le coefficient à la place (i,j) du premier membre est $\alpha_{i,j}$ donc $\alpha_{i,j} = 0$.

Pour $i = j$, le coefficient à la place (i,i) du premier membre est $\alpha_{i,i} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,k}$ donc les $\alpha_{i,i}$ sont tous égaux à $-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,k} = -\sigma$ en notant σ leur somme. Alors $\alpha_{i,i} = \dfrac{\sigma}{n}$ et $\sigma\left(\dfrac{1}{n} + 1\right) = 0$, ce qui n'est possible que si $\sigma = 0$, donc $\alpha_{i,i} = 0$ pour tout i.

- La famille $(\mathrm{F}_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles.

Exercice 158

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact

Démontrer que toute fonction continue définie sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée.

Solution (**Ex.158** – *$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact*)
Il suffit pour cela que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ soit une partie compacte, c'est-à-dire fermée et bornée de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne $||.|| : \mathrm{M} \longmapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M^TM})}$.

- $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathrm{M^TM} = \mathrm{I}_n \Longrightarrow ||\mathrm{M}|| = \sqrt{n}$ donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée.
- L'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M^TM}$ est continue par continuité de la transposition (linéaire) et du produit matriciel. Alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / f(\mathrm{M}) = \mathrm{I}_n\}$ est une partie fermée comme image réciproque par f de la partie fermée $\{\mathrm{I}_n\}$.

Chapitre 46

Utilisation des polynômes annulateurs

Définitions –
• Polynôme annulateur d'une matrice carrée

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est annulateur de M si

$$P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k = 0_n, \quad \text{matrice nulle.}$$

• Polynôme annulateur d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On dit que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est annulateur de f si

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = 0_n, \quad \text{endomorphisme nul.}$$

• Le terme « *racine* » est réservé aux **scalaires** de $\mathbb{K}$. Ainsi on ne dit pas que M ou f sont des racines de P.

Exemple –

Exercice 159

Exploitation d'un polynôme annulateur

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme annulateur d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si le terme constant a_0 de P est non nul, alors M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{-1}{a_0}\Big(\sum_{k=1}^{d} a_k M^{k-1}\Big)$$

2. a) Montrer que si λ est une valeur propre de M alors $P(\lambda) = 0$.
Autrement dit, les valeurs propres sont parmi les racines de P.

b) ☞ **Réciproque fausse !!!**
Vérifier que $P = X^2 - X$ est annulateur de I_2. Ces racines sont-elles toutes des valeurs propres de I_2 ?

3. Par division euclidienne, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\exists!(Q_m, R_m) \in \mathbb{K}_n[X]^2 \text{ avec } \deg(R_m) < \deg(P),\ X^m = PQ_m + R_m.$$

Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad M^m = R_m(M).$$

Autrement dit chaque puissance $m-$ème de M est un polynôme de degré au plus $d-1$ de M.

4. *Application* – Vérifier que $P = X^3 - 3X - 2$ est un polynôme annulateur de $M = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 2 \\ 7 & -6 & 1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Exploiter les propriétés précédentes pour calculer l'inverse, les valeurs propres et les puissances de M.

Solution (**Ex.159 –** *Exploitation d'un polynôme annulateur*)

1. $\mathrm{M} \times \left[\dfrac{-1}{a_0}\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k \mathrm{M}^{k-1}\Big)\right] = \dfrac{-1}{a_0}\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k \mathrm{M}^{k}\Big) = \dfrac{-1}{a_0}\big(\mathrm{P(M)} - a_0 \mathrm{I}_n\big)$,

or $\mathrm{P(M)} = 0$ donc $\mathrm{M} \times \left[\dfrac{-1}{a_0}\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k \mathrm{M}^{k-1}\Big)\right] = \mathrm{I}_n$, *Cqfd.*

2. a) En fait, tout provient de

$$\mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U} \implies \mathrm{M}^k\mathrm{U} = \lambda^k \mathrm{U}$$

par récurrence immédiate.

Et tout aussi immédiatement

$$\mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U} \implies \mathrm{P(M)U} = \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{U} \qquad (\heartsuit).$$

Du coup, si de plus $\mathrm{P(M)} = 0$ *et* $\mathrm{U} \neq 0$, *alors* $\mathrm{P}(\lambda) = 0$.

Détail de $(\heartsuit)$:

$$\mathrm{P(M)U} = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{M}^k\right)\mathrm{U} = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{M}^k\mathrm{U} = \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k \mathrm{U} = \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{U}.$$

b) $\mathrm{I}_2^2 - \mathrm{I}_2 = 0$ donc $\mathrm{P}(\mathrm{I}_2) = 0_2$: P est un polynôme annulateur de I_2.

Cependant, 0 est une racine de P mais n'est pas valeur propre de I_2 puisque $\mathrm{Sp}(\mathrm{I}_2) = \{1\}$.

3. $\forall m \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{M}^m = \mathrm{P(M)Q}_m(\mathrm{M}) + \mathrm{R}_m(\mathrm{M}) = 0 \times \mathrm{Q}_m(\mathrm{M}) + \mathrm{R}_m(\mathrm{M}) = \mathrm{R}_m(\mathrm{M})$.

4. • On vérifie que $\mathrm{P(M)} = 0_3$:

$$\begin{pmatrix} 23 & -21 & 6 \\ 21 & -16 & 3 \\ 18 & -9 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 7 & -7 & 2 \\ 7 & -6 & 1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3$$

• $\mathrm{M}^3 - 3\mathrm{M} - 2\mathrm{I}_3 = 0 \implies \mathrm{M}(\mathrm{M}^2 - 3\mathrm{I}_3) = 2\mathrm{I}_3 \implies \mathrm{M} \times \left[\dfrac{1}{2}(\mathrm{M}^2 - 3\mathrm{I}_3)\right] = \mathrm{I}_3$, donc $\mathrm{M}^{-1} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M}^2 - \mathrm{I}_3)$

• Et comme $\mathrm{P(X)} = (\mathrm{X}+1)^2(\mathrm{X}-2)$, $\mathrm{Sp(M)} \subset \{-1, 2\}$.

$\mathrm{rg}(\mathrm{M} + \mathrm{I}_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 8 & -7 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2$ $(\mathrm{C}_1 + 2\mathrm{C}_2 + 3\mathrm{C}_3 = 0)$, donc $-1 \in \mathrm{Sp(M)}$.

$\mathrm{rg}(\mathrm{M} - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 \\ 7 & -8 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = 2$ $(\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 = 0)$, donc $2 \in \mathrm{Sp(M)}$.

Ainsi $\mathrm{Sp(M)} = \{-1, 2\}$. Cependant M n'est pas diagonalisable car $\dim(\mathrm{E}_{-1}) = 1 < 2 = \omega(-1)$.

•*Comment trouver le reste de la division de* X^m *par P ? Tout est là.*

Sur l'exemple, voyons ce que ça donne.

$\mathrm{X}^m = \mathrm{P(X)Q}_m(\mathrm{X}) + \mathrm{R}_m(\mathrm{X})$ avec $\deg(\mathrm{R}_m) < 3$.

Soit $\mathrm{R}_m(\mathrm{X}) = a_m\mathrm{X}^2 + b_m\mathrm{X} + c_m$. Exploitons les racines -1 et 2 de P.

$$\mathrm{X}^m = \mathrm{P(X)Q}_m(\mathrm{X}) + a_m\mathrm{X}^2 + b_m\mathrm{X} + c_m \quad (\heartsuit).$$

$(\heartsuit)$ en $\mathrm{X} = -1$ donne $(-1)^m = a_m - b_m + c_m$.

$(\heartsuit)$ en $\mathrm{X} = 2$ donne $2^m = 4a_m + 2b_m + c_m$.

Il nous faudrait une troisième relation. Exploitons le fait que -1 est racine double, donc annule P et P′. Je dérive $(\heartsuit)$.

$$m\mathrm{X}^{m-1} = \mathrm{P}'(\mathrm{X})\mathrm{Q}_m(\mathrm{X}) + \mathrm{P(X)Q}'_m(\mathrm{X}) + 2a_m\mathrm{X} + b_m \quad (\heartsuit').$$

$(\heartsuit')$ en $\mathrm{X} = -1$ donne $m(-1)^{m-1} = -2a_m + b_m$.

(a_m, b_m, c_m) est solution de $\begin{cases} a_m - b_m + c_m & = & (-1)^m \\ 4a_m + 2b_m + c_m & = & 2^m \\ -2a_m + b_m & = & m(-1)^{m-1} \end{cases}$

Après un peu de sueur :

$$\begin{cases} a_m = \frac{1}{9}\left((3m-1)(-1)^m + 2^m\right) \\ b_m = \frac{1}{9}\left((3m+2)(-1)^{m+1} + 2^{m+1}\right) \\ c_m = \frac{1}{9}\left((8-6m)(-1)^m + 2^m\right) \end{cases} \quad \text{et } \mathrm{M}^m = a_m\mathrm{M}^2 + b_m\mathrm{M} + c_m\mathrm{I}_2.$$

Exercice 160

Polynôme minimal et crochets de Lie

1. *Polynôme minimal*

Soit $n \geq 2$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Justifier que la famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^{n^2})$ est liée.

b) En déduire l'existence d'un polynôme P non nul tel que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$.

Donc toute matrice possède au moins un polynôme annulateur non nul.

c) Soit $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N} / \exists \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$et $\deg(\mathrm{P}) = n\}$. Justifier qu'il existe $d \overset{df.}{=} \min(\mathcal{D})$, et qu'il existe un polynôme μ_A unitaire de degré d tel que $\mu_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = 0$.

d) Montrer que, si P est un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ annulateur de A, alors il existe Q dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\mu_\mathrm{A}$.

e) Montrer que μ_A, défini en 1.c), est unique.

f) En déduire que l'ensemble $\mathcal{Z}(\mathrm{A})$ des polynômes annulateurs de A est :

$$\mathcal{Z}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{Q}\mu_\mathrm{A}, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}.$$

Ce polynôme est qualifié de « polynôme minimal de A ».

2. *Un polynôme divisible par son dérivé*

Soit P un polynôme unitaire (donc non nul) de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$\mathrm{XP}' = \alpha\mathrm{P}.$$

a) Montrer que $\alpha = \deg \mathrm{P}$.

b) On suppose que P' possède une racine β non nulle d'ordre de multiplicité μ.

i – Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine β de XP' ?

ii – Justifier que β est racine de P. Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine β de P ?

iii – En déduire que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^\alpha$.

3. *Application à une équation matricielle*

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{A}.$$

a) Que peut-on dire de $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$?

b) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}^k\mathrm{B} - \mathrm{BA}^k = k\mathrm{A}^k.$$

c) Justifier que, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{B} - \mathrm{BP}(\mathrm{A}) = \mathrm{AP}'(\mathrm{A}).$$

d) En déduire que $\mu_\mathrm{A} = \mathrm{X}^d$. Que peut-on dire de A ?

e) Donner un exemple de deux matrices non nulles A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ vérifiant $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{A}$.

Solution (**Ex.160 –** *Polynôme minimal et crochets de Lie*)

1. *Polynôme minimal*

a) La famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^{n^2})$ est liée car elle compte $n^2 + 1$ vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n^2.

b) Par conséquent, il existe $n^2 + 1$ coefficients $(a_k)_{0 \leq a_k \leq n^2}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k\mathrm{A}^k = 0$. Avec $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k\mathrm{X}^k$, on a $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$.

c) $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N}, \exists \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] / \mathrm{P}(\mathrm{A})$et $\deg(\mathrm{P}) = n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle admet un plus petit élément $d \overset{df.}{=} \min(\mathcal{D})$.

Il existe donc (au moins) un polynôme Π de degré d tel que $\Pi(\mathrm{A}) = 0$. Soit a_d le coefficient dominant de Π. Alors $\mu_\mathrm{A} \overset{df.}{=} \dfrac{1}{a_d}\Pi$ convient.

d) Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de A. Effectuons la division euclidienne de P par μ_A : $P = Q\mu_A + R$ avec $\deg(R) < d$.
Alors $R(A) = P(A) - Q(A)\mu_A(A) = 0$. Donc R est un polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à d. Par définition de d, $R = 0$. Donc il existe bien Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q\mu_A$.

e) Réciproquement, si $P = Q\mu_A$, alors $P(A) = 0$.
On en déduit bien que : $\mathcal{Z}(A) = \{Q\mu_A, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

2. *Un polynôme divisible par son dérivé*
Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ tel qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$XP' = \alpha P.$$

a) Soit d le degré de P. Le coefficient dominant de XP' est d et celui de αP est α donc $\alpha = d = \deg(P)$.

b) On suppose que P' possède une racine β non nulle d'ordre de multiplicité μ.

i – L'ordre de multiplicité de la racine β de XP' est encore μ (β n'étant pas racine de X).

ii – $P(\beta) = \beta P'(\beta) = 0$: β est racine de P. L'ordre de multiplicité de la racine β de P est :
- $\mu + 1$ par la propriété liant multiplicité et dérivation,
- μ par l'égalité $P = XP'$ ...

d'où PROBLÈME!!!
Donc P' ne possède par de racine non nulle.

iii – L'unique racine de P' est 0, et de multiplicité $d - 1 = \alpha - 1$. Donc $P' = \alpha X^{\alpha-1}$. Donc $P = X^\alpha + c$. Or $P(0) = 0P'(0) = 0$. Donc $c = 0$ et $P = X^\alpha$.

3. *Application à une équation matricielle*
Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$AB - BA = A.$$

a) $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(AB) - \mathrm{Tr}\,(BA) = 0$.

b) La propriété est vraie au rang $k = 0$ (et $k = 1$).
Supposons-la vraie à un rang k quelconque. Alors :
$A^{k+1}B - BA^{k+1} = AA^kB - ABA^k + ABA^k - BAA^k = A(A^kB - BA^k) + (AB - BA)A^k = AkA^k + AA^k = (k+1)A^{k+1}$.
Par récurrence, la propriété est vraie pour tout k de $\mathbb{N}$.

c) Soit $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
$P(A)B - BP(A) = \sum_{k\geq 0} a_k A^k B - B \sum_{k\geq 0} a_k A^k = \sum_{k\geq 0} a_k (A^kB - BA^k) = \sum_{k\geq 0} k a_k A^k = A \sum_{k\geq 1} k a_k A^{k-1} = AP'(A)$.

d) Appliquons c) à μ_A : $0 = A\mu'_A(A)$. Donc $X\mu'_A \in \mathcal{Z}(A)$. Donc : $\exists Q \in \mathbb{K}[X], X\mu'_A = Q\mu_A$. En raison des degrés, Q est un polynôme constant, disons $Q = \alpha$.
Alors $X\mu'_A = \alpha\mu_A$ avec μ_A non nul et unitaire. Par 2., $\mu_A = X^d$.
Ainsi A est nilpotente (d'ordre de nilpotence d).

e) Partons de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nilpotente et de trace nulle et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$AB - BA = A \iff \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} d - a = 1 \\ c = 0 \end{cases}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

Exercice 161

Polynôme annulateur scindé à racines simples

Dans cet exercice, on démontre dans le cas de deux racines un résultat valable en toute généralité[1] :

1. ... et au programme en filières MP et PSI.

Si l'endomorphisme f admet un polynôme annulateur non nul scindé à racines simples, alors f est diagonalisable.

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
On suppose que f admet un polynôme annulateur P s'écrivant
$$\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \lambda)(\mathrm{X} - \mu) \text{ avec } \lambda \neq \mu.$$

1. Histoire de se familiariser avec les polynômes d'endomorphismes, justifier que
$$(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) \circ (f - \mu id_{\mathrm{E}}) = (f - \mu id_{\mathrm{E}}) \circ (f - \lambda id_{\mathrm{E}}) = 0.$$

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Ker}(f - \mu id_{\mathrm{E}}) = \{0\}$.

3. a) Vérifier que, pour tout x de E,
$$x = \frac{1}{\mu - \lambda}\big((f - \lambda id_{\mathrm{E}})(x) - (f - \mu id_{\mathrm{E}})(x)\big)$$

b) En déduire que
$$\mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mu id_{\mathrm{E}}) = \mathrm{E}.$$

c) Conclure.

4. Démontrer rapidement que toute projection et toute symétrie de E est diagonalisable.

Solution (**Ex.161 –** *Polynôme annulateur scindé à racines simples*)

1. $(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) \circ (f - \mu id_{\mathrm{E}}) = f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda\mu id_{\mathrm{E}} = \mathrm{P}(f) = 0$, et de même $(f - \mu id_{\mathrm{E}}) \circ (f - \lambda id_{\mathrm{E}}) = f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda\mu id_{\mathrm{E}} = \mathrm{P}(f) = 0$.
Tout repose sur le fait que les puissances de f commutent entre elles...

2. • $0 \in \mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Ker}(f - \mu id_{\mathrm{E}})$ puisque $\mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Ker}(f - \mu id_{\mathrm{E}})$ est un sous-espace vectoriel.
• Si $u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Ker}(f - \mu id_{\mathrm{E}})$ alors $f(u) = \lambda u$ et $f(u) = \mu u$ donc $(\lambda - \mu)u = 0$, et comme $\lambda \neq \mu$, $u = 0$.
• Ainsi $\mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) \cap \mathrm{Ker}(f - \mu id_{\mathrm{E}}) = \{0\}$.

3. a) Le calcul du second membre donne directement, pour tout x de E,
$$x = \frac{1}{\mu - \lambda}\big((f - \lambda id_{\mathrm{E}})(x) - (f - \mu id_{\mathrm{E}})(x)\big)$$

b) Soit $x \in \mathrm{E}$. Posons
$$y = \frac{1}{\mu - \lambda}(f - \lambda id_{\mathrm{E}})(x) \text{ et } z = \frac{-1}{\mu - \lambda}(f - \mu id_{\mathrm{E}})(x).$$
D'après la première question, $(f - \mu id_{\mathrm{E}})(y) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f - \mu)$ et de même $(f - \lambda id_{\mathrm{E}})(y) = 0$ donc $z \in \mathrm{Ker}(f - \lambda)$.
Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) + \mathrm{Ker}(f - \mu id_{\mathrm{E}})$.
Donc $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) + \mathrm{Ker}(f - \mu id_{\mathrm{E}})$.
Et comme ces deux sous-espaces sont en somme directe, ils sont supplémentaires :
$$\mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mu id_{\mathrm{E}}) = \mathrm{E}.$$

c) • Si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(f)$ alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) = \{0\}$ donc $\mathrm{Ker}(f - \mu id_{\mathrm{E}}) = \mathrm{E}$, autrement dit $f = \mu id_{\mathrm{E}}$ et f est diagonalisable.
• De même si $\mu \notin \mathrm{Sp}(f)$, $f = \lambda id_{\mathrm{E}}$ et f est diagonalisable.
• Enfin, si $\{\lambda, \mu\} \subset \mathrm{Sp}(f)$, alors $\mathrm{E}_\lambda \oplus \mathrm{E}_\mu = \mathrm{E}$ donc f est diagonalisable.

4. • Si p est une projection, $p^2 = p$ et $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} = (\mathrm{X} - 0)(\mathrm{X} - 1)$ est un polynôme annulateur de p. Par ce qui précède, p est diagonalisable.
• Si s est une projection, $s^2 = id_{\mathrm{E}}$ et $\mathrm{X}^2 - 1 = (\mathrm{X} + 1)(\mathrm{X} - 1)$ est un polynôme annulateur de s. Par ce qui précède, s est diagonalisable.

Chapitre 47

Normes matricielles et quotient de Rayleigh

[CCP-M1 – 2014 – PC – Partie II][E3A-MA – 2013 – MP – Partie II] [CCP-M1 – 2002 – PC –]

Définition – Norme vectorielle (cours)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On dit que $||.||$ est une norme (vectorielle) sur E si

(i) $\forall u \in \mathrm{E}, \quad ||u|| \geqslant 0$ — positivité

(ii) $\forall u \in \mathrm{E}, \quad ||u|| = 0 \Longrightarrow u = 0$ — séparation

(iii) $\forall u \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathrm{E}, \quad ||\lambda u|| = |\lambda|\, ||u||$ — homogénéité

(iv) $\forall (u,v) \in \mathrm{E}^2, \quad ||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v||$ — inégalité triangulaire

Notations pour toute cette partie

- n désigne un entier naturel non nul.
- E désigne $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, espace des colonnes.
- Pour toute colonne U, V, ... de E, on note u_i, v_i, ... la $i-$ème composante de U, V, ...
- $\mathcal{B} = (\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n)$ la base canonique de E, les colonnes $(\mathrm{E}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ étant caractérisées par

$$e_{i,j} = \delta_{i,j} \qquad (\delta \text{ : symbole de Kronecker})$$

- Lorsqu'un indice i apparaît seul sous un symbole de sommation ou de maximum, il s'agit de le faire varier de 1 à n :

$$\sum_i truc_i = \sum_{i=1}^{n} truc_i \text{ et } \max_i \{truc_i\} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{truc_i\}$$

- Le produit scalaire canonique de deux colonnes U et V de E sera noté $\langle \mathrm{U}, \mathrm{V} \rangle$ ou plus directement ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{UV}$. On s'affranchit d'écrire $\mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{UV}\right)$ car on assimile $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}$.

Exercice 162

Normes usuelles sur E

Rappeler les définitions des normes $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ définies sur E.

Solution (**Ex.162 –** *Normes usuelles sur E*)

$||\mathrm{U}||_1 \overset{\text{déf.}}{=} \sum_i |u_i|$, $||\mathrm{U}||_2 \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt{\sum_i |u|_i^2}$ et $||\mathrm{U}||_\infty \overset{\text{déf.}}{=} \max_i |u_i|$.

Définition – Norme matricielle

Dans le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe deux lois internes

$$+ : (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{A} + \mathrm{B} \text{ et } \times : (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{AB}.$$

L'inégalité triangulaire impose une condition sur $||\mathrm{A}+\mathrm{B}||$. Lorsqu'on veut travailler avec une norme sur les matrices carrées, il peut être pratique d'imposer aussi une condition sur le produit matriciel : la sous-multiplicativité.

Une norme vérifiant cette propriété est qualifiée de norme matricielle et on la notera avec des triples barres $|||.|||$.

Une application $|||.||| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ est une **norme matricielle** si elle vérifie

(i) $\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad |||\mathrm{A}||| \geqslant 0$ — positivité

(ii) $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E}, \quad |||\mathrm{A}||| = 0 \Longrightarrow \mathrm{A} = 0$ — séparation

(iii) $\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad |||\lambda\mathrm{A}||| = |\lambda|\,|||\mathrm{A}|||$ — homogénéité

(iv) $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad |||\mathrm{A}+\mathrm{B}||| \leqslant |||\mathrm{A}||| + |||\mathrm{B}|||$ — inégalité triangulaire

(v) $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad |||\mathrm{AB}||| \leqslant |||\mathrm{A}|||\,.\,|||\mathrm{B}|||$ — sous-multiplicativité

Exercice 163

Norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle

Soit $||.||$ une norme sur E. Soit

$$\mathcal{S} = \left\{\mathrm{V} \in \mathrm{E},\ ||\mathrm{V}|| = 1\right\} \text{ la sphère unité.}$$

On pose, pour toute $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$|||\mathrm{A}||| \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{\mathrm{V}\in\mathcal{S}} ||\mathrm{AV}||\,.$$

On dit que $|||.|||$ est la **norme matricielle subordonnée** à la norme vectorielle E.

Notez que :

• $||.||$ *est une norme vectorielle sur* $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *;*

• $|||.|||$ *est une norme matricielle sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.*

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Justifier que la borne supérieure définissant $|||.|||$ existe.

b) Justifier qu'il existe au moins un vecteur $\mathrm{V} \in \mathcal{S}$ tel que $|||\mathrm{A}||| = ||\mathrm{AV}||$.

2. Que vaut $|||\mathrm{I}_n|||$?

3. a) Montrer que : $\forall \mathrm{V} \in \mathrm{E}, \quad ||\mathrm{AV}|| \leqslant |||\mathrm{A}|||\,.\,||\mathrm{V}||$.

b) Montrer que : $|||\mathrm{A}||| = \sup\limits_{\mathrm{V}\in\mathrm{E},\mathrm{V}\neq 0} \dfrac{||\mathrm{AV}||}{||\mathrm{V}||}$.

4. Montrer que $|||.|||$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5. *Cas des normes subordonnées à* $||.||_1$ *et* $||.||_\infty$

a) Montrer que :

$$|||\mathrm{A}|||_1 \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{\mathrm{V}\in\mathrm{E},||\mathrm{V}||_1=1} ||\mathrm{AV}||_1 = \max_j \left\{\sum_i |a_{i,j}|\right\}$$

b) Montrer que :

$$|||\mathrm{A}|||_\infty \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{\mathrm{V}\in\mathrm{E},||\mathrm{V}||_\infty=1} ||\mathrm{AV}||_\infty = \max_i \left\{\sum_j |a_{i,j}|\right\}$$

Solution (**Ex.163** – *Norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle*)

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) $\mathcal{S} = \{\mathrm{V} \in \mathrm{E},\ ||\mathrm{V}|| = 1\}$ est une partie fermée car $||.||$ est continue et bornée (par 1 !).
$f_\mathrm{A} : \mathrm{V} \mapsto ||\mathrm{AV}||$ est continue sur E par continuité du produit et de la norme.
Par un théorème du cours, f_A est continue sur une partie fermée et bornée de E donc est bornée et atteint ses bornes. Donc $\sup_{\mathrm{V}\in\mathcal{S}} ||\mathrm{AV}||$ existe.

b) Comme f_A atteint ses bornes : $\exists \mathrm{V} \in \mathcal{S}, ||\mathrm{AV}|| = \sup_{\mathrm{U}\in\mathcal{S}} ||\mathrm{AU}|| = |||\mathrm{A}|||$.

2. $|||\mathrm{I}_n||| = \sup\limits_{\mathrm{V}\in\mathrm{E},||\mathrm{V}||=1} ||\mathrm{I}_n\mathrm{V}|| = \sup\limits_{\mathrm{V}\in\mathrm{E},||\mathrm{V}||=1} ||\mathrm{V}|| = 1$.

3. a) • Si V est unitaire : $||\mathrm{AV}|| \leqslant \sup_{\mathrm{U}\in\mathcal{S}} ||\mathrm{AU}|| \leqslant |||\mathrm{A}||| \leqslant |||\mathrm{A}|||\,.\,||\mathrm{V}||$.

• Si $\mathrm{V} = 0$, alors $0 = ||\mathrm{AV}||$ et $|||\mathrm{A}|||\,||\mathrm{V}|| = 0$ donc l'inégalité est vérifiée.

• Si V n'est ni nul, ni unitaire, je pose $\mathrm{V}' = \dfrac{1}{||\mathrm{V}||}\mathrm{V}$.

V' est unitaire donc $||\mathrm{AV}'|| \leqslant |||\mathrm{A}|||\,.\,||\mathrm{V}'||$, donc $\dfrac{||\mathrm{AV}||}{||\mathrm{V}||} \leqslant |||\mathrm{A}|||\,\dfrac{||\mathrm{V}||}{||\mathrm{V}||}$, d'où :

$$||AV|| \leqslant |||A|||\,.\,||V||.$$

b) • La question précédente entraîne : $|||A||| \geqslant \sup_{V\neq 0} \dfrac{||AV||}{||V||}$.

• De plus : $\sup_{V\neq 0} \dfrac{||AV||}{||V||} \geqslant \sup_{||V||=1} \dfrac{||AV||}{||V||}$ (borne supérieure prise sur un ensemble plus grand). Donc $\sup_{V\neq 0} \dfrac{||AV||}{||V||} \geqslant |||A|||$.

Finalement : $\quad |||A||| = \sup_{V\in E, V\neq 0} \dfrac{||AV||}{||V||}$.

4. • $|||.|||$ est positive.

• $|||A||| = 0 \Longrightarrow \forall V \in E, ||AV|| = 0$ car $||AV|| \leqslant |||A|||\,||V||$. Donc $\mathrm{Ker}(A) = E$, d'où $\mathrm{rg}(A) = 0$ et $A = 0$.

• $|||\lambda A||| = \sup_{V\in\mathcal{S}} ||\lambda AV|| = \sup_{V\in\mathcal{S}} \big(|\lambda|\,||AV||\big) = |\lambda| \sup_{V\in\mathcal{S}} ||AV|| = |\lambda|\,|||A|||$

• $|||A+B||| = \sup_{V\in\mathcal{S}} ||(A+B)V|| = \sup_{V\in\mathcal{S}} ||AV+BV||$, or $||AV+BV|| \leqslant ||AV|| + ||BV||$, donc $\sup_{V\in\mathcal{S}} ||AV+BV|| \leqslant \sup_{V\in\mathcal{S}} ||AV|| + \sup_{V\in\mathcal{S}} ||BV|| \leqslant |||A||| + |||B|||$.

• $|||AB||| = \sup_{V\in\mathcal{S}} ||ABV|| \leqslant |||A||| \sup_{V\in\mathcal{S}} ||BV|| \leqslant |||A|||\,.\,|||B||| \sup_{V\in\mathcal{S}} ||V||$ or $\sup_{V\in\mathcal{S}} ||V|| = 1$ par définition de $\mathcal{S}$.

5. *Cas des normes subordonnées à* $||.||_1$ *et* $||.||_\infty$

a) • Soit $V \in \mathcal{S}_1$, *i.e.* $\sum_j |v_j| = 1$.

$$\begin{aligned}
||AV||_1 &= \sum_i \left|\sum_j a_{i,j} v_j\right| \leqslant \sum_i \sum_j |a_{i,j}|\,|v_j| \leqslant \sum_j \left(|v_j| \sum_i |a_{i,j}|\right) \\
&\leqslant \sum_j \left(|v_j| \max_k \left\{\sum_i |a_{i,k}|\right\}\right) \leqslant \max_k \left\{\sum_i |a_{i,k}|\right\} \sum_j |v_j| \\
&\leqslant \max_k \left\{\sum_i |a_{i,k}|\right\} \text{ car } ||V||_1 = 1.
\end{aligned}$$

• Pour montrer l'égalité, on crée un vecteur V de $\mathcal{S}_1$ tel qu'il y ait égalité, *i.e.* tel que $||AV||_1 = \max_j \left\{\sum_i |a_{i,j}|\right\}$.

Soit j_0 un indice tel que $\sum_i |a_{i,j_0}| = \max_j \left\{\sum_i |a_{i,j}|\right\}$.

Soit V défini par $v_{j_0} = 1$ et $\forall j \neq j_0,\ v_j = 0$.

On a bien $||V||_1 = 1$ et

$$||AV||_1 = \sum_i \left|\sum_j a_{i,j} v_j\right| = \sum_i |a_{i,j_0}| = \max_j \left\{\sum_i |a_{i,j}|\right\}.$$

b) • Soit $V \in \mathcal{S}_\infty$, *i.e.* $\max_j |v_j| = 1$.

$$||AV||_\infty = \max_i \left|\sum_j a_{i,j} v_j\right| \leqslant \max_i \left(\sum_j |a_{i,j}|\,|v_j|\right) \leqslant \max_i \left(\sum_j |a_{i,j}|\right)$$

• Pour montrer l'égalité, on crée un vecteur V de $\mathcal{S}_\infty$ tel qu'il y ait égalité, *i.e.* tel que $||AV||_\infty = \max_i \left\{\sum_j |a_{i,j}|\right\}$.

Si A est la matrice nulle, tout vecteur de $\mathcal{S}_\infty$ convient. Supposons maintenant $A \neq 0$.

Soit i_0 un indice tel que $\sum_j |a_{i_0,j}| = \max_i \left\{\sum_j |a_{i,j}|\right\}$ (> 0).

Soit V défini par $v_j = \begin{cases} \dfrac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} & \text{si } a_{i_0,j} \neq 0 \\ 0 & \text{si } a_{i_0,j} = 0 \end{cases}$ de sorte que, pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, $a_{i_0,j} v_j = |a_{i_0,j}|$.

On a bien $||V||_\infty = 1$ (car l'un au moins des v_j vaut ± 1) et

$$||AV||_\infty = \max_i \left|\sum_j a_{i,j} v_j\right| \geqslant \left|\sum_j a_{i_0,j} v_j\right| = \sum_j |a_{i_0,j}| = \max_i \left\{\sum_j |a_{i,j}|\right\}.$$

Exercice 164

Normes subordonnées et inversibilité

On suppose que $|||.|||$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, subordonnée à une norme vectorielle $||.||$.
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $|||\mathrm{A}||| < 1$

1. Montrer que $\mathrm{I}+\mathrm{A}$ est inversible. *On pourra montrer par l'absurde que* $(\mathrm{I}+\mathrm{A})\mathrm{U} = 0$ *entraîne* $\mathrm{U} = 0$.

2. Justifier que $\left|\left|\left|(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\right|\right|\right| \leqslant \dfrac{1}{1-|||\mathrm{A}|||}$. *On pourra commencer par calculer* $(\mathrm{I}-\mathrm{A}(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1})(\mathrm{I}+\mathrm{A})$.

Solution (**Ex.164 –** *Normes subordonnées et inversibilité*)

1. Soit $\mathrm{U} \in \mathrm{E}$ tel que $(\mathrm{I}+\mathrm{A})\mathrm{U} = 0$. Alors $||\mathrm{U}|| = ||-\mathrm{AU}|| = ||\mathrm{AU}||$.
Supposons $||\mathrm{U}|| \neq 0$. Alors :

$$||\mathrm{U}|| = ||\mathrm{AU}|| \leqslant |||\mathrm{A}|||\,.\,||\mathrm{U}|| < ||\mathrm{U}||$$

ce qui est absurde. Ainsi $(\mathrm{I}+\mathrm{A})\mathrm{U} = 0 \Longrightarrow \mathrm{U} = 0$.
Donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{I}+\mathrm{A}) = \{0\}$, *i.e.* $\mathrm{rg}(\mathrm{I}+\mathrm{A}) = n$, donc $(\mathrm{I}+\mathrm{A}) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

2. On a : $(\mathrm{I}-\mathrm{A}(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1})(\mathrm{I}+\mathrm{A}) = \mathrm{I}$, d'où $(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1} = \mathrm{I}-\mathrm{A}(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}$.
Par l'inégalité triangulaire : $\left|\left|\left|(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\right|\right|\right| \leqslant |||\mathrm{I}||| + \left|\left|\left|\mathrm{A}(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\right|\right|\right|$.
Et comme $|||.|||$ est une norme matricielle subordonnée

$$|||\mathrm{I}||| = 1 \text{ et } \left|\left|\left|\mathrm{A}(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\right|\right|\right| \leqslant |||\mathrm{A}|||\,\left|\left|\left|(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\right|\right|\right|.$$

D'où $\left|\left|\left|(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\right|\right|\right| \leqslant 1 + |||\mathrm{A}|||\,\left|\left|\left|(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\right|\right|\right|$, donc

$$\left|\left|\left|(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\right|\right|\right| \leqslant \frac{1}{1-|||\mathrm{A}|||}.$$

Définition – Rayon spectral d'une matrice
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\rho(\mathrm{A})$ le rayon spectral de A, défini par

$$\rho(\mathrm{A}) = \max\left\{\,|\lambda|\,,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})\right\}.$$

Remarque importante : même si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, son rayon spectral $\rho(\mathrm{A})$ est égal au plus grand module de ses valeurs propres complexes. Notons que comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$ n'est jamais vide et compte aux plus n valeurs distinctes, $\rho(\mathrm{A})$ est parfaitement défini.

Définition – Quotient de Rayleigh
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle quotient de Rayleigh l'application R_A définie par

$$\mathrm{R}_\mathrm{A} : \mathrm{E} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ \mathrm{V} \mapsto \frac{\langle \mathrm{AV}, \mathrm{V}\rangle}{\langle \mathrm{V}, \mathrm{V}\rangle} = \frac{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{V}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{AV}}{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{VV}}$$

Exercice 165

Quotient de Rayleigh

Dans tout l'exercice, on suppose que A est une matrice symétrique réelle : $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier qu'il existe une matrice orthogonale $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\mathrm{D} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ telles que

$${}^{\mathrm{t}}\mathrm{QAQ} = \mathrm{D}.$$

On note U_i les colonnes de Q de sorte que $\mathrm{Q} = (\mathrm{U}_1 \vdots \mathrm{U}_2 \vdots \cdots \vdots \mathrm{U}_n)$.
On pose $\mathrm{F}_0 = \{0_\mathrm{E}\}$ et, pour tout $k \in [[\,1\,;\ n]]\,,\quad \mathrm{F}_k = \mathrm{Vect}(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_k)$.

2. Montrer que : $\quad \forall k \in [[\,1\,;\ n]]\,,\quad \mathrm{R}_\mathrm{A}(\mathrm{U}_k) = \lambda_k$.

3. Soit $\mathrm{V} \in \mathrm{E}$. On note $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées de V dans $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_n)$ et on pose $\mathrm{W} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{QV}$.
a) Justifier que : $\quad \forall i \in [[\,1\,;\ n]]\,,\quad w_i = \alpha_i$.
b) Montrer que : $\quad \mathrm{R}_\mathrm{A}(\mathrm{V}) = \mathrm{R}_\mathrm{D}(\mathrm{W})$.
c) Montrer que : $\quad \forall k \in [[\,1\,;\ n]],\ \lambda_k = \max\limits_{\mathrm{V} \in \mathrm{F}_k} \mathrm{R}_\mathrm{A}(\mathrm{V})$.
d) Montrer que : $\quad \forall k \in [[\,1\,;\ n]],\ \lambda_k = \min\limits_{\mathrm{V} \in \mathrm{F}_{k-1}^{\perp}} \mathrm{R}_\mathrm{A}(\mathrm{V})$.

4. Justifier que : $\forall \mathrm{V} \in \mathrm{E} \setminus \{0\}, \quad \lambda_1 \leqslant \mathrm{R_A}(\mathrm{V}) \leqslant \lambda_n$.

5. On suppose de plus que les valeurs propres de A sont toutes positives.
Justifier que : $\max\limits_{\mathrm{V}\neq 0} \mathrm{R_A}(\mathrm{V}) = \rho(\mathrm{A})$.

Solution (**Ex.165 –** *Quotient de Rayleigh*)

1. Puisque A est symétrique réelle, le théorème spectral assure qu'il existe une matrice orthogonale $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\mathrm{D} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ telles que

$$^{\mathrm{t}}\mathrm{QAQ} = \mathrm{D}.$$

Au passage, les colonnes $(\mathrm{U}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de Q forment une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de A.

2. Soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{U}_k\mathrm{AU}_k = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{U}_k\lambda_k\mathrm{U}_k = \lambda_k\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{U}_k\mathrm{U}_k$, donc $\mathrm{R_A}(\mathrm{U}_k) = \lambda_k$.

3. Soit $\mathrm{V} \in \mathrm{E}$. On note $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les coordonnées de V dans $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \dots, \mathrm{U}_n)$ et on pose $\mathrm{W} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{QV}$.

a) $\mathrm{V} = \sum\limits_i \alpha_i\mathrm{U}_i$, or ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{QU}_i = \mathrm{E}_i$ ($i-$ème vecteur de la base canonique), donc $\mathrm{W} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{QV} = \sum\limits_i \alpha_i\mathrm{E}_i$, autrement dit $w_i = \alpha_i$.

b) $\mathrm{R_A}(\mathrm{V}) = \dfrac{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{VAV}}{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{VV}} = \dfrac{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{VQD}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{QV}}{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{VQ}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{QV}} = \dfrac{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{WDW}}{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{WW}} = \mathrm{R_D}(\mathrm{W})$.

c) • Comme $\mathrm{V} \in \mathrm{F}_k$, $\mathrm{V} = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i\mathrm{U}_i$, autrement dit, pour $i > k$, $w_i = \alpha_i = 0$.

• $\mathrm{R_D}(\mathrm{W}) = \dfrac{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{WDW}}{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{WW}} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i\alpha_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i^2} \leqslant \dfrac{\lambda_k\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i^2} \leqslant \lambda_k$,

d'où $\max\limits_{\mathrm{V}\in\mathrm{F}_k} \mathrm{R_A}(\mathrm{V}) \leqslant \lambda_k$.

• $\mathrm{U}_k \in \mathrm{F}_k$ et $\mathrm{R_A}(\mathrm{U}_k) = \lambda_k$ donc $\max\limits_{\mathrm{V}\in\mathrm{F}_k} \mathrm{R_A}(\mathrm{V}) \geqslant \lambda_k$.

Ainsi

$$\lambda_k = \max_{\mathrm{V}\in\mathrm{F}_k} \mathrm{R_A}(\mathrm{V}).$$

d) Le raisonnement est analogue car $\mathrm{V} \in \mathrm{F}_{k-1}^{\perp}$ signifie que $\mathrm{V} = \sum\limits_{i=k}^{n} \alpha_i\mathrm{U}_i$, autrement dit $w_i = \alpha_i = 0$ pour $i < k$.

• $\mathrm{R_D}(\mathrm{W}) = \dfrac{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{WDW}}{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{WW}} = \dfrac{\sum\limits_{i=k}^{n}\lambda_i\alpha_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i^2} \geqslant \dfrac{\lambda_k\sum\limits_{i=k}^{n}\alpha_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i^2} \geqslant \lambda_k$,

d'où $\min\limits_{\mathrm{V}\in\mathrm{F}_{k-1}^{\perp}} \mathrm{R_A}(\mathrm{V}) \geqslant \lambda_k$.

• $\mathrm{U}_k \in \mathrm{F}_{k-1}^{\perp}$ et $\mathrm{R_A}(\mathrm{U}_k) = \lambda_k$ donc $\min\limits_{\mathrm{V}\in\mathrm{F}_{k-1}^{\perp}} \mathrm{R_A}(\mathrm{V}) \leqslant \lambda_k$.

Ainsi

$$\lambda_k = \min_{\mathrm{V}\in\mathrm{F}_{k-1}^{\perp}} \mathrm{R_A}(\mathrm{V}).$$

4. Soit $\mathrm{V} \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$.

• Comme $\mathrm{F}_0 = \{0\}$, $\mathrm{F}_0^{\perp} = \mathrm{E}$ donc $\mathrm{V} \in \mathrm{F}_0^{\perp}$ et $\mathrm{R_A}(\mathrm{V}) \geqslant \min\limits_{\mathrm{V}\in\mathrm{F}_0^{\perp}} \mathrm{R_A}(\mathrm{V})$, *i.e.* $\mathrm{R_A}(\mathrm{V}) \geqslant \lambda_1$.

• Comme $\mathrm{F}_n = \mathrm{E}$, $\mathrm{V} \in \mathrm{F}_n$ et $\mathrm{R_A}(\mathrm{V}) \leqslant \max\limits_{\mathrm{V}\in\mathrm{F}_n} \mathrm{R_A}(\mathrm{V})$, *i.e.* $\mathrm{R_A}(\mathrm{V}) \leqslant \lambda_n$.

Ainsi $\lambda_1 \leqslant \mathrm{R_A}(\mathrm{V}) \leqslant \lambda_n$.

5. On suppose de plus que les valeurs propres de A sont toutes positives. On savait déjà que toutes les valeurs propres de A sont réelles (théorème spectral). Donc $\rho(\mathrm{A}) = \lambda_n$. Donc $\max\limits_{\mathrm{V}\neq 0} \mathrm{R_A}(\mathrm{V}) \leqslant \rho(\mathrm{A})$.

Et comme $\mathrm{R_A}(\mathrm{U}_n) = \lambda_n$, il y a en fait égalité.

Exercice 166

Norme subordonnée à la norme euclidienne $||.||_2$

On rappelle que la norme euclidienne $||.||_2$ sur E est définie par
$$||\mathrm{U}||_2 = \sqrt{{}^t\mathrm{U}\mathrm{U}}.$$
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

1. Justifier que ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont toutes positives.

2. Montrer que
$$|||\mathrm{A}|||_2 \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{\mathrm{V}\in\mathrm{E}, ||\mathrm{V}||_2=1} ||\mathrm{AV}||_2 = \sqrt{\rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A})}.$$

3. Montrer que $\rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}) = \rho(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A})$ et en déduire
$$\left|\left|\left|{}^t\mathrm{A}\right|\right|\right|_2 = |||\mathrm{A}|||_2.$$

Solution (**Ex.166 –** *Norme subordonnée à la norme euclidienne* $||.||_2$)

1. ${}^t({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}) = {}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$ donc ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$ est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ et U un vecteur propre associé à λ.
$0 \leqslant ||\mathrm{AU}||^2 = {}^t\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\mathrm{U} = {}^t\mathrm{U}\lambda\mathrm{U} = \lambda\,||\mathrm{U}||^2$, avec $||\mathrm{U}|| > 0$ car $\mathrm{U} \neq 0$.
Donc $\lambda \geqslant 0$, et du coup $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset [\,0\,;\ +\infty[$.

2.
$$|||\mathrm{A}|||_2 = \sup_{\mathrm{V}\in\mathrm{E},||\mathrm{V}||_2=1} ||\mathrm{AV}||_2 = \sup_{\mathrm{V}\neq 0} \frac{||\mathrm{AV}||_2}{||\mathrm{V}||_2}$$
$$= \sup_{\mathrm{V}\neq 0} \sqrt{\frac{{}^t\mathrm{V}\,{}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\mathrm{V}}{{}^t\mathrm{V}\mathrm{V}}} = \sup_{\mathrm{V}\neq 0} \sqrt{\mathrm{R}_{{}^t\mathrm{A}\mathrm{A}}(\mathrm{V})} = \sqrt{\rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A})}$$
d'après l'exercice précédent, puisque ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$ est symétrique réelle à valeurs propres positives.

3. • Supposons $\rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}) > 0$. Soit $\mathrm{U} \neq 0$ tel que ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\mathrm{U} = \rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A})\mathrm{U}$.
Alors $\mathrm{AU} \neq 0$ et $\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}(\mathrm{AU}) = \rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A})(\mathrm{AU})$, donc $\rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A})$ est une valeur propre de $\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}$, donc $\rho(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}) \geqslant \rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A})$.
Et on démontre alors de même que $\rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}) \geqslant \rho(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A})$, d'où finalement $\rho(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}) = \rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A})$.
• Supposons $\rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}) = 0$. Si $\rho(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}) > 0$, le raisonnement précédent donne $\rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}) \geqslant \rho(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}) > 0$, ce qui est absurde.
Donc $\rho(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}) = 0 = \rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A})$.
• On a alors par 2. $\left|\left|\left|{}^t\mathrm{A}\right|\right|\right|_2 = \sqrt{\rho(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A})} = \sqrt{\rho({}^t\mathrm{A}\mathrm{A})} = |||\mathrm{A}|||_2$.

Exercice 167

Et la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *?*

1. *Cours* – Justifier que
$$(\,.\mid.\,) : (\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{B}\right)$$
est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On notera $|||.|||_{\mathrm{E}}$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

2. Montrer que $|||.|||_{\mathrm{E}}$ est une norme matricielle, *i.e.* qu'elle vérifie la sous-additivité.

3. Justifier que $|||.|||_{\mathrm{E}}$ n'est subordonnée à aucune norme vectorielle de E. *On pourra s'intéresser à la matrice identité.*

4. Justifier que
$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad |||\mathrm{A}|||_2 \leqslant |||\mathrm{A}|||_{\mathrm{E}} \leqslant \sqrt{n}\,|||\mathrm{A}|||_2$$
et donner, pour chaque inégalité, un exemple de matrice A réalisant l'égalité.

Solution (**Ex.167 –** *Et la norme euclidienne canonique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *?*)

1. *À savoir faire –*
En particulier, savoir montrer que
$$\left(\mathrm{A}\mid\mathrm{B}\right) = \sum_{i,j} a_{i,j}b_{i,j} \quad \text{et} \quad |||\mathrm{A}|||_{\mathrm{E}}^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2.$$

2. Il s'agit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_k u_k v_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_k u_k^2\right)\left(\sum_\ell u_\ell^2\right).$$

$|||\mathrm{AB}|||_{\mathrm{E}}^2 = \sum_{i,j}\left(\sum_k a_{i,k}b_{k,j}\right)^2 \leqslant \sum_{i,j}\left\{\left(\sum_k a_{i,k}^2\right)\left(\sum_\ell b_{\ell,j}^2\right)\right\}$

En factorisant à chaque fois qu'un facteur ne dépend pas de l'indice de sommation :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j}\left\{\left(\sum_k a_{i,k}^2\right)\left(\sum_\ell b_{\ell,j}^2\right)\right\} &= \sum_i\left[\sum_j\left\{\left(\sum_k a_{i,k}^2\right)\left(\sum_\ell b_{\ell,j}^2\right)\right\}\right]\\
&= \sum_i\left[\left(\sum_k a_{i,k}^2\right)\sum_j\left\{\sum_\ell b_{\ell,j}^2\right\}\right]\\
&= \sum_i\left[\left(\sum_k a_{i,k}^2\right)\sum_{j,\ell} b_{\ell,j}^2\right]\\
&= \left(\sum_{j,\ell} b_{\ell,j}^2\right)\sum_i\left[\sum_k a_{i,k}^2\right]\\
&= \left(\sum_{j,\ell} b_{\ell,j}^2\right)\sum_{i,k} a_{i,k}^2
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$|||\mathrm{AB}|||_{\mathrm{E}}^2 \leqslant \left(\sum_{i,k} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{j,\ell} b_{\ell,j}^2\right) = |||\mathrm{A}|||_{\mathrm{E}}^2\,|||\mathrm{B}|||_{\mathrm{E}}^2$$

3. $|||\mathrm{I}_n|||_{\mathrm{E}} = \sqrt{n}$, or pour une norme subordonnée, $|||\mathrm{I}_n||| = 1$, donc $|||.|||_{\mathrm{E}}$ n'est subordonnée à aucune norme vectorielle de E.

4. • On s'appuie toujours sur l'exercice précédent. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{AA}$.
On a : $\lambda_n \leqslant \sum_i \lambda_i \leqslant n\lambda_n$, donc $\rho({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AA}) \leqslant \mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AA}\right) \leqslant n\rho({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AA})$, donc

$$|||\mathrm{A}|||_2 \leqslant |||\mathrm{A}|||_{\mathrm{E}} \leqslant \sqrt{n}\,|||\mathrm{A}|||_2$$

• Pour $\mathrm{A} = \mathrm{E}_{1,1}$, ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{E}_{1,1}\mathrm{E}_{1,1} = \mathrm{E}_{1,1}$, donc $|||\mathrm{E}_{1,1}|||_2 = 1$ et $|||\mathrm{E}_{1,1}|||_{\mathrm{E}} = 1$ donc la première inégalité est une égalité.
• Pour $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$, ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{AA} = \mathrm{I}_n$, donc $|||\mathrm{I}_n|||_2 = 1$ et $|||\mathrm{I}_n|||_{\mathrm{E}} = \sqrt{n}$ donc la seconde inégalité est une égalité.

Exercice 168

Norme matricielle et rayon spectral

1. Soit $|||.|||$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{Sp(A)}$ l'ensemble des valeurs propres de A.
Montrer que : $\lambda \in \mathrm{Sp(A)} \Longrightarrow |\lambda| \leqslant |||\mathrm{A}|||$.

On pourra prendre un vecteur propre U *associé à la valeur propre* λ, $\mathrm{V} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ *et s'intéresser à la matrice* UV^{T}.

2. *Application* – Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{I} + \mathrm{A}$ ne soit pas inversible.
Montrer que $|||\mathrm{A}||| \geqslant 1$.

Solution (**Ex.168 –** *Norme matricielle et rayon spectral*)

1. Soit $\mathrm{U} \neq 0$ tel que $\mathrm{AU} = \lambda\mathrm{U}$. Soit $\mathrm{V} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

Alors :

$$|\lambda| \,.\, \left|\left|\left|\mathrm{UV^T}\right|\right|\right| = \left|\left|\left|\lambda\mathrm{UV^T}\right|\right|\right| = \left|\left|\left|\mathrm{AUV^T}\right|\right|\right| \leqslant |||\mathrm{A}||| \,.\, \left|\left|\left|\mathrm{UV^T}\right|\right|\right|$$

Or $\mathrm{UV^T} = (u_i)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ (et il ne manque pas d'indice... à méditer) n'est pas la matrice nulle donc on peut diviser par $\left|\left|\left|\mathrm{UV^T}\right|\right|\right|$, donc $|\lambda| \leqslant |||\mathrm{A}|||$.

2. $\mathrm{I} + \mathrm{A}$ n'est pas inversible, donc -1 est une valeur propre de A. Donc $|||\mathrm{A}||| \geqslant 1$.

Exercice 169

Rayon spectral et limite de la suite des puissances

Dans cet exercice, on établit précisément ce que l'intuition peut laisser deviner lorsqu'on a digéré la réduction des matrices carrées : si les valeurs propres de A sont toutes de module strictement plus petit que 1, alors $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.

À l'issue de l'exercice, on obtient même une caractérisation, i.e. des propriétés équivalentes.

1. *Lorsque A est diagonalisable.*

a) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable.
Montrer que, si $\rho(\mathrm{A}) < 1$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{A}^k = 0_n$.

b) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\rho(\mathrm{A}) \geqslant 1$. Montrer que la suite (A^k) ne converge pas vers 0_n.
La suite (A^k) diverge-t-elle nécessairement ?

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Dans cette question, on démontre qu'il existe au moins une norme matricielle subordonnée $|||.|||$ telle que

$$|||\mathrm{A}||| \leqslant \rho(\mathrm{A}) + \varepsilon.$$

a) Justifier l'existence d'une matrice $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et d'un matrice $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire telle que $\mathrm{P^{-1}AP} = \mathrm{T}$. On notera

$$\mathrm{P^{-1}AP} = \mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & t_{1,3} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & t_{2,3} & \dots & t_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_{n-1} & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

b) Justifier qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall i \in [[\,1\,;\; n-1\,]], \quad \sum_{j=i+1}^{n} \left|\delta^{j-i} t_{i,j}\right| \leqslant \varepsilon.$$

c) On note D la matrice diagonale $diag(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-1})$.
Vérifier que

$$(\mathrm{PD})^{-1}\mathrm{APD} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta t_{1,2} & \delta^2 t_{1,3} & \dots & \delta^{n-1} t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \delta t_{2,3} & \dots & \delta^{n-2} t_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_{n-1} & \delta t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{T}_\delta$$

d) Montrer que l'application

$$||.|| : \mathrm{V} \mapsto \left|\left|(\mathrm{PD})^{-1}\mathrm{V}\right|\right|_\infty$$

est une norme vectorielle sur E.

e) On note $|||.|||$ la norme matricielle subordonnée à $||.||$.
On pourra utiliser (*cf.* exercice 2) que, pour la norme matricielle $|||.|||_\infty$ subordonnée à la norme vectorielle $||.||_\infty$, on a

$$\forall \mathrm{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K}), \quad |||\mathrm{B}|||_\infty = \max_i \left\{ \sum_j |b_{i,j}| \right\}$$

Montrer que

$$|||A||| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0_n$

(2) $\forall V \in E, \quad \lim\limits_{k \to +\infty} A^k V = 0_{n,1}$

(3) $\rho(A) < 1$

(4) $|||B||| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $|||.|||$

4. Soit $|||.|||$ une norme matricielle quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\rho(A^k)^{1/k} = \rho(A)$.

b) On admet (vu dans un exercice précédent) que pour toute matrice carrée M, $\rho(M) \leqslant |||M|||$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\rho(A) \leqslant \left|\left|\left|A^k\right|\right|\right|^{1/k}$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. On pose $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$. Justifier que $\lim\limits_{k \to +\infty} A_\varepsilon^k = 0$.

d) Montrer finalement que

$$\lim_{k \to +\infty} \left|\left|\left|A^k\right|\right|\right|^{1/k} = \rho(A).$$

Solution (**Ex.169 –** *Rayon spectral et limite de la suite des puissances*)

1. a) Il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = D = diag(\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$. Alors : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PD^kP^{-1}$.
Or $D^k = diag(\lambda_i^k, 1 \leqslant i \leqslant n) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0_n$ car $\forall i, |\lambda_i| \leqslant \rho(A) < 1$.
Par continuité du produit matriciel, $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0_n$.

b) • $\rho(A) \geqslant 1$ donc : $\exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ telle que $|\lambda| \geqslant 1$.
Soit U un vecteur propre associé à λ : $U \neq 0$ et $AU = \lambda U$.
$\forall k \in \mathbb{N}$, $\left|\left|A^k U\right|\right| = |\lambda|^k \, ||U|| \geqslant ||U|| > 0$, donc A^kU ne tend pas vers 0.
Or si $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0_n$, alors $A^kU \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.
Donc A^k ne tend pas vers 0_n.
• Ceci n'entraîne pas que (A^k) diverge. Par exemple : $\rho(I_n) = 1$ et $(I_n^k)_k$ converge, vers I_n.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Dans cette question, on démontre qu'il existe au moins une norme matricielle subordonnée $|||.|||$ telle que

$$|||A||| \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

a) Dans $\mathbb{C}$, χ_A est toujours scindé donc A est trigonalisable (c'est dans le cours).

b) Soit $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \Big\{ \sum\limits_{j=i+1}^{n} |t_{i,j}| \Big\}$.
• Si $M = 0$, alors $\delta = 1$ convient.
• Si $M > 0$, soit $\delta = \min(1, \dfrac{\varepsilon}{M})$.
Alors pour tout $i \in [[\,1\,;\; n-1]]$, on a : $\forall j \geqslant i+1, \left|\delta^{j-i}\right| \leqslant \delta$ donc

$$\sum_{j=i+1}^{n} \left|\delta^{j-i} t_{i,j}\right| \leqslant \delta \sum_{j=i+1}^{n} |t_{i,j}| \leqslant \delta M \leqslant \varepsilon.$$

c) $(PD)^{-1}APD = P^{-1}D^{-1}APD$
D est la matrice diagonale $diag(1, \delta, \delta^2, \ldots, \delta^{n-1})$,
donc $D^{-1} = diag(1, \delta^{-1}, \delta^{-2}, \ldots, \delta^{-n+1})$.
Or multiplier à gauche une matrice B par une matrice diagonale Δ revient à multiplier chaque ligne de B par le coefficient diagonal correspondant de Δ, et le produit à droite multiplie de façon analogue les colonnes de B. Ainsi :

$$(\mathrm{PD})^{-1}\mathrm{APD} = \mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta t_{1,2} & \delta^2 t_{1,3} & \dots & \delta^{n-1}t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \delta t_{2,3} & \dots & \delta^{n-2}t_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_{n-1} & \delta t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

d) En s'appuyant sur le fait que $||.||_\infty$ est une norme, on montre que l'application $||.|| : \mathrm{U} \mapsto \left|\left|(\mathrm{PD})^{-1}\mathrm{V}\right|\right|_\infty$ est une norme vectorielle sur E.

e) $|||\mathrm{A}||| = \sup\limits_{\mathrm{V},||\mathrm{V}||=1} ||\mathrm{AV}|| = \sup\limits_{\mathrm{V},||(\mathrm{PD})^{-1}\mathrm{V}||_\infty=1} \left|\left|(\mathrm{PD})^{-1}\mathrm{AV}\right|\right|_\infty$

Posons $\mathrm{U} = (\mathrm{PD})^{-1}\mathrm{V}$,

$|||\mathrm{A}||| = \sup\limits_{\mathrm{U},||\mathrm{U}||_\infty=1} \left|\left|(\mathrm{PD})^{-1}\mathrm{APDU}\right|\right|_\infty = \sup\limits_{\mathrm{U},||\mathrm{U}||_\infty=1} ||\mathrm{T}_\delta \mathrm{U}||_\infty = |||\mathrm{T}_\delta|||_\infty$.

Par la propriété de $|||.|||_\infty$ rappelée :

$|||\mathrm{A}||| = |||\mathrm{T}_\delta|||_\infty = \max\limits_i \Big(\Big| \lambda_j + \sum\limits_{j=i+1}^{n} \delta^{j-i} t_{i,j} \Big| \Big) \leqslant \max\limits_j |\lambda_j| + \varepsilon$ par choix de δ.

Donc $|||\mathrm{A}||| \leqslant \rho(\mathrm{A}) + \varepsilon$.

3. Rappelons que la convergence ne dépend pas de la norme choisie car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : soit $|||.|||$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $||.||$.

Pour tout V de E, on a $\left|\left|\mathrm{A}^k\mathrm{V}\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|\mathrm{A}^k\right|\right|\right| \, ||\mathrm{V}||$, d'où l'implication.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : si $\rho(\mathrm{A}) \geqslant 1$, alors d'après 1.b), (A^k) ne tend pas vers 0_n. Par contraposition, (2) $\Longrightarrow$ (3).

(3) $\Longrightarrow$ (4) : d'après le résultat de la question 2. avec $\varepsilon = \dfrac{1-\rho(\mathrm{A})}{2}$ par exemple.

(4) $\Longrightarrow$ (1) : appliquons la sous-multiplicativité pour la norme subordonnée de (4), on a :

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left|\left|\left|\mathrm{B}^k\right|\right|\right| \leqslant |||\mathrm{B}|||^k$, or $|||\mathrm{B}|||^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Donc $\left|\left|\left|\mathrm{B}^k\right|\right|\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ par encadrement, et $\mathrm{B}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

4. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A est trigonalisable et il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^k\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\mathrm{A}^k)} \{|\lambda|\} = \big(\max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\mathrm{A})} \{|\lambda|\}\big)^k$.

Autrement dit : $\rho(\mathrm{A}^k) = \big(\rho(\mathrm{A})\big)^k$.

b) $\rho(\mathrm{A}) = \big(\rho(\mathrm{A}^k)\big)^{1/k} \leqslant \left|\left|\left|\mathrm{A}^k\right|\right|\right|^{1/k}$.

c) Comme $\mathrm{A}_\varepsilon \mathrm{U} = \lambda \mathrm{U} \Longleftrightarrow \mathrm{AU} = \lambda(\rho(\mathrm{A})+\varepsilon)\mathrm{U}$, on a :

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_\varepsilon) = \Big\{ \frac{\lambda}{\rho(\mathrm{A})+\varepsilon}, \ \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \Big\},$$

donc $\rho(\mathrm{A}_\varepsilon) = \dfrac{\rho(\mathrm{A})}{\rho(\mathrm{A})+\varepsilon} < 1$.

Par la question 3., on en déduit : $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{A}_\varepsilon^k = 0$.

d) Par définition de la limite, il existe $\ell_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall k \geqslant \ell_\varepsilon, \quad \left|\left|\left|\mathrm{A}_\varepsilon^k\right|\right|\right| \leqslant 1, \ \textit{i.e.} \ \left|\left|\left|\mathrm{A}^k\right|\right|\right| \leqslant \big(\rho(\mathrm{A})+\varepsilon\big)^k$$

donc : $\forall k \geqslant \ell_\varepsilon, \quad \left|\left|\left|\mathrm{A}^k\right|\right|\right|^{1/k} \leqslant \rho(\mathrm{A}) + \varepsilon.$
Finalement, on peut écrire :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \ell_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \forall k \geqslant \ell_\varepsilon, \quad \rho(\mathrm{A}) \leqslant \left|\left|\left|\mathrm{A}^k\right|\right|\right|^{1/k} \leqslant \rho(\mathrm{A}) + \varepsilon.$
Autrement dit :

$$\lim_{k \to +\infty} \left|\left|\left|\mathrm{A}^k\right|\right|\right|^{1/k} = \rho(\mathrm{A}).$$

Chapitre 48

Hyperplans et formes linéaires

Définition – Hyperplan en dimension quelconque
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
On appelle **forme linéaire** φ toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
On dit que H est un **hyperplan** de E s'il existe une forme linéaire $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{K}$ non nulle telle que
$$\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(\varphi).$$
Exemples –

① Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$. Soit $\mathrm{H} = \{u \in \mathrm{E}, u_0 = 0\}$.
Alors H est un hyperplan de E car
$$\mathrm{H} = \ker(\varphi) \text{ où } \varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, u \mapsto u_0.$$
② Soit $\mathrm{E} = \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{H} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}, 1 \text{ est racine de } \mathrm{P}\}$.
Alors H est un hyperplan de E car
$$\mathrm{H} = \ker(\varphi) \text{ où } \varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{C}, \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(1).$$
③ Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{H} = \{(x, y, z) \in \mathrm{E}, x + 2y = 3z\}$.
Alors H est un hyperplan de E car
$$\mathrm{H} = \ker(\varphi) \text{ où } \varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x + 2y - 3z.$$

Définition – Espace dual
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. L'ensemble des formes linéaires sur E est appelé *espace dual* de E et noté E^*.

Exercice 170

Caractérisation en dimension finie

Supposons E de dimension finie. Alors le sous-espace H de E est un hyperplan de E si, et seulement si, $\dim(\mathrm{H}) = \dim(\mathrm{E}) - 1$.

Solution (**Ex.170** – *Caractérisation en dimension finie*)
Soit n la dimension de E.
① Soit φ une forme linéaire non nulle.
Alors $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$, donc $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}$, donc $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leqslant \dim \mathbb{K}^1 = 1$.
φ n'est pas la forme nulle, donc $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \geqslant 1$, donc $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = 1$.
La formule du rang donne alors : $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = n - \mathrm{rg}\varphi = n - 1$.
Donc tout hyperplan est bien de dimension $n - 1$.
② Soit H un espace de dimension $n - 1$, $(h_1, \ldots, h_{n-1})$ une base de H.
Je la complète en une base $\mathcal{B} = (h_1, \ldots, h_{n-1}, h_n)$ de E, et je considère l'application $\varphi :$ E

$u = x_1h_1 + \cdots + x_{n-1}h_{n-1} + x_nh_n$

φ est une forme linéaire, non nulle car $\varphi(h_n) = 1 \neq 0$.
De plus : $u \in \mathrm{H} \iff x_n = 0 \iff \varphi(u) = 0$.
Donc $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan.
Remarque sur les exemples précédents
Dans les exemples ① et ②, ceci n'a pas de sens puisque E est dimension infinie.

Mais pour ③, on peut constater que $\dim(\mathrm{H}) = 2 = \dim(\mathrm{E}) - 1$, et on retrouve très classiquement que $x + 2y - 3z = 0$ est l'équation d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Vous avez déjà pu remarquer que fréquemment, dans les espaces euclidiens, on passe des équations linéaires à des relations d'orthogonalité, et réciproquement.
Par exemple :

$$x + 2y - 3z = 0 \Longleftrightarrow (x, y, z) \perp (1, 2, -3).$$

Exercice 171

Théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien

Soit E un espace euclidien et φ une forme linéaire sur E.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $u_\varphi \in \mathrm{E}$ tel que

$$\forall v \in \mathrm{E}, \qquad \varphi(v) = \langle u_\varphi, v\rangle.$$

Sur l'exemple précédent, $\varphi : v = (x, y, z) \mapsto x + 2y - 3z = \langle (1, 2, -3), v\rangle$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ $n + 1$ réels deux à deux distincts de $[\,0\,;\ 1]$.
Montrer qu'il existent $n + 1$ réels $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ tel que

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \qquad \int_0^1 \mathrm{P}(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k).$$

Solution (**Ex.171 –** *Théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien*)

1. *Premier cas :* Si φ est la forme nulle, il suffit de prendre $u_\varphi = \overrightarrow{0}$.
Second cas : Supposons que φ n'est pas la forme nulle. Alors $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan, donc de dimension $\dim(\mathrm{E}) - 1$.
Analyse : pour tout $v \in \mathrm{H}, \varphi(v) = 0 = \langle u_\varphi, v\rangle$ *montre que* $u_\varphi \in \mathrm{H}^\perp$. *Soit* $\Delta = \mathrm{H}^\perp$, $\dim(\Delta) = 1$ *(c'est un supplémentaire de* H*).*
Comment choisir cet u_φ *?*
Prenons un vecteur u *engendrant* Δ *tel que* $\varphi(u) = 1$ *pour fixer les idées (si* $\varphi(u) \neq 1$, *on pourra poser* $u' = \dfrac{1}{\varphi(u)}u$ *et on aura* $\varphi(u') = 1$*).*
Il faut en particulier que $\varphi(u_\varphi) = ||u_\varphi||^2$
Il existe $k \in \mathbb{R}$, $u_\varphi = ku$, $k\varphi(u) = k^2\,||u||^2$ *donc on prend* $k = \dfrac{1}{||u||}^2$. *Finalement tentons* $u_\varphi = \dfrac{1}{||u||^2}u$.
Synthèse :
Soit $u \in \Delta = \mathrm{H}^\perp$ tel que $\varphi(u) = 1$. Soit $u_\varphi = \dfrac{1}{||u||^2}u$.
• Pour tout $v \in \mathrm{H} = \mathrm{Ker}(\varphi)$, $\varphi(v) = 0 = \langle u_\varphi, v\rangle$.
• Pour tout $v \in \Delta$, $\exists k \in \mathbb{R}, v = ku$.
$\varphi(v) = k\varphi(u) = k$ et $\langle u_\varphi, v\rangle = \left\langle \dfrac{1}{||u||^2}u, ku \right\rangle = \dfrac{k}{||u||^2}\,||u||^2 = k$.
• Et comme $\mathrm{H} \oplus \Delta = \mathrm{E}$, pour tout $v = v_\mathrm{H} + v_\Delta$,
$\varphi(v) = \varphi(v_\mathrm{H}) + \varphi(v_\Delta) = \langle u_\varphi, v_\mathrm{H}\rangle + \langle u_\varphi, v_\Delta\rangle = \langle u_\varphi, v\rangle$: gagné !

2. Tout d'abord, $\varphi : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}, \mathrm{P} \mapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(x)\mathrm{d}x$ est une forme linéaire.
Ensuite, $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \mathrm{P}(x_k)\mathrm{Q}(x_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$: clairement bilinéaire, symétrique et positif. Et positif car $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle = 0$ entraîne que les $n + 1$ nombres x_k sont racines de P, donc P a strictement plus de racines que son degré, donc est nul.
Ainsi il existe un polynôme Q tel que

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \qquad \varphi(\mathrm{P}) = \langle \mathrm{Q}, \mathrm{P}\rangle = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Q}(x_k)\mathrm{P}(x_k).$$

En posant $\lambda_k = \mathrm{Q}(x_k)$ pour tout $k \in [[\,0\,;\ n]]$, on a

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \qquad \int_0^1 \mathrm{P}(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k).$$

Exercice 172

Espace dual & base duale

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et E^* son dual.

1. Justifier que E^* est un espace vectoriel.

2. On suppose que E est de dimension finie.

a) Justifier que E^* est de dimension finie et que $\dim\left(\mathrm{E}^*\right) = \dim(\mathrm{E})$.

b) Soit $n = \dim(\mathrm{E})$ et $\mathcal{B} = \left(e_1, \ldots, e_n\right)$ une base de E.

Soit pour, tout i de $[\![1\,;\ n]\!]$, $e_i^* : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto x_i$.

Montrer que $\mathcal{B}^* \overset{\text{déf.}}{=} \left(e_i^*\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E^*.

On l'appelle base duale de $\mathcal{B}$.

c) Interpréter, pour tout i de $[\![1\,;\ n]\!]$, e_i^* en terme de projection.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et on note $\mathcal{B} = \left(e_1, \ldots, e_n\right)$ la base canonique de E.

Exprimer, pour tout i de $[\![1\,;\ n]\!]$, e_i^* à l'aide du produit scalaire.

Solution (**Ex.172** – *Espace dual & base duale*)

1. Il suffit d'observer que $\mathrm{E}^* = \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$, qui est d'après le cours un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathrm{E}}$.

2. a) Toujours par le cours, puisque E et $\mathbb{K}$ sont de dimension finie, $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ est de dimension finie et $\dim(\mathrm{E}^*) = \dim\left(\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})\right) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathbb{K}) = \dim(\mathrm{E})$.

b) • Pour tout i de $[\![1\,;\ n]\!]$, e_i^* est bien une forme linéaire (linéarité banale : $e_i^*(x+y) = x_i + y_i = e_i^*(x) + e_i^*(y)$).

• Supposons que $(\alpha_j)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont n scalaires tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j^* = 0_{\mathrm{E}^*} \qquad (\sharp).$$

Soit i dans $[\![1\,;\ n]\!]$. $(\sharp)$ évaluée en e_i donne $\alpha_i = 0$ car $e_j^*(e_i) = \delta_{i,j}$.

Donc $\mathcal{B}^*$ est une famille libre de E^*.

• Comme $\mathrm{Card}\,(\mathcal{B}^*) = n = \dim\left(\mathrm{E}^*\right)$, $\mathcal{B}^*$ est une base de E^*.

c) Soit $i \in [\![1\,;\ n]\!]$.

Soit p_i la projection de E sur $\mathrm{Vect}(e_i)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\big(\left\{e_j | j \in [\![1\,;\ n]\!] \setminus \{i\}\right\}\big)$. Alors

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad p_i(x) = e_i^*(x) e_i.$$

3. Pour tout i de $[\![1\,;\ n]\!]$,

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad e_i^*(x) = \langle x, e_i \rangle.$$

Chapitre 49

Bases adaptées à l'étude des endomorphismes nilpotents

[MP-M1 – 2020 – PC –][E3A-M2 – 2017 – PSI –] [CS-M2 – 2019 – PSI –]
Définition – Endomorphisme nilpotent et indice de nilpotence
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe un entier naturel k tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.
Si f est nilpotent, on appelle indice de nilpotence de f l'entier

$$i = \min\{k \in \mathbb{N}, f^k = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}\}.$$

Comme $\{k \in \mathbb{N}, f^k = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}\}$ est non vide car f est nilpotent, et comme toute partie non vide minorée de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément, i est bien défini.

Exercice 173

Propriété des noyaux et images itérés

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$

2. On suppose : $\exists k_0 \in \mathbb{N}, \mathrm{Ker}(f^{k_0+1}) = \mathrm{Ker}(f^{k_0})$.
Montrer que : $\forall k \geqslant k_0, \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k_0})$.

3. On suppose : $\exists k_0 \in \mathbb{N}, \mathrm{Im}(f^{k_0+1}) = \mathrm{Im}(f^{k_0})$.
Montrer que : $\forall k \geqslant k_0, \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k_0})$.
Autrement dit, les suites des noyaux et des images sont croissante et décroissante respectivement.

4. Justifier que, si de plus E est de dimension finie, les suites $(\mathrm{Ker}(f^k))$ et $(\mathrm{Im}(f^k))$ sont stationnaires, *i.e.* constantes à partir d'un certain rang k_0.

Solution (**Ex.173 –** *Propriété des noyaux et images itérés*)

1. *Savoir traduire les appartenances au noyau et à l'image.*
• $u \in \mathrm{Ker}(f^k) \Longrightarrow f^k(u) = 0 \Longrightarrow f^{k+1}(u) = f(0) = 0 \Longrightarrow u \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
• $u \in \mathrm{Im}(f^{k+1}) \Longrightarrow \exists v \in \mathrm{E},\ u = f^{k+1}(v)$
$\Longrightarrow \exists v \in \mathrm{E}, u = f^k(f(v)) \Longrightarrow u \in \mathrm{Im}(f^k)$.

2. Par récurrence sur $k \geqslant k_0$.
$\boxed{\mathrm{I}}$ $\mathrm{Ker}(f^{k_0}) = \mathrm{Ker}(f^{k_0})$.
$\boxed{\mathrm{H}}$ • $\mathrm{Ker}(f^{k_0}) = \mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$
• Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. $f^{k+1}(x) = 0 \Longrightarrow f^{k-k_0}(x) \in \mathrm{Ker}(f^{k_0+1})$
$\Longrightarrow f^{k-k_0}(x) \in \mathrm{Ker}(f^{k_0}) \Longrightarrow x \in \mathrm{Ker}(f^k) \Longrightarrow x \in \mathrm{Ker}(f^{k_0})$.
Donc $\mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^{k_0})$.
$\boxed{\mathrm{C}}$ $\forall k \geqslant k_0, \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k_0})$.

3. La suite $(\dim(\mathrm{Ker}(f^k))$ est une suite croissante, majorée par $\dim(\mathrm{E})$, donc convergente. Et comme c'est une suite d'entiers, elle est constante à partir d'un certain rang.
Ainsi il existe un rang k_0 tel que $\dim(\mathrm{Ker}(f^{k_0+1})) = \dim(\mathrm{Ker}(f^{k_0}))$, et comme $\dim(\mathrm{Ker}(f^{k_0})) \subset \dim(\mathrm{Ker}(f^{k_0+1}))$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^{k_0})) = \dim(\mathrm{Ker}(f^{k_0+1}))$

Même raisonnement pour les images.

Exercice 174

Base adaptée à l'étude d'un endomorphisme nilpotent

Justifier les propriétés suivantes.

1. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent de E d'indice de nilpotence i.
Alors pour tout $x \in \mathrm{E}$ tel que $f^{i-1}(x) \neq 0$, la famille $(f^{i-1}(x), \dots, f(x), x)$ est libre.

2. On suppose de plus que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et que l'indice de nilpotence de f vaut n.
Alors pour tout $x \in \mathrm{E}$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$, la famille
$$\mathcal{C} = (f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$$
est une base de E et
$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & (0) & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_{n-1} \\ \hline 0_1 & 0 \end{array}\right).$$

Solution (**Ex.174 –** *Base adaptée à l'étude d'un endomorphisme nilpotent*)
Simplement traduire qu'une famille est libre.

1. Soit $(a_j)_{0 \leqslant j \leqslant i-1} \in \mathbb{K}^i$ tel que
$$\sum_{j=0}^{i-1} a_j f^{(j)}(x) = 0 \quad (\heartsuit).$$
En composant $(\heartsuit)$ par f^{i-1}, on a pour $j \geqslant 1$, $f^{j+i-1}(x) = 0$ car $j+i-1 \geqslant i$.
Donc il reste : $a_0 f^{i-1}(x) = 0$, et comme $f^{i-1}(x) \neq 0$, $a_0 = 0$.
Du coup
$$\sum_{j=\mathbf{1}}^{i-1} a_j f^{(j)}(x) = 0 \quad (\heartsuit_1).$$
En composant par f^{i-2}, on obtient $a_1 f^{i-1}(x) = 0$, donc $a_1 = 0$.
Et ainsi de suite...

2. *Notons qu'il existe (au moins un) $x \in \mathrm{E}$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$, car sinon cela signifierait que l'indice de nilpotence de f est au plus $n-1$.*
Comme $\mathcal{C}ard(\mathcal{C}) = n = \dim(\mathrm{E})$ et $\mathcal{C}$ est libre, $\mathcal{C}$ est une base de E.
• $f(f^{n-1}(x)) = f^n(x) = 0$ donc la première colonne de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$ est nulle.
• Pour $i \in [\![2\,;\, n]\!]$, $\quad f(f^{n-i}(x)) = f^{n-i+1}(x) =$« le vecteur précédent dans la base $\mathcal{C}$, » ce qui explique la matrice obtenue.

Chapitre 50

Matrices circulantes et racines n-èmes de l'unité

[E3A-M2 – 2019 – PSI – Partie 2] [CS-M1 – 2016 – PSI – Partie III] [CS-M1 – 2018 – PSI – Partie II] [CS-M1 – 2019 – PC – Partie II]

Définition – Matrice circulante élémentaire d'ordre n

Soit n un entier naturel au moins égal à 2. On note C_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathrm{C}_n \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Chaque ligne est obtenue en circulant la ligne précédente d'un cran vers la droite.

Exercice 175

Propriétés des matrices circulantes élémentaires

1. Montrer que C_n est orthogonale. C_n est-elle inversible ? Si oui, que vaut C_n^{-1} ?

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{C}_n \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

3. Justifier que pour tout $k \in [\![0\,;\ n]\!]$, $\mathrm{C}_n^k = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_{n-k} \\ \hline \mathrm{I}_k & 0 \end{array}\right)$

J'aurais pu exclure $k = 0$ et $k = n$, mais j'y vois $\mathrm{C}_n^0 = \mathrm{C}_n^n = \mathrm{I}_n$...

4. Justifier successivement que $\chi_{\mathrm{C}_n} = \mathrm{X}^n - 1$, C_n est diagonalisable, ses valeurs propres sont les racines $n-$èmes de l'unité :

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{C}_n) = \mathbb{U}_n = \{\omega^k, k \in [\![0\,;\ n-1]\!]\} \text{ où } \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n},$$

ses sous-espaces propres sont, pour tout $k \in [\![0\,;\ n-1]\!]$,

$$\mathrm{E}_{\omega^k} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}\right).$$

Justifier en particulier que C_n est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $n = 2$.

Solution (**Ex.175 –** *Propriétés des matrices circulantes élémentaires*)

1. Il suffit d'observer que les colonnes de C_n forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Toute matrice orthogonale est inversible d'inverse sa transposée.

2. En développant suivant la première colonne, $\det\left(()\,\mathrm{C}_n\right) = (-1)^{n+1}$:
$$\mathrm{C}_n \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \iff n \text{ impair.}$$

3. Il peut être intéressant d'étudier l'endomorphisme φ_n canoniquement associé à C_n. En notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$,
$$\varphi_n(\mathcal{B}) = (e_n, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}).$$
Comme φ_n effectue une permutation circulaire sur les vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$, on a, pour tout $k \in [\![1\,;\ n]\!]$, $\varphi_n^k(\mathcal{B}) = (e_{n+1-k}, e_{n+2-k}, \ldots, e_n, e_1, e_2, \ldots, e_{n-k})$.
$$\forall k \in [\![1\,;\ n-1]\!]\,,\quad \mathrm{C}_n^k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi_n^k) = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-k,k} & \mathrm{I}_{n-k} \\ \hline \mathrm{I}_k & 0_{k,n-k} \end{array}\right).$$

4. *Notez que* $\mathrm{C}_n^n = \mathrm{I}_n$ *donc* $\mathrm{X}^n - 1$ *est un polynôme annulateur de* C_n*, donc les valeurs propres de* C_n *sont parmi les racines de* $\mathrm{X}^n - 1$*, i.e. parmi les racines* $n-$*èmes de l'unité.*

• En développant suivant la première colonne :
$$\chi_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \times \mathrm{X}^{n-1} - (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = \mathrm{X}^n - 1.$$
C_n possède n valeurs propres distinctes, les n racines $n-$èmes de 1, donc
$$\mathrm{C}_n \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(\mathrm{C}_n) = \mathbb{U}_n = \{\omega^k, k \in [\![0\,;\ n-1]\!]\}.$$
•*Sur ce cas particulier, il est plus direct de résoudre le système que de rechercher le noyau.*

Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{C}_n)$:
$$\mathrm{C}_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{c} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ x_1 \in \mathbb{C} \end{array}\right.$$
Comme $\exists k \in [\![0\,;\ n-1]\!]$ *tq* $\lambda = \omega^k$, on a
$$\forall k \in [\![0\,;\ n-1]\!]\,,\quad \mathrm{E}_{\omega^k} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}\right).$$
Dès que $n \geqslant 3$, $\omega \notin \mathbb{R}$ et χ_{C_n} n'est pas scindé, donc C_n n'est pas diagonalisable. Seule C_2 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{Sp}(\mathrm{C}_2) = \{-1, 1\}$.

Définition – Matrices circulantes d'ordre n

Pour tout $a = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on définit la matrice circulante M_a par
$$\mathrm{M}_a = \mathrm{M}_{(a_0,\ldots,a_{n-1})} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$
On note de plus Γ l'ensemble de toutes les matrices circulantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
$$\Gamma = \left\{\mathrm{M}_a / a \in \mathbb{C}^n\right\}.$$

Exercice 176

Propriétés des matrices circulantes

Justifier les propriétés suivantes.

1. Γ est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

En particulier, $\mathrm{M}_a = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{C}_n^k$ est un polynôme en C_n.

2. Γ est stable pour le produit matriciel :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}_n^2, \quad \mathrm{M}_a \mathrm{M}_b \in \Gamma.$$

Le produit de deux matrices circulantes est encore une matrice circulante.

3. Le produit de deux matrices circulantes commute :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}_n^2, \quad \mathrm{M}_a \mathrm{M}_b = \mathrm{M}_b \mathrm{M}_a.$$

4. Soit $a \in \mathbb{C}^n$.
Les vecteurs propres de C_n sont des vecteurs propres de M_a.
Par conséquent M_a est diagonalisable.

Solution (**Ex.176** – *Propriétés des matrices circulantes*)

1. Remarquons que $\mathrm{M}_a = a_0 \mathrm{I}_n + a_1 \mathrm{C}_n + \cdots + a_{n-1} \mathrm{C}_n^{n-1}$ donc

$$\Gamma = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, \mathrm{C}_n, \dots, \mathrm{C}_n^{n-1}),$$

ce qui prouve que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
De plus, $(\mathrm{I}_n, \mathrm{C}_n, \dots, \mathrm{C}_n^{n-1})$ est libre :

$$a_0 \mathrm{I}_n + a_1 \mathrm{C}_n + \cdots + a_{n-1} \mathrm{C}_n^{n-1} = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$$

Γ est un sous-espace vectoriel de dimension n.

2. Soit $(\mathrm{M}_a, \mathrm{M}_b) \in \Gamma^2$.
Alors M_a et M_b sont combinaisons linéaires de $(\mathrm{I}_n, \mathrm{C}_n, \dots, \mathrm{C}_n^{n-1})$, donc $\mathrm{M}_a \mathrm{M}_b$ est combinaison linéaire de $(\mathrm{I}_n, \mathrm{C}_n, \dots, \mathrm{C}_n^{2n-}$ mais comme $\mathrm{C}_n^n = \mathrm{I}_n$, on a $\mathrm{C}_n^{n-1+k} = \mathrm{C}_n^{k-1}$ pour tout $k \in [[0\,;\ n-1]]$, donc $\mathrm{M}_a \mathrm{M}_b$ est combinaison linéaire de $(\mathrm{I}_n, \mathrm{C}_n, \dots, \mathrm{C}_n^{n-1})$, donc $\mathrm{M}_a \mathrm{M}_b \in \Gamma$.

3. Comme les puissances de C_n commutent entre elles ($\mathrm{C}_n^i \mathrm{C}_n^j = \mathrm{C}_n^j \mathrm{C}_n^i = \mathrm{C}_n^{i+j}$) et le produit des polynômes est commutatif,
$\mathrm{M}_a \mathrm{M}_b = \mathrm{Q}_a(\mathrm{C}_n)\mathrm{Q}_b(\mathrm{C}_n) = (\mathrm{Q}_a \times \mathrm{Q}_b)(\mathrm{C}_n) = (\mathrm{Q}_b \times \mathrm{Q}_a)(\mathrm{C}_n) = \mathrm{Q}_b(\mathrm{C}_n)\mathrm{Q}_a(\mathrm{C}_n)$
$\mathrm{M}_a \mathrm{M}_b = \mathrm{M}_b \mathrm{M}_a$.

4. Soit U un vecteur propre de C_n et λ la valeur propre associée.
$\mathrm{M}_a \mathrm{U} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{C}_n^k \right) \mathrm{U} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{C}_n^k \mathrm{U}$ or (récurrence) $\mathrm{C}_n^k \mathrm{U} = \lambda^k \mathrm{U}$, donc
$\mathrm{M}_a \mathrm{U} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k \mathrm{U} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k \right) \mathrm{U}$ ce qui prouve que U est un vecteur propre de M_a.
Donc tout vecteur propre de C_n est vecteurs propres de M_a.
Or C_n est diagonalisable : il existe une base formée de vecteurs propres de C_n, donc de M_a.
M_a est diagonalisable, et même

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{M}_a) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k, \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{C}_n) \right\} \overset{\lambda = \omega^j}{=} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}, j \in [[0\,;\ n-1]] \right\}.$$

Chapitre 51

Matrices compagnons, suites récurrentes, E.D.L. & localisation des racines d'un polynôme

[E3A-M1 – 2016 – PC – Exo 3] [E3A-M2 – 2019 – PSI – Partie 3] [CS-M1 – 2018 – PSI – Partie III]

Définition – Matrice compagnon d'un polynôme

Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0 \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. On appelle matrice compagnon du polynôme P la matrice

$$\mathrm{C_P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Parfois, $\mathrm{C_P}$ *est définie comme la transposée de cette matrice, ce qui ne modifie les propriétés essentielles des matrices compagnons.*

Exercice 177

Élements propres

Soit $\mathrm{C_P}$ la matrice compagnon du polynôme P.

1. Montrer que

$$\mathrm{C_P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow a_0 \neq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{P}(0) \neq 0.$$

2. Montrer que $\chi_{\mathrm{C_P}}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$. Que dire des valeurs propres de C ?

Au passage, étant donné un polynôme unitaire P*, cela permet de construire une matrice dont* P *est la polynôme caractéristique.*

3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{C_P})$ *i.e.* λ une racine de P. Montrer que

$$\mathrm{SEP}(\mathrm{C_P}, \lambda) = \mathrm{Ker}(\mathrm{C_P} - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}\right).$$

En particulier, tous les sous-espaces propres sont de dimension 1*.*

4. À quelle condition nécessaire et suffisante $\mathrm{C_P}$ est-elle diagonalisable ?

5. En utilisant une matrice compagnon, montrer que si les n scalaires λ_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$ sont deux à deux distincts, alors le déterminant de VANDERMONDE suivant n'est pas nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Solution (**Ex.177 –** *Élements propres*)

1. En développant suivant la première colonne, $\det\left(()\,\mathrm{C_P}\right) = (-1)^{n+2}a_0$ donne la conclusion.

2. $\chi_{\mathrm{C_P}}(\mathrm{X}) = \det\left(\mathrm{XI}_n - \mathrm{C_P}\right) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \mathrm{X} & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & \mathrm{X}+a_{n-1} \end{vmatrix}$

Une astuce :

• multiplier la dernière colonne par X^{n-1}, l'avant-dernière par X^{n-2}, jusque la deuxième par X, donc on calcule $\mathrm{X}^{1+2+\cdots+(n-1)}\chi_{\mathrm{C_P}}(\mathrm{X})$,

• sommer toutes les colonnes sur la dernière, celle-ci devient nulle, sauf son dernier coefficient qui vaut P(X),

• développer suivant cette colonne pour obtenir :

$$\mathrm{X}^{1+2+\cdots+(n-1)}\chi_{\mathrm{C_P}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{1+2+\cdots+(n-1)}\mathrm{P}(\mathrm{X}) \quad \textit{Cqfd.}$$

Donc $\chi_{\mathrm{P_C}}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$, et $\mathrm{Sp}(\mathrm{C_P}) = \{\alpha \in \mathbb{K},\ \mathrm{P}(\alpha) = 0\}$.

Autrement dit, les valeurs propres de $\mathrm{C_P}$ sont les racines de P.

3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{C_P})$. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

$\mathrm{X} \in \mathrm{SEP}(\mathrm{C_P}, \lambda) \iff \mathrm{C_P X} = \lambda \mathrm{X}$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-2}x_{n-1} - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ \mathrm{P}(\lambda)x_1 = 0 \end{cases} \overset{\mathrm{P}(\lambda)=0}{\iff} \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \end{cases}$$

$$\mathrm{SEP}(\mathrm{C_P},\lambda)=\mathrm{Ker}(\mathrm{C_P}-\lambda \mathrm{I}_n)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\end{pmatrix}\right).$$

4. En particulier, on a : $\forall\lambda\in\mathrm{Sp}(\mathrm{C_P}),\quad \dim(\mathrm{SEP}(\mathrm{C_P},\lambda))=1$.
Donc par le cours, $\mathrm{C_P}$ est diagonalisable si, et seulement si, pour toute valeur propre λ, $\omega(\lambda)=\dim(\mathrm{SEP}(\mathrm{C_P},\lambda)=1$, donc si, et seulement si, P est à racines simples.

5. Prenons $\mathrm{P}=(\mathrm{X}-\lambda_1)(\mathrm{X}-\lambda_2)\dots(\mathrm{X}-\lambda_n)$ et $\mathrm{C_P}$ la matrice compagnon de P. Alors
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}$$
est la matrice de passage vers une base de vecteurs propres de $\mathrm{C_P}$, donc est inversible et de déterminant non nul.

Exercice 178

Lien avec les suites récurrentes linéaires d'ordre n

Soit $(a_{n-1},\dots,a_1,a_0)\in\mathbb{K}^n$. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre n

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad u_{k+n}+a_{n-1}u_{k+n-1}+a_{n-2}u_{k+n-2}+\dots+a_0u_n=0\quad(\mathcal{R}).$$

Justifier les propriétés suivantes.

① Posons $\mathrm{P}=\mathrm{X}^n+a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1}+\dots+a_1\mathrm{X}+a_0\in\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

Avec $\mathrm{U}_k=\begin{pmatrix}u_k\\ u_{k+1}\\ \vdots\\ u_{k+n-1}\end{pmatrix}$, on a : $\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathrm{U}_{k+1}=\mathrm{C_P}\mathrm{U}_k$.

② Donc : $\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathrm{U}_k=\big(\mathrm{C_P}\big)^k\mathrm{U}_0$.

③ Si l'équation caractéristique
$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=0\quad(\mathcal{E})$$
admet exactement n solutions distinctes $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, alors
$$\exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n,\quad\forall k\in\mathbb{N},\quad u_k=\alpha_1\lambda_1^k+\dots+\alpha_n\lambda_n^k.$$
Ceci généralise le théorème sur les récurrences linéaires d'ordre 2, dans le cas où il y a 2 solutions distinctes à l'équation caractéristique.

Solution (**Ex.178 –** *Lien avec les suites récurrentes linéaires d'ordre n*)

1. Il n'y a qu'à écrire $(\mathcal{R})$ sous la forme
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad u_{k+n}=-a_{n-1}u_{k+n-1}-a_{n-2}u_{k+n-2}-\dots-a_0u_n.$$

2. Par récurrence immédiate.

3. Si $(\mathcal{E})$ a n solutions distinctes, P est scindé à racines simples car $(\mathcal{E})$ équivaut à $\mathrm{P}(x)=0$, donc $\mathrm{C_P}$ est diagonalisable, et admet $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ pour valeurs propres.
Il existe $\mathrm{Q}\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{C_P}=\mathrm{Q}\,diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\mathrm{Q}^{-1}$, donc
$$\mathrm{C_P^k}=\mathrm{Q}\,diag(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k)\mathrm{Q}^{-1}.$$
Surtout, je ne cherche pas à développer, même si on peut expliciter Q puisqu'on connaît les sous-espaces propres par la propriété précédente.

Les coefficients de C_P^k sont tous combinaisons linéaires (à coefficients constants, ceux de Q et Q^{-1} qui ne dépendent pas de k) des $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$.

Comme $U_k = \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \end{pmatrix} = (C_P)^k U_0$, u_k est combinaison linéaire de $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$, à coefficients constants.

Exercice 179

Lien avec les équations différentielles linéaires scalaires homogènes d'ordre n

Soit $(a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) \in \mathbb{K}^n$. On s'intéresse à l'équation différentielle d'ordre n

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{(EDL)}.$$

Justifier les propriétés suivantes.

1. Posons $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}_n[X]$.

Avec $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$, on a : $Y' = C_P Y$.

2. Si l'équation caractéristique

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (\mathcal{E})$$

admet exactement n solutions distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors

$$\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad y = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n x}.$$

Autrement, l'ensemble des solutions de (EDL) est

$$\mathrm{Vect}(x \mapsto e^{\lambda_1 x}, \dots, x \mapsto e^{\lambda_n x}).$$

Ceci généralise le théorème sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2, dans le cas où il y a 2 solutions distinctes à l'équation caractéristique.

Solution (**Ex.179 –** *Lien avec les équations différentielles linéaires scalaires homogènes d'ordre n*)

1. Il n'y a qu'à écrire (EDL) sous la forme

$$y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots - a_1 y' - a_0 y.$$

2. Si $(\mathcal{E})$ a n solutions distinctes, P est scindé à racines simples car $(\mathcal{E})$ équivaut à $P(x) = 0$, donc C_P est diagonalisable, et admet $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pour valeurs propres.

Il existe $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $C_P = Q\,diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q^{-1} = QDQ^{-1}$.

$$Y' = C_P Y \iff Y' = QDQ^{-1} \overset{Z=Q^{-1}Y}{\iff} Z' = DZ \iff \begin{pmatrix} z_1'(x) = \lambda_1 z_1(x) \\ \vdots \\ z_n'(x) = \lambda_n z_n(x) \end{pmatrix}$$

Ce qui ramène à n EDL d'ordre 1 indépendantes :

$$\exists(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n, \quad Z(x) = \begin{pmatrix} \beta_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ \beta_n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}.$$

Surtout, je ne cherche pas à développer, même si on peut expliciter Q puisqu'on connaît les sous-espaces propres par la propriété précédente. Je n'inverse pas non plus Q !!!

Or $Y = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \end{pmatrix} = QZ$, donc y est combinaison linéaire à coefficients ne dépendant pas de x (Q ne dépend pas de x) des n fonctions

$$x \mapsto e^{\lambda_1 x}, \dots, x \mapsto e^{\lambda_n x}.$$

Exercice 180

Localisation des racines d'un polynôme

Peut-on trouver un lien entre les racines d'un polynôme et ses coefficients ? Où chercher les racines d'un polynôme ? Si ses coefficients sont petits, ses racines sont-elles petites ?
Les matrices compagnons apportent une réponse à ces questions.
Justifier les propriétés suivantes.

1. *Petite considération générale*
Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,
$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = ||\textit{ligne } n^o i \textit{ de } \mathrm{A}||_1.$$
Alors : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}), \quad |\lambda| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |r_i|$.
Si les coefficients de A *ne sont pas grands, ses valeurs propres non plus.*

2. Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0 \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Alors toute racine λ de P vérifie
$$|\lambda| \leqslant \max\{|a_0|, |a_1| + 1, \ldots, |a_{n-1}| + 1\}.$$
Autrement dit, les racines de P *sont toutes situées dans les disques fermé de centre 0 et de rayon*
$$\mathrm{R} = \max\{|a_0|, |a_1| + 1, \ldots, |a_{n-1}| + 1\}.$$

3. Ainsi, je peux affirmer que les 1789 racines complexes de
$$\mathrm{X}^{1789} - 2\mathrm{X}^{1515} + 3\mathrm{X}^{1492} - \pi$$
sont toutes dans le disque de centre 0 et de rayon 4. Étonnant, non ?

Solution (**Ex.180 –** *Localisation des racines d'un polynôme*)

1. Soit X un vecteur propre de A associé à λ. De $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$, on tire : $\forall i \in [[1\,;\, n]], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i$, puis
$$|\lambda|\,|x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| \leqslant r_i\,||\mathrm{X}||_\infty.$$
En particulier pour l'indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = ||\mathrm{X}||_\infty$, on a
$$|\lambda|\,||\mathrm{X}||_\infty = |\lambda|\,|x_{i_0}| \leqslant r_{i_0}\,||\mathrm{X}||_\infty.$$
Comme $||\mathrm{X}||_\infty > 0$,
$$|\lambda| \leqslant r_{i_0} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |r_i|.$$

2. *On va appliquer la propriété précédente à* ${}^t\mathrm{C}_\mathrm{P}$ *dont les normes des lignes sont simples.*
Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0 \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Soit C_P la matrice compagnon de P. Toute racine λ est valeur propre de C_P donc de ${}^t\mathrm{C}_\mathrm{P}$. Or pour ${}^t\mathrm{C}_\mathrm{P}$, on a
$$r_1 = |a_0|, \text{ et : } \forall i \in [[2\,;\, n]], \quad r_i = |a_i| + 1.$$
Donc par **1.**, $|\lambda| \leqslant \max\{|a_0|, |a_1| + 1, \ldots, |a_{n-1}| + 1\}$

Chapitre 52

Matrices stochastiques

[CCP – 2016 – PSI –] [MP-M1 – 2017 – PC-PSI –]

Définition – Matrices stochastiques

Une matrice $\mathrm{M} = \left(m_{i,j}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont positifs et si, sur chacune de ses lignes, la somme des coefficients vaut 1. Notons $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit :

$$\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n \ si, et seulement si, \begin{cases} \forall (i,j) \in [[\,1\,;\ n\,]]^2, \quad m_{i,j} \geqslant 0 \quad (\Pi) \\ \forall i \in [[\,1\,;\ n\,]], \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \quad (\Sigma) \end{cases}$$

Exercice 181

Propriétés générales des matrices stochastiques

1. *Très utile pour caractériser la propriété* (Σ).

Soit $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ la colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1.

Montrer que

$$\mathrm{M} \text{ vérifie } (\Sigma) \text{ si, et seulement si, } \mathrm{MU} = \mathrm{U}.$$

2. Justifier que $\mathcal{S}_n$ n'est pas un espace vectoriel.

3. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est stable pour la multiplication :

$$\forall (\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathcal{S}_n^2, \quad \mathrm{MN} \in \mathcal{S}_n.$$

4. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est une partie fermée et convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Justifier que si M est stochastique et la suite de ses puissances (M^k) converge, alors $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \mathrm{M}^k$ est stochastique.

Solution (**Ex.181 –** *Propriétés générales des matrices stochastiques*)

Maîtriser le produit matriciel...

1. $\forall i \in [[\,1\,;\ n\,]], \quad (\mathrm{MU})_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} u_j = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$, donc M vérifie (Σ) si, et seulement si, $\mathrm{MU} = \mathrm{U}$.

2. $\mathcal{S}_n$ a la fâcheuse manie de ne pas contenir 0_n...

3. Soit $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathcal{S}_n^2$.

$\forall (i,j) \in [[\,1\,;\ n\,]]^2, \quad (\mathrm{MN})_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j} \geqslant 0$ donc MN vérifie (Π).

$\mathrm{MNU} = \mathrm{M}(\mathrm{NU}) = \mathrm{MU} = \mathrm{U}$ donc MN vérifie (Σ).

4. • L'ensemble $\mathcal{M}^+$ des matrices à coefficients positifs est fermé, car c'est l'intersection des n^2 ensembles fermés (par continuité de $\mathrm{M} \mapsto m_{i,j}$)

$$\mathcal{M}^+_{i,j} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), m_{i,j} \geqslant 0\}.$$

De plus $\mathcal{L} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), ||\mathrm{MU} - \mathrm{U}|| = 0\}$ est fermé car $\mathrm{M} \mapsto ||\mathrm{MU} - \mathrm{U}||$ est continue.

Donc $\mathcal{S}_n = \mathcal{L} \cap \mathcal{M}^+$ est fermé.

On pouvait aussi raisonner par coordonnées, et expliquer que si une suite de matrices stochastiques converge, alors la limite de chaque coordoonée est la limite d'une suite positive, donc est positive, et la limite des sommes par lignes est 1 *puisque ces sommes valent toujours* 1.

• Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{S}_n$. Soit $\lambda \in [0\,;\,1]$.
(i) $\forall (i,j) \in [[1\,;\,n]]^2, \quad ((1-\lambda)\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N})_{i,j} = (1-\lambda)m_{i,j} + \lambda n_{i,j} \geqslant 0$
(ii) $((1-\lambda)\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N})\mathrm{U} = (1-\lambda)\mathrm{MU} + \lambda\mathrm{NU} = (1-\lambda+\lambda)\mathrm{U} = \mathrm{U}$
donc : $\forall \lambda \in [0\,;\,1], \quad (1-\lambda)\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N} \in \mathcal{S}_n$, *i.e.* $[\mathrm{MN}] \subset \mathcal{S}_n$.

5. **5.**, **3.** et **4** entraînent que si M est stochastique et la suite de ses puissances (M^k) converge, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{M}^k$ est stochastique, car toutes les puissances sont stochastiques...

Exercice 182

Du côté des éléments propres

Soit M une matrice stochastique d'ordre n.

1. Justifier que $1 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$ et $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(\mathrm{M},1)$ puisque $\mathrm{MU} = \mathrm{U}$.

2. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$ alors $|\lambda| \leqslant 1$.

3. Montrer que si pour tout $k \in [[1\,;\,n]], \qquad m_{k,k} \neq 0$, alors la seule valeur propre de M de module 1 est 1.

4. *On peut démontrer que si tous les coefficients de* M *sont strictement positifs, la dimension de* SEP(M, 1) *vaut* 1 *(théorème de Perron-Frobenius).*
Montrer que si on suppose de plus M diagonalisable, alors la suite $\left(\mathrm{M}^k\right)$ converge vers une matrice de rang 1 de la forme
$$\mathrm{M}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \text{ où } p_1+p_2+\cdots+p_n = 1.$$

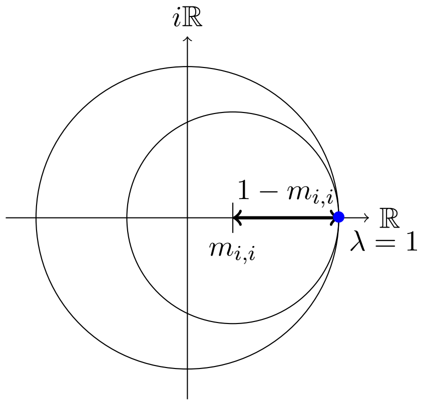
5. Soit
$$\mathrm{M} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$
Vérifier que M est stochastique et non-diagonalisable.
Moralité : toute matrice stochastique même à coefficients strictement positifs n'est pas nécessairement diagonalisable

Solution (**Ex.182** – *Du côté des éléments propres*)

1. ... car $\mathrm{MU} = 1 \times \mathrm{U}$.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$ et $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ tel que $\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$. Soit $i \in [[1\,;\,n]]$ tel que $|x_i| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j| > 0$. La i–ème ligne de $\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$ fournit
$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j = \lambda x_i \quad (\mathcal{P})$$
Et par l'inégalité triangulaire
$$|\lambda|\,|x_i| \leqslant \sum_{j=i}^{n} m_{i,j}\,|x_j| \leqslant \sum_{j=i}^{n} m_{i,j}\,|x_i| \leqslant 1 \times |x_i|$$
donc $|\lambda| \leqslant 1$ puisque $|x_i| > 0$.

3. Je continue avec les mêmes notations, en supposant de plus $|\lambda| = 1$. $(\mathcal{P})$ fournit
$$(\lambda - m_{i,i})x_i = \sum_{j\neq i} m_{i,j}x_j \text{ donc } \lambda - m_{i,i} = \sum_{j\neq i} m_{i,j}\frac{x_j}{x_i}$$
L'inégalité triangulaire permet d'écrire
$$1 - m_{i,i} = |\lambda| - m_{i,i} \leqslant |\lambda - m_{i,i}| \leqslant \sum_{j\neq i} m_{i,j}\left|\frac{x_j}{x_i}\right| \leqslant \sum_{j\neq i} m_{i,j} = 1 - m_{i,i}.$$
Puisque les membres extrêmes sont égaux, ces inégalités sont toutes des égalités et en particulier $1-m_{i,i} = |\lambda - m_{i,i}|$. Donc λ est sur le cercle de centre $m_{i,i}$ et de rayon $1 - m_{i,i}$, et comme $|\lambda| = 1$, λ est aussi sur le cercle unité, et il n'y a qu'une possibilité car ces deux cercles sont tangents en 1 :



. Donc $\lambda = 1$, *Cqfd*.

④ Si on suppose de plus M diagonalisable, alors M est semblable à $\mathrm{D} = diag(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ avec $\forall i \in [\![2\,;\ n]\!], |\lambda_i| < 1$ d'après ③.

Du coup, $\mathrm{D}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \Delta = diag(1, 0, \ldots, 0)$.

Écrivons $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Alors $\mathrm{M}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{L} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$.

Ce qui prouve déjà que la suite $\left(\mathrm{M}^k\right)$.

De plus L est semblable à Δ, de rang 1, donc L est de rang 1. Donc toutes ses lignes sont proportionnelles, mais L est stochastique car limite d'une suite de matrices stochastiques ($\mathcal{S}_n$ est fermé et stable par produit, ça peut servir !). Donc ses lignes sont toutes égales entre elles, car leur somme vaut toujours 1. Donc
$$\mathrm{M}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{L} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \text{ où } p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

4. M admet pour polynôme caractéristique $\chi_\mathrm{M} = \mathrm{X}^2(\mathrm{X} - 1)$ avec $\dim(\mathrm{E}_0) = \dim(\ker(\mathrm{M})) = 3 - \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 1 \neq \omega(0) = 2$.

Chapitre 53

Formes bilinéaires & formes quadratiques

[CCP – 2020 – PC – Exo no2]

Bien que les formes bilinéaires ou quadratiques ne fassent pas l'objet d'une étude systématique dans le programme de P.C. – à l'exception notable des formes bilinéaires symétriques définies positives, alias produits scalaires, on les retrouve dans de nombreux sujets et les petits exercices suivants constituent une entrée en matière incontournable.

Définitions –

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\varphi : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{K}$.

On dit que :

1. φ est *linéaire à gauche* si
$$\forall v \in \mathrm{E}, \quad \varphi_g : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, u \mapsto \varphi(u, v)$$
est linéaire.
Autrement dit, si, et seulement si,
$$\forall (u, u', v) \in \mathrm{E}^3, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \varphi(u + \lambda u', v) = \varphi(u, v) + \lambda \varphi(u', v).$$

2. φ est *linéaire à droite* si
$$\forall u \in \mathrm{E}, \quad \varphi_d : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, v \mapsto \varphi(u, v)$$
est linéaire.
Autrement dit, si, et seulement si,
$$\forall (u, v, v') \in \mathrm{E}^3, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \varphi(u, v + \lambda v') = \varphi(u, v) + \lambda \varphi(u, v').$$

3. φ est *bilinéaire* si φ est à la fois linéaire à gauche et linéaire à droite.

$\boxed{\text{Opératoirement parlant, la } \textit{bilinéarité induit la distributivité :}}$

$\forall (u, u', v,') \in \mathrm{E}^4,$
$$\varphi(u + u', v + v') = \varphi(u, v) + \varphi(u, v') + \varphi(u', v) + \varphi(u', v').$$

4. φ est *symétrique* si
$$\forall (u, v) \in \mathrm{E}^2, \quad \varphi(u, v) = \varphi(v, u).$$

$\boxed{\text{Opératoirement parlant, la } \textit{bilinéarité est la commutativité.}}$

5. φ est *antisymétrique* si
$$\forall (u, v) \in \mathrm{E}^2, \quad \varphi(u, v) = -\varphi(v, u).$$

6. φ est *alternée* si
$$\forall u \in \mathrm{E}, \quad \varphi(u, u) = 0.$$

7. φ est *positive* (respectivement *négative*) si
$$\forall u \in \mathrm{E}, \quad \varphi(u, u) \geq 0 \quad (\text{resp. } \varphi(u, u) \leq 0).$$

8. φ est *définie positive* (respectivement *définie négative*) si
$$\forall u \in \mathrm{E} \setminus \{0\}, \quad \varphi(u, u) > 0 \quad (\text{resp. } \varphi(u, u) < 0).$$

9. On appelle *forme quadratique* toute application
$$q : \mathrm{E} \to \mathbb{K}$$
pour laquelle il existe une forme bilinéaire φ telle que
$$\forall u \in \mathrm{E}, \quad q(u) = \varphi(u, u).$$
Dans ce cas, on dit que q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire φ. *Voir le premier exercice pour la non-unicité de φ.*

Exercice 183

Quelques généralités

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et φ une forme bilinéaire sur E.

1. Montrer que φ est alternée si, et seulement si, elle est antisymétrique.

2. Soit q la forme quadratique associée à φ.

a) On suppose dans cette sous-question uniquement que φ est symétrique.
Montrer que, pour tout (u, v) de E^2,

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{4}\big(q(u+v) - q(u-v)\big).$$

Cette identité s'appelle l'*identité du parallélogramme.*

b) On ne suppose plus φ symétrique. Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire *symétrique* ψ telle que

$$\forall u \in \mathrm{E}, \quad q(u) = \psi(u, u).$$

On pourra s'intéresser à $(u, v) \mapsto \dfrac{1}{2}\big(\varphi(u, v) + \varphi(v, u)\big)$.

Solution (**Ex.183 –** *Quelques généralités*)

1. • Supposons φ alternée. Alors pour tout $(u, v) \in \mathrm{E}^2$, par bilinéarité,

$$\varphi(u+v, u+v) = \varphi(u, u) + \varphi(u, v) + \varphi(v, u) + \varphi(v, v)$$

donc $0 = \varphi(u, v) + \varphi(v, u)$ *i.e.* $\varphi(v, u) = -\varphi(u, v)$.
Donc φ est antisymétrique.

• Supposons φ antisymétrique. Alors pour tout $u \in \mathrm{E}$, en permutant u et u (si !)

$$\varphi(u, u) = -\varphi(u, u)$$

donc $2\varphi(u, u) = 0$ *i.e.* $\varphi(u, u) = 0$.
Donc φ est alternée.

2. a) On remarque que, par bilinéarité,

$$q(u \pm v) = \varphi(u, u) \pm 2\varphi(u, v) + \phi(v, v)$$

d'où

$$q(u+v) - q(u-v) = 4\varphi(u, v).$$

b) Soit $\psi : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{K}, (u, v) \mapsto \dfrac{1}{2}\big(\varphi(u, v) + \varphi(v, u)\big)$.

• ψ est clairement symétrique.

• ψ est linéaire à gauche :

$$\begin{aligned}\psi(\lambda u + u', v) &= \frac{1}{2}\big(\lambda\varphi(u, v) + \varphi(u', v) + \lambda\varphi(v, u) + \varphi(v, u')\big)\\ &= \lambda\frac{1}{2}\big(\varphi(u, v) + \varphi(v, u)\big) + \frac{1}{2}\big(\varphi(u', v) + \varphi(v, u')\big)\\ &= \lambda\psi(u, v) + \psi(u', v)\end{aligned}$$

• Par conséquent ψ est bilinéaire car linéaire à gauche et symétrique (plutôt que de recommencer ce qui précède) :

$$\begin{aligned}\psi(u, \lambda v + v') &\overset{sym.}{=} \psi(\lambda v + v', u) \overset{lin.\ gauche}{=} \lambda\psi(v, u) + \psi(v', u)\\ &\overset{sym.}{=} \lambda\psi(u, v) + \psi(u, v')\end{aligned}$$

• $\forall u \in \mathrm{E}, \psi(u, u) = \dfrac{1}{2}(\varphi(u, u) + \varphi(u, u)) = \varphi(u, u) = q(u)$.

À ce stade, on a montré qu'il existe une forme bilinéaire symétrique dont q est la forme quadratique associée.

• L'identité du parallélogramme précédente montre l'unicité d'une telle forme bilinéaire symétrique.

Exercice 184

Représentation matricielle

On suppose que E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel *de dimension finie n.*
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout vecteur x de E, on note X la colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ représentant x dans la base $\mathcal{B}$.
Soit φ une forme bilinéaire.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \varphi(x, y) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XAY} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AY}.$$

2. Caractériser sur la matrice A le fait que φ est symétrique, respectivement antisymétrique.

3. On suppose dans cette question que $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et que q est la forme quadratique associée à φ.

a) Quelle est l'écriture matricielle de $q(x)$ pour $x \in \mathbb{K}^n$?

b) Montrer que q est un polynôme homogène de degré 2 en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *i.e.* il existe n coefficients scalaires $(\alpha_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ coefficients scalaires $(\beta_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ tels que

$$\forall (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \qquad q\big((x_1,\ldots,x_n)\big) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \beta_{i,j} x_i x_j.$$

4. Dans cette question, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que φ est symétrique.

a) Justifier que A est diagonalisable.

b) Justifier que φ est positive, respectivement définie positive, si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset [\,0\,;\ +\infty[$, respectivement $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset\,]\,0\,;\ +\infty[$.

c) Caractériser de façon analogue le fait que φ est négative, respectivement définie négative.

Solution (**Ex.184** – *Représentation matricielle*)

1. Montrer qu'il existe une unique matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \varphi(x,y) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XAY} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AY}.$$

• *Analyse* – Supposons que A conviennent. En prenant des vecteurs de la base, on a :

$$\varphi(e_i, e_j) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{E}_i \mathrm{A} \mathrm{E}_j = a_{i,j}$$

.

Le seul candidat est la matrice $\mathrm{A} = \big(\varphi(e_i,e_j)\big)$, ce qui prouve déjà l'unicité en cas d'existence.

• *Synthèse* – Soit $\mathrm{A} = \big(\varphi(e_i,e_j)\big)_{i,j}$.

Par le calcul précédent, $\forall (i,j) \in [\![1\,;\ n]\!]\,, \varphi(e_i,e_j) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{E}_i\mathrm{AE}_j$.

On a alors pour $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$,

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(e_i,e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j\, {}^{\mathrm{t}}\mathrm{E}_i\mathrm{AE}_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\, {}^{\mathrm{t}}\mathrm{E}_i\mathrm{AY} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XAY}\end{aligned}$$

• *Bilan* – Il existe bel et bien une unique matrice A vérifiant la propriété voulue.

2. • Comme $\forall (i,j), a_{i,j} = \varphi(e_i,e_j)$, A est symétrique si φ est symétrique et antisymétrique si φ est antisymétrique.

• Réciproquement, si A est symétrique alors
$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \varphi(y,x) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{YAX} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Y}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{AX} = {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{AY})\mathrm{X} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, or une matrice d'ordre 1 est égale sa transposée (;-)),
$\varphi(x,y) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\big({}^{\mathrm{t}}(\mathrm{AY})\big) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XAY} = \varphi(x,y)$.
Donc φ est symétrique.
Le même calcul montre que si A est antisymétrique alors φ est antisymétrique.

• Donc φ est symétrique si, et seulement si, A est symétrique, et antisymétrique si, et seulement si, A est antisymétrique.

3. a) $\forall x \in \mathrm{E}, \qquad q(x) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XAX}$.

b) Le calcul explicite de ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{XAX}$ donne
$q\big((x_1,\ldots,x_n)\big) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,j} + a_{j,i}) x_i x_j$, qui fournit l'expression voulue en posant $\alpha_i = a_{i,i}$ et $\beta_{i,j} = a_{i,j} + a_{j,i}$.

4. a) Par la question 2, A est symétrique réelle donc diagonalisable.

b) • Si A admet une valeur propre λ négative strictement avec U vecteur propre associé,
$\varphi(u,u) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{UAU} = \lambda\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{UU} = \lambda\,||\mathrm{U}||^2 < 0$ donc φ n'est pas positive.
De même si A admet une valeur propre négative, φ n'est pas définie négative.

• Soit P une matrice orthogonale et $\mathrm{D} = diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ telles que ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{PAP} = \mathrm{D}$. On a :
$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \varphi(x,x) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XAX} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{PD}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{PX} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{YDY}$ en posant $\mathrm{Y} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{PX}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \varphi(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \text{ où } \mathrm{Y} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{PX}.$$

Donc si $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset [\,0\,;\ +\infty[$, $\forall x \in \mathrm{E}, \varphi(x,x) \geq 0$.
Et si $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset\,]\,0\,;\ +\infty[$, non seulement $\forall x \in \mathrm{E}, \varphi(x,x) \geq 0$, mais en plus

$\varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Y} = 0 \Longrightarrow \mathrm{X} = 0 \Longrightarrow x = 0$ puisque $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$.

• Finalement, φ est positive, respectivement définie positive, si, et seulement si, $\mathrm{Sp(A)} \subset [0\,;\ +\infty[$, respectivement $\mathrm{Sp(A)} \subset]0\,;\ +\infty[$.

c) φ est négative, respectivement définie négative, si, et seulement si, $\mathrm{Sp(A)} \subset]-\infty\,;\ 0]$, respectivement $\mathrm{Sp(A)} \subset]-\infty\,;\ 0[$.

Exercice 185

Éléments de géométrie symplectique

Et d'abord, pourquoi s'intéresser aux formes symplectiques ?
Au début du XIX-ème siècle, Lagrange a développé les méthodes dites de « variation des constantes » dans le cadre de l'étude du mouvement des planètes - il avait à la fin du siècle précédent largement contribué à l'étude des équations et systèmes différentiels par sa 'théorie générale de la variation des constantes' (1775). Si les lois de Kepler conjuguées aux principes de la mécanique de Newton permettent une détermination explicite du mouvement des planètes connaissant soit les 6 données de ses conditions initiales[1] *soit ses 6 éléments képlériens*[2]*, le problème se corse dès que l'on souhaite tenir compte des perturbations (interactions) engendrées par la présence des autres planètes. Lagrange propose de raisonner comme si la présence d'un troisième corps (voire plus) ne remettait pas en cause le modèle général de résolution mais modifiait continuellement chacune des 6 constantes précédentes, l'expression « variation des constantes » prenant à nouveau tout son sens.*
Dans ses travaux de 1808 à 1811, il observe que l'application

$$\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, (x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+i} - y_i x_{n+1}$$

joue un rôle important dans la description l'étude du mouvement des planètes (avec $n = 3$ *dans ce cas particulier). Ces travaux marquent le début de l'étude des formes symplectiques et de la géométrie symplectique.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note, pour tout $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2n} \in \mathbb{R}^{2n}$, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ la colonne représentant x dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$.

1. a) Déterminer une matrice $\mathrm{J}_n \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{2n})^2, \qquad \omega(x,y) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}} \mathrm{J}_n \mathrm{Y}.$$

b) Montrer que ω est une forme bilinéaire antisymétrique.

c) On appelle *noyau de* ω l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(\omega) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n} | \forall y \in \mathbb{R}^{2n}, \omega(x,y) = 0 \right\}.$$

Montrer que $\mathrm{Ker}(\omega) = \{0\}$.
On dit que ω est *non dégénérée.*
Une forme bilinéaire antisymétrique et non dégénérée est dite symplectique.

2. On dit que deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^{2n}$ sont orthogonaux pour ω si $\omega(x,y) = 0$.
Pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^{2n}$, on appelle orthogonal pour ω de F, ou ω-orthogonal de F, l'ensemble noté F^{ω} défini par

$$\mathrm{F}^{\omega} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n} | \forall y \in \mathrm{F}, \omega(x,y) = 0 \right\}.$$

a) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$, alors F^{ω} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$.

b) Montrer que si F est une droite vectorielle, alors $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}^{\omega}$.
Voici qui constitue une sérieuse différence avec la notion d'orthogonalité euclidienne, i.e. pour un produit scalaire.

3. On se propose d'établir que pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^{2n}$,

$$\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{F}^{\omega}) = \dim(\mathbb{R}^{2n}) = 2n.$$

Ce qui n'induit pas que F *et* F^{ω} *soient orthogonaux, vu l'exemple 2.b).*

1. Les position et vitesse initiales étant décrites chacune par 3 coordonnées nécessitent un ensemble de 6 données.
2. Lagrange retient le demi-grand axe a, la paramètre de l'ellipse b, l'époque c, l'inclinaison du plan de l'orbite i sur un plan de référence, la longitude des nœuds h et la longitude du périhélie k, autant d'éléments familiers à l'astronome... que la consultation d'un ouvrage *ad hoc* pourra expliquer.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$.

On note E^* l'espace des formes linéaires de $\mathbb{R}^{2n}$:

$$E^* \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} \text{ linéaire}\}$$

Cet espace vectoriel s'appelle le *dual* de $\mathbb{R}^{2n}$.

a) Justifier que $\dim(E^*) = 2n$.

b) On note F^0 l'ensemble

$$F^0 \overset{\text{déf.}}{=} \{f \in E^* | \forall x \in F, f(x) = 0\}.$$

Justifier que F^0 est un sous-espace vectoriel de E^*.

c) Soit $(u_1, \dots, u_r)$ une base de F orthonormale pour le produit scalaire canonique. Montrer que

$$f \in F^0 \text{ si, et seulement si, } \forall i \in [\![1\,;\ r]\!], f(u_i) = 0.$$

d) Montrer que

$$\varphi : E^* \to \mathbb{R}^r, f \mapsto (f(u_1), \dots, f(u_r))$$

est linéaire et surjective. *On pourra s'intéresser aux applications $f_i : u \mapsto \langle u, u_i \rangle$ par exemple...*

e) En déduire que $\dim(F^0) = 2n - r$.

f) Montrer que l'application linéaire

$$\Omega : \mathbb{R}^{2n} \to E^*, x \mapsto \Omega(x) : y \mapsto \omega(x, y)$$

est un isomorphisme.

g) Vérifier que $F^\omega = \Omega^{-1}(F^0)$.

h) En déduire que $\dim(F^\omega) = 2n - \dim(F)$.

4. On appelle isométrie pour ω, ou ω-isométrie, tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^{2n}$ conservant ω, *i.e.* tel que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{2n})^2, \qquad \omega(f(x), f(y)) = \omega(x, y).$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ et M la matrice représentant f dans la base canonique.

Montrer que f est une ω-isométrie si, et seulement si, $M^T J_n M = J_n$.

On dit alors que M est une matrice symplectique.

On pourra étudier le § relatif aux « matrices symplectiques » pour étudier quelques propriétés de ces matrices.

Solution (**Ex.185** – *Éléments de géométrie symplectique*)

1. a) La bilinéarité de ω ne posant pas de problème, les calculs menés dans l'exercice précédent montrent que $J_n = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ convient.

b) Toujours par l'exercice précédent, ω est une forme bilinéaire antisymétrique car J_n est antisymétrique.

c) Supposons que $\mathrm{Ker}(\omega) \neq \{0\}$ et soit x un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(\omega)$. Soit $i \in [\![1\,;\ 2n]\!]$ un indice tel que $x_i \neq 0$.

Si $i \in [\![1\,;\ n]\!]$, alors $\omega(x, e_{n+i}) = 1$, ce qui est absurde.

Si $i \in [\![n+1\,;\ 2n]\!]$, alors $\omega(x, e_{i-n}) = -1$, ce qui est absurde.

Dans tous les cas, ceci est impossible, donc $\mathrm{Ker}(\omega) = \{0\}$

2. On dit que deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^{2n}$ sont orthogonaux pour ω si $\omega(x, y) = 0$.

Pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^{2n}$, on appelle orthogonal pour ω de F, ou ω-orthogonal de F, l'ensemble noté F^ω défini par

$$F^\omega = \{x \in \mathbb{R}^{2n} | \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}.$$

a) • $F^\omega \subset \mathbb{R}^{2n}$.

• $0 \in F^\omega$ donc $F^\omega \neq \emptyset$.

• Si $(x, x') \in (F^\omega)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors par bilinéarité, $\forall y \in F$,

$$\omega(x + \lambda x', y) = \omega(x, y) + \lambda\omega(x', y) = 0$$

donc $x + \lambda x' \in F^\omega$.

• Donc F^ω est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$.

b) Soit $u \neq 0$ et $F = \mathrm{Vect}(u)$. Soit $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u$.

Alors $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $\omega(x, \mu u) = \lambda\mu\omega(u, u) = 0$, donc $\forall y \in F, \omega(x, y) = 0$. Donc $x \in F^\omega$.

Ainsi $F \subset F^\omega$.

3. a) $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}) = \dim(\mathbb{R}^{2n}) \dim(\mathbb{R}) = 2n \times 1 = 2n$.

b) F^0 contient la forme linéaire nulle, et si f et g sont dans F^0 et λ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\forall x \in F, (\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x) = 0.$$

Donc $\lambda f + g$ est dans F^0.

F^0 est bien un sous-espace vectoriel de E^*.

c) • L'implication provient de la définition de F^0 puisque $(\forall i), u_i \in F$.

• La réciproque provient de la linéarité de f et du fait que $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ est une base de F (tout vecteur de F est combinaison linéaire des u_i...).

d) La linéarité de φ est banale.

Pour tout i dans $[[1\,;\ r]]$, $f_i : u \mapsto \langle u, u_i\rangle$ est une forme linéaire telle que $\varphi(f_i) = b_i$, i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^r$ car $f_i(u_j) = \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{i,j}$ (de l'intérêt de prendre une base orthonormale...).

Donc : $\forall i \in [[1\,;\ r]]\,, b_i \in \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Vect}((b_i)_{1\leqslant i\leqslant r}) = \mathbb{R}^r$, donc $\mathbb{R}^r \subset \mathrm{Im}(\ \check{}\ )$, donc φ est surjective.

e) Par la formule du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi) = 2n - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2n - r.$$

Or par c), $\mathrm{Ker}(\varphi) = F^0$. Donc $\dim(F^0) = 2n - r$.

f) • $\dim(E) = \dim(E^*)$.

• Supposons $\Omega(x) = 0$. Alors : $\forall y \in \mathbb{R}^{2n}, \omega(x, y) = 0$. Donc $x = 0$ car ω est non dégénérée (voir question1).

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.

• Par l'égalité des dimensions, φ est bijective : c'est un isomorphisme.

g) $$\begin{aligned} F^\omega &= \big\{x \in \mathbb{R}^{2n} | \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\big\} \\ &= \big\{x \in \mathbb{R}^{2n} | \forall y \in F, \Omega(x)(y) = 0\big\} \\ &= \big\{x \in \mathbb{R}^{2n} | \Omega(x) \in F^0\big\} \\ &= \Omega^{-1}(F^0) \end{aligned}$$

h) Comme Ω^{-1} est un isomorphisme (réciproque de l'isomorphisme Ω), il conserve la dimension.

Donc $\dim(F^\omega) = \dim(F^0) = 2n - r = 2n - \dim(F)$.

4. • Si $M^T J_n M = J_n$ alors $\forall (x, y) \in \big(\mathbb{R}^{2n}\big)^2$

$$\omega(f(x), f(y)) = (MX)^T J_n MY = X^T M^T J_n MY = X^T J_n Y = \omega(x, y).$$

Donc f est une ω-isométrie.

• Si f est une ω-isométrie. Alors pour tout (i, j) dans $[[1\,;\ 2n]]^2$,

$\omega(e_i, e_j) = {E_i}^T J_n E_j = (J_n)_{i,j}$ et par isométrie

$\omega(e_i, e_j) = \omega(f(e_i), f(e_j)) = {E_i}^T\big(M^T J_n M\big)E_j = \big(M^T J_n M\big)_{i,j}$,

donc $M^T J_n M = J_n$.

• Ainsi, f est une ω-isométrie si, et seulement si, $M^T J_n M = J_n$.

Chapitre 54

Matrices symétriques positives et strictement positives

[CCP – 2020 – PC – Exo no2][E3A-M1 – 2018 – PSI – Exo no1]

Définition – Matrices symétriques positives & strictement positives, et racines carrées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B} = \big(\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n\big)$ la base canonique de E. On munit E du produit scalaire canonique :

$$\forall (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{E}, \qquad \big(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}\big) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XY}.$$

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{E}, \qquad {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XSX} \geqslant 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{E} \setminus \{0\}, \qquad {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XSX} > 0.$$

Exercice 186

Quelques observations

Justifier les propriétés suivantes.

1. Si S est symétrique, $\forall \mathrm{X} \in \mathrm{E}, \qquad {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XSX} = \big(\mathrm{SX} \mid \mathrm{X}\big) = \big(\mathrm{X} \mid \mathrm{SX}\big)$.
2. *Sur un excellent moyen de récupérer les coefficients d'une matrice par un produit matriciel.*
   Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque. $\forall (i,j) \in [[\,1\,;\; n]]^2, \quad {}^{\mathrm{t}}\mathrm{E}_i\mathrm{ME}_j = m_{i,j}$.
3. Si P est une matrice de projecteur orthogonal distincte de I_n, alors $\mathrm{P} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ mais $\mathrm{P} \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Si $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ n'est pas inversible, alors $\mathrm{S} \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
5. **Fake news –**
   Si $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, voire $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors les coefficients de S sont tous positifs, voire strictement positifs ... **NON !**
   Par exemple, soit $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Alors : $\forall \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
   $${}^{\mathrm{t}}\mathrm{XSX} = (x \;\; y) \begin{pmatrix} x - y \\ -x + 5y \end{pmatrix} = x^2 - 2xy + 5y^2 = (x-y)^2 + 4y^2 > 0...$$

Solution (**Ex.186 –** *Quelques observations*)

1. $\big(\mathrm{SX} \mid \mathrm{X}\big) = {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{SX})\mathrm{X} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{SX} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XSX} = \big(\mathrm{X} \mid \mathrm{SX}\big)$
2. ME_j donne la $j-$ème colonne de M, et en multipliant à gauche par E_i, on récupère son $i-$ème coefficient.
3. • P vérifie $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$ (projecteur) et ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{P} = \mathrm{P}$ (projecteur orthogonal donc endomorphisme symétrique).
   $\forall \mathrm{X} \in \mathrm{E}, \quad {}^{\mathrm{t}}\mathrm{XPX} \overset{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{PP}=\mathrm{P}^2=\mathrm{P}}{=} {}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{PP})\mathrm{X} = {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{PX})(\mathrm{PX}) = ||\mathrm{PX}||^2 \geqslant 0.$
   Donc $\mathrm{X} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   • Mais si je prends $\mathrm{X} \in \ker(\mathrm{P})$ avec $\mathrm{X} \neq 0$,

${}^{t}\mathrm{XPX} = {}^{t}\mathrm{X} \times 0 = 0$ bien que $\mathrm{X} \neq 0$.
Donc $\mathrm{X} \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

4. D'ailleurs plus généralement, si S n'est pas inversible, alors en prenant $\mathrm{X} \in \ker(\mathrm{S}) \setminus \{0\}$, on a : ${}^{t}\mathrm{XSX} = {}^{t}\mathrm{X} \times 0 = 0$, donc $\mathrm{S} \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 187

Fabriquer des matrices symétriques positives et strictement positives pour pas cher

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} = {}^{t}\mathrm{AA}$.

1. Montrer que $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

2. Montre que, si de plus A est inversible, alors $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Solution (**Ex.187 –** *Fabriquer des matrices symétriques positives et strictement positives pour pas cher*)

1. ${}^{t}\mathrm{S} = {}^{t}({}^{t}\mathrm{AA}) = {}^{t}\mathrm{A}\,{}^{t}({}^{t}\mathrm{A}) = {}^{t}\mathrm{AA} = \mathrm{S}$ donc $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{E}, \quad {}^{t}\mathrm{XSX} = {}^{t}\mathrm{X}\,{}^{t}\mathrm{AAX} = {}^{t}(\mathrm{AX})\mathrm{AX} = ||\mathrm{AX}||^2 \geqslant 0$ donc $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

2. Si de plus A est inversible, alors
${}^{t}\mathrm{XSX} = 0 \Longrightarrow ||\mathrm{AX}||^2 = 0 \Longrightarrow \mathrm{AX} = 0 \overset{\mathrm{A} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})}{\Longrightarrow} \mathrm{X} = 0$, donc
$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{E}, (\mathrm{X} \neq 0) \Longrightarrow {}^{t}\mathrm{XSX} > 0$ donc $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 188

Caractérisation par les valeurs propres

Où on apprend que le signe (strict) des valeurs propres est primordial dans cette histoire.
Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On sait déjà que S est diagonalisable. Démontrer les équivalences suivantes :

1. $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(\mathrm{S}) \subset [\,0\,;\ +\infty[$.

2. $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(\mathrm{S}) \subset \,]\,0\,;\ +\infty[$.
Observation – Sur l'exemple *« fake news »*, $\chi_{\mathrm{S}} = \mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X} + 4$, le produit des valeurs propres vaut 4 donc elles sont de même signe, et la somme vaut 6 donc elles sont strictement positives, donc $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. Notez que je n'ai pas déterminé les valeurs propres pour conclure (pour info $\lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = 3 \pm \sqrt{5} > 0$).

Solution (**Ex.188 –** *Caractérisation par les valeurs propres*)
Par le théorème spectral, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (*orthogonale, dit le théorème spectral*) telle que ${}^{t}\mathrm{PSP} = \mathrm{D} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$. On a : ${}^{t}\mathrm{XSX} = {}^{t}\mathrm{XPD}\,{}^{t}\mathrm{PX} = {}^{t}({}^{t}\mathrm{PX})\mathrm{D}({}^{t}\mathrm{PX})$

Posons alors $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^{t}\mathrm{PX}$ (*on va jusqu'au bout du changement de base...*) Alors

$$ {}^{t}\mathrm{XSX} = {}^{t}\mathrm{YDY} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 $$

Voilà qui nous donne déjà le sens indirect :-)

1. Si les λ_i sont tous positifs, alors ${}^{t}\mathrm{XSX} \geqslant 0$.

2. Si les λ_i sont tous strictement positifs, alors si $\mathrm{X} \neq 0$, on a aussi $\mathrm{Y} \neq 0$ car $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$, et du coup l'un des y_i au moins est non nul, donc ${}^{t}\mathrm{XSX} > 0$.
Et pour le sens direct ?
Soit $i \in [\![1\,;\ n]\!]$. Prenons $\mathrm{Y} = \mathrm{E}_i$ et $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$, de sorte que

$$ {}^{t}\mathrm{XSX} = {}^{t}\mathrm{YDY} = {}^{t}\mathrm{E}_i\mathrm{D}\mathrm{E}_i = \mathrm{D}_{i,i} = \lambda_i $$

3. Si $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, alors ${}^{t}\mathrm{XSX} \geqslant 0$ donc $\lambda_i \geqslant 0$.

4. Si $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors comme $\mathrm{Y} \neq 0$ entraîne $\mathrm{X} = {}^{t}\mathrm{PY} \neq 0$, on a : ${}^{t}\mathrm{XSX} > 0$ donc $\lambda_i > 0$.
Pour le sens direct, il y a une variante accessible et assez immédiate, qui montre bien aussi le lien avec le signe des valeurs propres.

Soit X un vecteur propre associé à une valeur propre λ de S.

$$ {}^t\mathrm{XSX} = {}^t\mathrm{X}(\lambda\mathrm{X}) = \lambda\,{}^t\mathrm{XX} = \lambda\,||\mathrm{X}||^2 \text{ avec } ||\mathrm{X}|| \neq 0. $$

Ce qui induit :

5. $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longrightarrow {}^t\mathrm{XSX} \geqslant 0 \Longrightarrow \lambda \geqslant 0$.

6. $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longrightarrow {}^t\mathrm{XSX} > 0 \Longrightarrow \lambda > 0$.

Exercice 189

Application à la recherche de racines carrées

Justifier les propriétés suivantes.

1. *Existence* –
Pour toute matrice $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une matrice $\mathrm{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{R}^2 = \mathrm{S}$.

2. *Unicité dans* $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ –
Pour toute matrice $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $\mathrm{R} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{R}^2 = \mathrm{S}$.

Solution (**Ex.189 –** *Application à la recherche de racines carrées*)

1. *Cette propriété est en fait vraie pour toute matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont positives.*
Puisque $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$ \mathrm{P}^{-1}\mathrm{SP} = \mathrm{D} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ avec } \forall i, \lambda_i \geqslant 0. $$

Prenons

$$ \Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) $$

de sorte que $\Delta^2 = \mathrm{D}$. En posant $\mathrm{R} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$, on a

$$ \mathrm{R}^2 = \mathrm{P}\Delta^2\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{S} $$

donc R est une racine carrée de S.

2. Dans ce qui précède, il n'y a pas unicité car toutes les

$$ \Delta = diag(\pm\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}) $$

conviennent. De plus, $\mathrm{R} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$ est à valeurs propres positives (les $\sqrt{\lambda_i}$) mais pas nécessairement symétrique.
Au lieu de prendre $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ quelconque, je prends $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en appliquant le théorème spectral, et je choisis encore $\mathrm{R} = \mathrm{P}\Delta\,{}^t\mathrm{P}$. Ainsi :
- ${}^t\mathrm{R} = {}^t(\mathrm{P}\Delta\,{}^t\mathrm{P}) = \mathrm{P}\,{}^t\Delta\,{}^t\mathrm{P} = \mathrm{R}$ (Δ est diagonale !) donc R est symétrique ;
- $\mathrm{Sp}(\mathrm{R}) = \{\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset]\,0\,;\ +\infty[$ donc finalement $\mathrm{R} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- Montrons maintenant l'unicité.

(i) *Commençons par l'unicité pour les matrices diagonales.*
Soit $\mathrm{D} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Montrons que Δ est l'unique matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = \mathrm{D}$.
Soit $\mathrm{N} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{N}^2 = \mathrm{D}$.
(a) Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(\mathrm{N})$ et Y un vecteur propre de N associé à μ.
Alors $\mathrm{DY} = \mathrm{N}^2\mathrm{Y}$ donc : $\forall i \in [[\,1\,;\ n]]\,, \lambda_i y_i = \mu^2 y_i$. Comme D et N sont dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\lambda_i \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$, donc $\sqrt{\lambda_i}y_i = \mu y_i$.
Donc $\mu\mathrm{Y} = \Delta\mathrm{Y}$, donc $\mathrm{NY} = \Delta\mathrm{Y}$.
(b) Soit maintenant une base $(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)$ de vecteurs propres de N, alors : $\forall j \in [[\,1\,;\ n]]\,, \mathrm{NY}_j = \Delta\mathrm{Y}_j$. Les endomorphismes représentés par N et D coïncident sur une base, donc sont égaux. Donc $\mathrm{N} = \Delta$.
(ii) *Montrons alors l'unicité de la racine* R *de* S.
Supposons que $\mathrm{U} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifie $\mathrm{U}^2 = \mathrm{S}$. Soit $\mathrm{N} = {}^t\mathrm{PUP}$.
Alors : $\mathrm{N} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{N}^2 = {}^t\mathrm{PSP} = \mathrm{D}$, donc $\mathrm{N} = \Delta$.
Donc $\mathrm{U} = \mathrm{PN}\,{}^t\mathrm{P} = \mathrm{P}\Delta\,{}^t\mathrm{P} = \mathrm{R}$. *Cqfd*.

Chapitre 55

Commutant et racines carrées d'une matrice carrée

[CS-M1 – 2018 – PSI – Partie III] [CS-M2 – 2019 – PSI –] [CCP – 2021 – PC – Exercice 3] [CS-M1 – 2024 – PC – Parties I et II]

Définition – Commutant et racine carrée d'une matrice

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle commutant de A, noté ici $\mathcal{C}(\mathrm{A})$, l'ensemble

$$\mathcal{C}(\mathrm{A}) = \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\right\}.$$

On appelle racine carré de A toute matrice $\mathrm{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{A}.$$

Exercice 190

Propriétés générales

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(\mathrm{A})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Montrer que si R est une racine carrée de A, alors $\mathrm{R} \in \mathcal{C}(\mathrm{A})$.

Solution (**Ex.190 –** *Propriétés générales*)

1. $0 \in \mathcal{C}(\mathrm{A})$ et $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathcal{C}(\mathrm{A})^2 \Longrightarrow \mathrm{A}(\lambda\mathrm{M} + \mathrm{N}) = (\lambda\mathrm{M} + \mathrm{N})\mathrm{A}$.

2. $\mathrm{RA} = \mathrm{R}.\mathrm{R}^2 = \mathrm{R}^3 = \mathrm{R}^2.\mathrm{R} = \mathrm{AR}$

Exercice 191

Cas des matrices diagonalisables

On suppose que $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable et on choisit $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Justifier les équivalences suivantes :

1. $\mathrm{M} \in \mathcal{C}(\mathrm{A}) \iff \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} \in \mathcal{C}(\mathrm{D})$,

2. $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A} \iff \left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}\right)^2 = \mathrm{D}$.

Autrement dit, la recherche du commutant de A *ou des racines carrées se ramène à la recherche du commutant de* D *ou des racines carrées de* D.

Solution (**Ex.191 –** *Cas des matrices diagonalisables*)

1. $\mathrm{MA} = \mathrm{AM} \iff \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MPP}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{APP}^{-1}\mathrm{MP} \iff \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MPD} = \mathrm{DP}^{-1}\mathrm{MP}$.

2. $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A} \iff \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}^2\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \iff (\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP})^2 = \mathrm{D}$.

Exercice 192

Cas des matrices diagonales

Soit $\mathrm{D} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale (ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont ses coefficients diagonaux !).

1. a) Montrer que si ses coefficients diagonaux sont **deux à deux distinctes** alors
(i) Δ commute avec D si, et seulement si, Δ est diagonale, *i.e.*

$$\mathcal{C}(\mathrm{D}) = \{diag(\mu_1, \ldots, \mu_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n\} = \mathrm{Vect}\{\mathrm{E}_{i,i}, i \in [\![1\,;\,n]\!]\}.$$

(ii) R est une racine carrée de D si, et seulement si,

$$\mathrm{R} = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n) \text{ avec } \forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \mu_i^2 = \lambda_i.$$

b) Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, à quelle condition nécessaire et suffisante D admet-elle au moins une racine carrée ? Dans ce cas, décrire ces racines carrées et les dénombrer.

La suite est entre l'exercice et la méditation...

... présentation non académique...

2. MAIS si deux coefficients diagonaux sont égaux, alors ces résultats sont faux, **exemples à méditer**
(i) $\mathcal{C}(\mathrm{I}_2) = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$... *évidence*,

$$\forall a \in \mathbb{K}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{... \textit{nilpotentisme},}$$

(ii) Dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$\forall \theta \in\,]-\pi\,;\,\pi]\,, \mathrm{S} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ vérifie } \mathrm{S}^2 = \mathrm{I}_2\text{...\textit{symétries orthogonales.}}$$

Et ce ne sont pas les seules possibilités, par exemple :

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \mathrm{S}_a \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a+1 & 2a \\ -2 & -a-1 \end{pmatrix} \text{ vérifie } \mathrm{S}_a^2 = \mathrm{I}_2.$$

(iii) Et les coefficients strictement négatifs ne sont plus rédhibitoires, y compris dans $\mathbb{R}$,

$$\left(\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathrm{I}_2.$$

3. S'il y a deux coefficients diagonaux identiques (au moins), on peut raisonner par blocs.
Par exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ admet par exemple pour racines carrées}$$

$$\text{(i) les } \mathrm{R}_\theta = \left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{2}\cos\theta & \sqrt{2}\sin\theta & 0 \\ \sqrt{2}\sin\theta & -\sqrt{2}\cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm\sqrt{3} \end{array} \right) \text{ avec } \theta \in\,]-\pi\,;\,\pi],$$

$$\text{(ii) les } \mathrm{T}_a = \left(\begin{array}{c|c} \sqrt{2}\mathrm{S}_a & 0 \\ \hline 0 & \pm\sqrt{3} \end{array} \right) \text{ avec } a \neq 1.$$

Solution (**Ex.192** – *Cas des matrices diagonales*)

1. a) (i) Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})$. Alors $\mathrm{MD} = (\lambda_j m_{i,j})$ et $\mathrm{DM} = (\lambda_i m_{i,j})$, donc

$$\mathrm{MD} = \mathrm{DM} \iff \forall i, j, \quad \lambda_j m_{i,j} = \lambda_i m_{i,j} \iff \forall i, j, \quad (\lambda_j - \lambda_i) m_{i,j} = 0$$

or : $\forall i \neq j, \lambda_j - \lambda_i \neq 0$, donc

$$\mathrm{MD} = \mathrm{DM} \iff \forall i \neq j, \quad m_{i,j} = 0$$

Cqfd.

(ii) On sait que $R^2 = D$ entraîne que $R \in \mathcal{C}(D)$ donc R est diagonale : $R = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Alors $R^2 = diag(\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2)$ amène aux conclusions.

b) En particulier si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, D admet des racines carrées si, et seulement si, ses n valeurs propres sont positives ou nulles, et dans ce cas

$$R^2 = D \quad \Longleftrightarrow \quad R = diag(\pm\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}).$$

Ce qui donne $2^{(nbre\ de\ vp\ strictement\ positives)}$ racines carrées.

2. (ii) Soit $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = I_2$. Alors S est une matrice de symétrie et toute matrice de symétrie convient. Donc les symétries orthogonales conviennent.

Mais pas seulement : voici[1] la matrice de la symétrie d'axe $(1, a)$ et de direction $(1, 1)$ (pourvu que $a \neq 1$)

$$S_a = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a+1 & 2a \\ -2 & -a-1 \end{pmatrix}.$$

(iii) L'idée n'est pas artificielle si je vois $-I_2$ comme la matrice R_π de la rotation d'angle π.

On sait que $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$, donc

$$-I_2 = R_(\pi) = R_{\pi/2}^2 = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2.$$

Exercice 193

Cas des matrices symétriques positives : algorithme de Héron matriciel

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Soit M une matrice symétrique positive : $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$.

1. a) Déterminer une matrice $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

b) Montrer que B est la seule racine carrée de M appartenant à $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note alors $\sqrt{M}$ l'unique racine carrée symétrique positive de M.

2. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On définit la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1}(a) = \dfrac{1}{2}\left(c_n(a) + \dfrac{a}{c_n(a)}\right) \end{cases}$$

a) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a) > 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de $c_{n+1}(a)^2 - a$ faisant intervenir $(c_n(a)^2 - a)^2$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $c_n(a) \geqslant \sqrt{a}$.

c) Montrer que $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

3. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ les valeurs propres de M répétées autant de fois que leur multiplicité.

On rappelle que, d'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_q(\mathbb{R})$ telle que

$$M = P diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) P^T.$$

On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = I_q \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad M_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(M_n + MM_n^{-1}\right) \end{cases}$$

a) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est bien définie et que

$$M_n = P diag(c_n(\lambda_1), \ldots, c_n(\lambda_q)) P^T.$$

b) En déduire que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{M}$.

Solution (**Ex.193** – *Cas des matrices symétriques positives : algorithme de Héron matriciel*)

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Soit M une matrice symétrique positive : $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$.

1. Exercice : vérifier cette affirmation.

1. a) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ les valeurs propres de M répétées autant de fois que leur multiplicité. Comme $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$, toutes les valeurs propres λ_i sont positives.
D'après le théorème spectral, il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_q(\mathbb{R})$ telle que
$$\mathrm{M} = \mathrm{P}diag(\lambda_1, \dots, \lambda_q)\mathrm{P}^\mathrm{T}.$$
Posons $\mathrm{B} = \mathrm{P}diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q})\mathrm{P}^\mathrm{T}$.
Alors $\mathrm{B}^2 = \mathrm{M}$ et
$\mathrm{B}^\mathrm{T} = \left(\mathrm{P}diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q})\mathrm{P}^\mathrm{T}\right)^\mathrm{T} = \mathrm{P}diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q})\mathrm{P}^\mathrm{T} = \mathrm{B}$
Les valeurs propres de B sont $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q}$ donc positives.
Ainsi B est une matrice de $\mathcal{S}_q^+$ racine carrée de M.

b) Réciproquement, soit $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{M}$. On a $\mathrm{MB} = \mathrm{B}^3 = \mathrm{BM}$ donc B commute avec M. Or deux endomorphismes auto-adjoints u et v qui commutent sont co-diagonalisables. En effet, les sous-espaces propres de u sont stables par v, et les différents endomorphismes induits de v sur ces sous-espaces sont toujours auto-adjoints dont diagonalisables dans des bases orthonormées.
Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_q(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{MP}$ et $\Delta = \mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{BP}$ soient diagonales, et $\mathrm{B}^2 = \mathrm{M} \Leftrightarrow \Delta^2 = \mathrm{D}$ soit, puisque les valeurs propres de B sont positives, $\Delta = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$, ce qui assure l'unicité de B.

2. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On définit la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1}(a) = \dfrac{1}{2}\left(c_n(a) + \dfrac{a}{c_n(a)}\right) \end{cases}$$

a) Récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ sans aucun souci.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} c_{n+1}(a)^2 - a &= \left(\frac{1}{2}\left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)}\right)\right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4c_n(a)^2}\left(c_n(a)^4 + 2ac_n(a)^2 + a^2 - 4ac_n(a)^2\right) \\ &= \frac{(c_n(a)^2 - a)^2}{4c_n(a)^2} \geqslant 0 \text{ donc } c_{n+1}(a)^2 \geqslant a. \end{aligned}$$
Donc $c_{n+1}(a) \geqslant \sqrt{a}$ d'après a).
Quitte à décaler l'indice, pour tout $n \geqslant 1$, $c_n(a) \geqslant \sqrt{a}$.

c)
- $c_{n+1}(a) - c_n(a) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{c_n(a)} - c_n(a)\right) = \dfrac{1}{2c_n(a)}\left(a - c_n(a)^2\right) \leqslant 0$ donc la suite $(c_n(a))$ est décroissante.
- Comme cette suite est minorée par 0 (ou $\min(1, \sqrt{a})$), elle converge, vers une limite $\ell \geqslant \min(1, \sqrt{a})$.
- Si $a = 0$, $c_n(a) = \dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \sqrt{a}$.
  Si $a > 0$, $\ell \geqslant \min(1, \sqrt{a}) > 0$ vérifie $2\ell = \ell + \dfrac{a}{\ell}$ donc $\ell = \dfrac{a}{\ell}$ i.e. $\ell^2 = a$ donc $\ell = \sqrt{a}$.
- Dans tous les cas, la suite $(c_n(a))$ converge vers $\sqrt{a}$.

3. a)
- M_0 est définie et comme $c_0(\lambda_i)$ vaut 1 pour tout i et $\mathrm{PP}^\mathrm{T} = \mathrm{I}_q$, on a bien $\mathrm{M}_n = \mathrm{P}diag(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q))\mathrm{P}^\mathrm{T}$.
- Supposons la propriété vraie à un rang n quelconque de $\mathbb{N}$.
  Alors $\mathrm{M}_n = \mathrm{P}diag(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q))\mathrm{P}^\mathrm{T}$ avec $c_n(\lambda_i) > 0$ pour tout i donc $\det(\mathrm{M}_n) = \prod_{i=1}^{q} c_n(\lambda_i) > 0$, donc M_n est inversible et M_{n+1} est définie.
  Ensuite
  $$\begin{aligned} \mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{M}_{n+1}\mathrm{P} &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{M}_n\mathrm{P} + \mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{MPP}^\mathrm{T}\mathrm{M}_n^{-1}\mathrm{P}\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(diag(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) \\ &\quad + diag(\lambda_1, \dots, \lambda_q)(diag(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)))^{-1}\big) \\ &= \frac{1}{2}diag\left(c_n(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{c_{n(\lambda_1)}}, \dots, c_n(\lambda_q) + \frac{\lambda_q}{c_{n(\lambda_q)}}\right) \\ &= diag(c_{n+1}(\lambda_1), \dots, c_{n+1}(\lambda_q)) \end{aligned}$$
  donc M_{n+1} vérifie l'égalité souhaitée.
- Par récurrence, on a établi la propriété voulue pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) • Par convergence par coordonnées, $diag(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q})$

• Par continuité du produit matriciel,

$$\mathrm{M}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{P}diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q})\mathrm{P}^{\mathrm{T}} = \sqrt{\mathrm{M}}$$

d'après la première question car $\mathrm{P}diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q})\mathrm{P}^{\mathrm{T}}$ est manifestement symétrique, à valeurs propres positives et de carré valant M.

Chapitre 56

Matrices symplectiques

[CS-M1 – 2020 – PC –][MP-M2 – 2015 – PSI –]

Pour comprendre l'origine des questions posées par les exercices suivants, on pourra travailler l'exercice « éléments de géométrie symplectique » du paragraphe « formes bilinéaires et formes quadratiques ».

Dans toute cette partie, n désigne un entier de $\mathbb{N}^*$ et le corps des scalaires est $\mathbb{R}$.

Définition –

On note J_n ou plus simplement J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{J}_n = \mathrm{J} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est dite **symplectique** si, et seulement si,

$${}^{\mathrm{t}}\mathrm{MJM} = \mathrm{J}.$$

L'ensemble des matrices symplectiques est noté $\mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R}) \overset{\text{déf.}}{=} \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}),\ {}^{\mathrm{t}}\mathrm{MJM} = \mathrm{J}\right\}.$$

Exercice 194

Matrices symplectiques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cet exercice uniquement, $n = 1$.

1. Montrer que $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, son déterminant vaut 1.

2. Soit M une matrice orthogonale de taille 2×2. On note $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ les deux colonnes de M. Montrer l'équivalence :

$$\text{M est symplectique si, et seulement si, } \mathrm{C}_2 = -\mathrm{JC}_1.$$

3. Soit $\mathrm{X}_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de norme 1. Montrer que la matrice constituée des colonnes X_1 et $-\mathrm{J}_1\mathrm{X}_1$ est à la fois orthogonale et symplectique.

4. Soit M une matrice de taille 2×2 symétrique et symplectique.

a) Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont inverses l'une de l'autre.

b) Montrer qu'il existe une matrice P à la fois orthogonale et symplectique telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ soit diagonale.

5. Déterminer les matrices de taille 2×2 à la fois antisymétriques et symplectiques et montrer qu'elles ne sont pas diagonalisables dans $\mathbb{R}$.

Solution (**Ex.194 –** *Matrices symplectiques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*)

1. ${}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathrm{J} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ad+bc \\ ad-bc & 0 \end{pmatrix}$ donc M est symplectique si, et seulement si, $\det\left(()\,\mathrm{M}\right) = 1$.

2. Soit $\mathrm{C}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. La question précédente et la structure de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ permettent d'écrire

$$\mathrm{M} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{M} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \mathrm{C}_2 = -\mathrm{JC}_1.$$

3. Soit $\mathrm{X}_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de norme 1, disons $\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

$\mathrm{M} = (\mathrm{X}_1 | -\mathrm{JX}_1) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ donc M est à la fois orthogonale et symplectique.

4. Soit M une matrice de taille 2×2 symétrique et symplectique.

a) M est symétrique réelle donc diagonalisable. Écrivons $\chi_{\mathrm{M}} = (\mathrm{X} - \lambda)(\mathrm{X} - \mu) = \mathrm{X}^2 - (\lambda + \mu)\mathrm{X} + \lambda\mu = \mathrm{X}^2 - \operatorname{Tr}(()\,\mathrm{M})\mathrm{X} + \det(()\,\mathrm{M})$. Par unicité des coefficients d'un polynôme, $\lambda\mu = \det(()\,\mathrm{M})$. Et comme M est symplectique, $\det(()\,\mathrm{M}) = 1$ donc les deux valeurs propres de M sont inverses l'une de l'autre.

b) Par le cours, il existe une matrice P orthogonale dont les colonnes sont des vecteurs propres de M. Comme P est orthogonale, $\det(()\,\mathrm{P}) = \pm 1$. Si $\det(()\,\mathrm{P}) = -1$, on permute les colonnes de P, et alors P demeure orthogonale (ses colonnes forment une base orthonormale), $\det(()\,\mathrm{P}) = 1$ donc P est symplectique, et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ est diagonale puisque les colonnes de P forment une base de vecteurs propres de M.

5. • Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ antisymétrique. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Supposons de plus M symplectique. Alors $\det(()\,\mathrm{M}) = 1$ entraîne $a^2 = 1$, donc $a = \pm 1$, donc $\mathrm{M} = \mathrm{J}$ ou $\mathrm{M} = -\mathrm{J}$.
Réciproquement, J et $-\mathrm{J}$ sont à la fois antisymétriques et symplectiques.
Les seules matrices antisymétriques et symplectiques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont J et $-\mathrm{J}$.
• $\chi_{\pm \mathrm{J}} = \mathrm{X}^2 + 1$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\pm \mathrm{J}) = \emptyset$ et $\pm \mathrm{J}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 195

Premières propriétés des matrices symplectiques

0

1. a) Calculer J^2 et ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{J}$ en fonction de I_{2n} et J.

b) Montrer que J est inversible et expliciter son inverse.

c) J est-elle symplectique ?

2. a) Vérifier que pour tout réel α la matrice $\mathrm{K}(\alpha) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0_n \\ -\alpha \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{bmatrix}$ est symplectique.

b) Pour tout $\mathrm{U} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, vérifier que $\mathrm{L}_{\mathrm{U}} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{bmatrix} \mathrm{U} & 0_n \\ 0_n & {}^{\mathrm{t}}\mathrm{U}^{-1} \end{bmatrix}$ est symplectique

3. L'ensemble $\mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?

4. Montrer que si $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$, alors $\det(()\,\mathrm{M}) \pm 1$.

5. a) Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$ est un élément de $\mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'un élément de $\mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$ est inversible et que son inverse appartient $\mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$.

c) Montrer que si $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$ alors ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$.

6. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ écrite par blocs sous la forme

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix} \text{ avec A, B, C et D dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Déterminer des relations sur A, B, C, et D caractérisant l'appartenance de M à $\mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$.

Solution (**Ex.195** – *Premières propriétés des matrices symplectiques*)

1. a) $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}_{2n}$ et ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{J} = -\mathrm{J}$.

b) $\mathrm{J}(-\mathrm{J}) = \mathrm{I}_{2n}$ donc J est inversible et $\mathrm{J}^{-1} = -\mathrm{J} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{J}$. On pouvait aussi remarquer que les colonnes de J forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, ce qui fait de J une matrice orthogonale.

c) ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{JJJ} = \mathrm{J}^{-1}\mathrm{JJ} = \mathrm{J}$ donc J est symplectique.

2. a) Tous les blocs intervenants sont de taille $n \times n$ donc permettent le produit par blocs. On vérifie sans peine que ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{K}(\alpha)\mathrm{JK}(\alpha) = \mathrm{J}$, donc $\mathrm{K}(\alpha)$ est symplectique.

b) À nouveau, tous les blocs intervenants sont de taille $n \times n$ donc permettent le produit par blocs.

$${}^{\mathrm{t}}\mathrm{L_U JL_I U} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{\mathrm{t}}\mathrm{U}\,{}^{\mathrm{t}}(\mathrm{U}^{-1}) \\ \mathrm{U}^{-1}\mathrm{U} & 0 \end{bmatrix}$$

or lorsqu'une matrice est inversible, sa transposée l'est aussi et l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse, donc ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{L_U JL_I U} = \mathrm{J}$ et $\mathrm{L_U}$ est symplectique.

3. ${}^{\mathrm{t}}0\mathrm{J}0 = 0 \neq \mathrm{J}$ donc $0 \notin \mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

4. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$. Alors $\det(\mathrm{J}) = \det\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{MJM}\right) = \det\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}\right)\det(\mathrm{J})\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M})^2\det(\mathrm{J})$ or $\det(\mathrm{J}) \neq 0$ (J est inversible), donc $\det(\mathrm{M})^2 = 1$, donc $\det(\mathrm{M}) = \pm 1$.

5. a) Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})^2$.
${}^{\mathrm{t}}(\mathrm{MN})\mathrm{JMN} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{N}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{MJM})\mathrm{N} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{NJN} = \mathrm{J}$, donc $\mathrm{MN} \in \mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$.

b) • Si $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$, alors $\det(()\,\mathrm{M}) = \pm 1 \neq 0$ donc M est inversible.
• Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}\mathrm{MJM} = \mathrm{J} &\Longrightarrow ({}^{\mathrm{t}}\mathrm{M})^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{MJMM}^{-1} = ({}^{\mathrm{t}}\mathrm{M})^{-1}\mathrm{JM}^{-1} \\ &\Longrightarrow \mathrm{J} = {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{M}^{-1})\mathrm{JM}^{-1} \Longrightarrow \mathrm{M}^{-1} \in \mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

c) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$. M est inversible et ${}^{\mathrm{t}}(\mathrm{M}^{-1})\mathrm{JM}^{-1} = \mathrm{J}$. Inversons cette relation (toutes les matrices étant inversibles !) :
$\mathrm{MJ}^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{M} = \mathrm{J}^{-1}$, et comme $\mathrm{J}^{-1} = -\mathrm{J}$, $\mathrm{MJ}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{M} = \mathrm{J}$, relation qui montre que ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$.

6. Tous les blocs sont de taille $n \times n$ donc par produit par blocs

$${}^{\mathrm{t}}\mathrm{MJM} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}\mathrm{CA} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{AC} & {}^{\mathrm{t}}\mathrm{CB} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{AD} \\ {}^{\mathrm{t}}\mathrm{DA} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{BC} & {}^{\mathrm{t}}\mathrm{DB} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{BD} \end{bmatrix}$$

Comme ${}^{\mathrm{t}}\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{CB} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{AD}\right) = -\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{DA} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{BC}\right)$, on en déduit

$$\mathrm{M} \in \mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} {}^{\mathrm{t}}\mathrm{CA} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{AC} = 0_n \\ {}^{\mathrm{t}}\mathrm{DA} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{BC} = \mathrm{I}_n \\ {}^{\mathrm{t}}\mathrm{DB} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{BD} = 0_n \end{cases}$$

Exercice 196

Déterminant d'une matrice symplectique

Dans cet exercice, on se propose de démontrer que le déterminant d'une matrice symplectique vaut 1.
Soit M dans $\mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{R})$ que l'on décompose sous forme de matrices blocs

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix} \text{ avec A, B, C et D dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Dans tout cet exercice, les matrices A, B, C, D sont les matrices de cette décomposition.

1. On suppose dans cette question que D est inversible.

a) Montrer qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{Q} \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{U} & 0_n \\ \mathrm{V} & \mathrm{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix}.$$

b) En utilisant la dernière question de l'exercice pécédent, vérifier que BD^{-1} est symétrique, puis que

$$\det(\mathrm{M}) = \det\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AD} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{CB}\right) = 1.$$

On suppose dorénavant D non inversible.

2. Soit $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{PQ}$ soit symétrique.
On suppose qu'il existe deux réels différents s_1, s_2 et deux vecteurs V_1, V_2 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$(\mathrm{Q} - s_1\mathrm{P})\mathrm{V}_1 = (\mathrm{Q} - s_2\mathrm{P})\mathrm{V}_2 = 0.$$

Montrer que le produit scalaire (canonique) $\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2 \rangle$ est nul.

3. Montrer que $\mathrm{Ker(B)} \cap \mathrm{Ker(D)} = \{0\}$.

4. a) Soit m un entier naturel non nul. On suppose qu'il existe $s_1, \dots, s_m$ des réels non nuls et deux à deux distincts et $\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_m$ des vecteurs non nuls tels que

$$\text{pour tout } i \in [\![1\,;\ m]\!], \quad (\mathrm{D} - s_i\mathrm{B})\mathrm{V}_i = 0.$$

Montrer que pour tout $i \in [\![1\,;\ m]\!]$, DV_i est non nul et que la famille $\big(\mathrm{DV}_i, i \in [\![1\,;\ m]\!]\big)$ forme une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) En déduire qu'il existe un réel α tel que $\mathrm{D} - \alpha\mathrm{B}$ soit inversible.

c) Montrer alors que $\det\left(()\,\mathrm{M}\right) = 1$. *On pourra exploiter la matrice* $\mathrm{K}(\alpha)$ *de l'exercice précédent.*

Solution (**Ex.196 –** *Déterminant d'une matrice symplectique*)

1. On suppose dans cette question que D est inversible.

a) Montrer qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{Q} \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{U} & 0_n \\ \mathrm{V} & \mathrm{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix}.$$

Toujours par produit de blocs compatibles

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{Q} \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{U} & 0_n \\ \mathrm{V} & \mathrm{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{U} + \mathrm{QV} & \mathrm{QW} \\ \mathrm{V} & \mathrm{W} \end{bmatrix}$$

Comme D est inversible, il suffit de prendre

$$\mathrm{V} = \mathrm{C}, \mathrm{W} = \mathrm{D}, \mathrm{Q} = \mathrm{BD}^{-1} \text{ et } \mathrm{U} = \mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C}.$$

b) En utilisant la dernière question de l'exercice pécédent, vérifier que BD^{-1} est symétrique, puis que

$$\det(\mathrm{M}) = \det\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AD} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{CB}\right) = 1.$$

• D'après l'exercice précédent, comme M est symplectique, ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{DB} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{BD}$.
En multipliant par D^{-1} à droite et ${}^{\mathrm{t}}(\mathrm{D}^{-1})$ à gauche, $\mathrm{BD}^{-1} = {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{D}^{-1})\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{B}$, *i.e.* $\mathrm{BD}^{-1} = {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{BD}^{-1})$.
• Et en faisant apparaître des déterminants triangulaires par blocs

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{M}) &= \det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{BD}^{-1} \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C} & 0_n \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{BD}^{-1} \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{bmatrix}\right) \det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C} & 0_n \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C}\right) \det\left(()\,\mathrm{D}\right) = \det\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{A} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{CBD}^{-1}\right) \det(\mathrm{D}) \\ &= \det\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AD} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{CBD}^{-1}\mathrm{D}\right) = \det\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AD} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{CB}\right) \end{aligned}$$

or ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{AD} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{CB} = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{DA} - {}^{\mathrm{t}}\mathrm{BC}) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$ toujours par l'exercice précédent, donc

$$\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{I}_n) = 1.$$

On suppose dorénavant D non inversible.

2. Soit $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{PQ}$ soit symétrique.
On suppose qu'il existe deux réels différents s_1, s_2 et deux vecteurs V_1, V_2 non nuls dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$(\mathrm{Q} - s_1\mathrm{P})\mathrm{V}_1 = (\mathrm{Q} - s_2\mathrm{P})\mathrm{V}_2 = 0.$$

Montrer que le produit scalaire (canonique) $\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2 \rangle$ est nul.
$\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2 \rangle = \langle s_1\mathrm{PV}_1, \mathrm{QV}_2 \rangle = s_1\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{V}_1\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{PQV}_2$
$\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2 \rangle = \langle \mathrm{QV}_1, s_2\mathrm{PV}_2 \rangle = s_2\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{V}_1\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{QPV}_2 = s_2\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{V}_1\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{PQV}_2$ par symétrie de ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{PQ}$.
Donc $(s_2 - s_1)\mathrm{V}_1\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{PQV}_2 = 0$, et comme $s_2 \neq s_1$, ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{V}_1\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{PQV}_2 = 0$.
Donc $\langle \mathrm{QV}_1, \mathrm{QV}_2 \rangle = 0$.

3. Soit $\mathrm{V} \in \mathrm{Ker(B)} \cap \mathrm{Ker(D)}$. Alors $\mathrm{M}\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{BV} \\ \mathrm{DV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Comme M est symplectique donc inversible, $\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{V} \end{bmatrix} = \mathrm{M}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ donc $\mathrm{V} = 0$.

Comme $0 \in \mathrm{Ker(B)} \cap \mathrm{Ker(D)}$ (qui est un espace vectoriel), on a

$$\mathrm{Ker(B)} \cap \mathrm{Ker(D)} = \{0\}.$$

4. Soit m un entier tel que $m \leqslant n$. Soit $s_1, \dots, s_m$ des réels non nuls et deux à deux distincts et $V_1, \dots, V_m$ des vecteurs non nuls tels que

$$\text{pour tout } i \in [\![1\,;\ m]\!], \quad (D - s_i B)V_i = 0.$$

a) • Soit $i \in [\![1\,;\ m]\!]$. Comme $DV_i = s_i BV_i$ avec $s_i \neq 0$, si $DV_i = 0$ alors $BV_i = 0$ donc $V_i \in \mathrm{Ker}(B) \cap \mathrm{Ker}(D)$ donc $V_i = 0$, ce qui est impossible. Donc $DV_i \neq 0$.

• Notons que, puisque M est symplectique, ${}^{t}BD = {}^{t}DB$ donc ${}^{t}BD$ est symétrique.

En appliquant le résultat de la question 2), on voit que, dès que $i \neq j$, $DV_i \perp DV_j$. Donc la famille $\big(DV_i, i \in [\![1\,;\ m]\!]\big)$ est une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls, donc une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) Supposons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $D - \alpha B$ soit non inversible. Alors

$$\forall i \in [\![1\,;\ n+1]\!], \exists V_i \neq 0 \text{ tel que } (D - iB)V_i = 0.$$

D'après la question précédente, la famille $\big(DV_i, i \in [\![1\,;\ n+1]\!]\big)$ est une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, lui-même de dimension n, ce qui est impossible.

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D - \alpha B$ soit non inversible.

c) Prenons α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.

$K(\alpha)M = \begin{bmatrix} A & B \\ -\alpha A + C & -\alpha B + D \end{bmatrix}$ est symplectique car $K(\alpha)$ et M le sont, et $-\alpha B + D$ est inversible. Donc on peut appliquer la première question à $K(\alpha)M$:

$$\det(K(\alpha)M) = 1, \text{ donc } \det(K(\alpha))\det(M) = 1.$$

Or $\det(K(\alpha)) = 1$, donc $\det(M) = 1$.

Chapitre 57

Théorème des moindres carrées et application aux ajustements polynomiaux

Lorsqu'un système linéaire à n équations et p inconnues

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B},\ \textit{où}\ \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ \textit{et}\ \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

n'admet pas de solution, on peut chercher le vecteur X *qui minimise*

$$||\mathrm{AX} - \mathrm{B}||,$$

on parle alors parfois de « pseudo-solution».

Évidemment, cela présuppose qu'on s'est donné une norme. La norme euclidienne $||.||_2$ *associée au produit scalaire canonique de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *est bien adaptée à ce problème de minimisation grâce à la propriété de meilleure approximation en norme. Avant d'exposer le théorème général, on commence par donner un procédé systématique pour déterminer la matrice d'une projection orthogonale.*

Exercice 197

Formules pour les matrices de projections orthogonales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle .,. \rangle$. Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$, X^{T} désigne la transposée de X.

Soit $d \in [[\,1\,;\ n]]$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension d.

1. On suppose que $(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_d)$ une base orthonormale de F.

Soit $\mathrm{M} = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \mathrm{U}_i {\mathrm{U}_i}^{\mathrm{T}}$.

Montrer que M représente la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E.

2. On suppose que $(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_d)$ une base quelconque de F et on note A la matrice de $\mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ donc les colonnes sont $\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_d$.

a) Montrer que, pour tout X de E,

i – $\quad \mathrm{X} \in \mathrm{F} \iff \exists \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{AY} = \mathrm{X},$

ii – $\quad \mathrm{X} \in \mathrm{F}^{\perp} \iff \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = 0.$

b) Montrer que $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ est une matrice inversible. *On pourra déterminer* $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})$.

c) Soit $\mathrm{M} = \mathrm{A}\big(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\big)^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

Montrer que M représente la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E.

3. *Application - Impératif d'utiliser ce qui précède !* Déterminer la matrice de la projection orthogonale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 0$

a) en utilisant une base quelconque de F,

b) en utilisant une base orthonormale de F.

Solution (**Ex.197 –** *Formules pour les matrices de projections orthogonales*)

1. $\forall \mathrm{X} \in \mathrm{E}$,

$$\mathrm{MX} = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{U}_i {\mathrm{U}_i}^{\mathrm{T}} \mathrm{X} = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{U}_i \langle \mathrm{U}_i, \mathrm{X} \rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle \mathrm{X}, \mathrm{U}_i \rangle \mathrm{U}_i = p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X})$$

d'après la propriété du cours, puisque $(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_d)$ est une base orthonormale de F.

2. a) i – Il suffit d'observer que si $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}$, alors

$$\mathrm{AY} = \sum_{i=1}^{d} y_i \mathrm{C}_i.$$

Comme $(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_d)$ est une base de F, donc une famille génératrice, on a bien :

$$\mathrm{X} \in \mathrm{F} \iff \exists \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{AY} = \mathrm{X}.$$

ii – Pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{C}_1, \mathrm{X} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathrm{C}_d, \mathrm{X} \rangle \end{pmatrix}$.

Comme $(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_d)$ est une base de F, $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = 0 \iff \mathrm{X} \in \mathrm{F}^{\perp}$.

b) • $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

• Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$.

$\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}) \Longrightarrow \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX} = 0 \Longrightarrow ||\mathrm{AX}|| = 0 \Longrightarrow \mathrm{AX} = 0$.

Or $\mathrm{AX} = \sum_{i=1}^{d} x_i \mathrm{C}_i$ et $(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_d)$ est une base de F, donc une famille libre. Donc $\mathrm{AX} = 0 \Longrightarrow \mathrm{X} = 0$.

Ainsi $\mathrm{Ker}\big(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\big) = \{0\}$.

• Par la formule du rang, $\mathrm{rg}\big(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\big) = d$ donc $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ est inversible.

c) Soit $\mathrm{M} = \mathrm{A}\big(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\big)^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{MX}$.

① Comme $\mathrm{Y} = \mathrm{A}\big[(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\big]\mathrm{X}$ avec $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Y} \in \mathrm{F}$ d'après **i**.

② $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\big(\mathrm{X} - \mathrm{Y}\big) = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} - \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} - \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = 0$ donc d'après **ii** $\mathrm{X} - \mathrm{Y} \in \mathrm{F}^{\perp}$.

③ Ainsi $\mathrm{Y} \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{X} - \mathrm{Y} \in \mathrm{F}^{\perp}$, donc Y est le projeté orthogonal de X sur F.

④ Ceci étant vrai pour tout X de E, M représente la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E.

3. a) Prenons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et

$$\mathrm{M} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Par le procédé de Gram-Schmidt, prenons

$$\mathrm{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\mathrm{U}_1{\mathrm{U}_1}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{U}_2{\mathrm{U}_2}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Et

$$\mathrm{M} = \mathrm{U}_1{\mathrm{U}_1}^{\mathrm{T}} + \mathrm{U}_2{\mathrm{U}_2}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 198

Théorème des moindres carrés

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = p$.
Montrer que :
(i) $\min\limits_{\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} ||\mathrm{AX}-\mathrm{B}||_2$ existe,
(ii) ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{AA} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est inversible, donc le système linéaire ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{AAX} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{AB}$ admet une unique solution,
(iii) $\min\limits_{\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} ||\mathrm{AX}-\mathrm{B}||_2$ est atteint si, et seulement si, X est l'unique solution du système ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{AAX} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{AB}$.

Solution (**Ex.198 –** *Théorème des moindres carrés*)
Commentaire : il s'agit d'un problème de minimisation d'une $||.||_2$, donc il y a de la projection orthogonale dans l'air... Dans cette correction, j'ignore le résultat de l'exercice précédent, et du coup je le redémontre...
(i) Soit $\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_p \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ les p colonnes de A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On a alors, pour tout $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, on a,

$$\mathrm{AX} = \big(x_1\mathrm{C}_1 + \cdots + x_p\mathrm{C}_p\big) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Posons $\mathrm{F} = \{\mathrm{AX} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de dimension p car $\mathrm{rg}(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_p) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = p$.
Alors, s'il existe, $\min\limits_{\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} ||\mathrm{AX}-\mathrm{B}||_2 = \min\limits_{\mathrm{Y}\in\mathrm{F}} ||\mathrm{Y}-\mathrm{B}||_2$. Or par le cours, ce minimum existe, et est obtenu uniquement pour $\mathrm{Y} = p_{\mathrm{F}}(\mathrm{B})$.
On a déjà l'existence...
(ii) C'est un exercice classique. Notons que si A n'est pas forcément carrée, ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{AA} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est carrée.
On a toujours : $\mathrm{Ker}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{AA} = \mathrm{Ker}\mathrm{A}$, car
- $\mathrm{AX} = 0 \Longrightarrow {}^{\mathrm{t}}\mathrm{AAX} = 0$,
- ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{AAX} = 0 \Longrightarrow {}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{AAX} = 0 \Longrightarrow \langle \mathrm{AX}, \mathrm{AX}\rangle = 0 \Longrightarrow ||\mathrm{AX}|| = 0 \Longrightarrow \mathrm{AX} = 0$.

Or A représente un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, donc la formule du rang donne

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A})) = \dim(\mathbb{R}^p) - \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 0,$$

donc $\dim(\mathrm{Ker}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AA})) = 0$ et $\mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AA}) = p$, ce qui assure l'inversibilité. Donc l'unicité de la solution du système ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{AAX} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{AB}$.
(iii) Voyons comment obtenir ce projeté.

$$\mathrm{Y} = p_{\mathrm{F}}(\mathrm{B}) \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Y} \in \mathrm{F} \\ \mathrm{Y} - \mathrm{B} \in \mathrm{F}^{\perp} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Y} = \mathrm{AX} \\ \forall i \in [[\,1\,;\ p]]\,, \quad \langle \mathrm{C}_i, \mathrm{AX}-\mathrm{B}\rangle = 0 \end{cases}$$

car $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_p)$. Or

$$\forall i \in [[\,1\,;\ p]]\,, \quad \langle \mathrm{C}_i, \mathrm{AX}-\mathrm{B}\rangle = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [[\,1\,;\ p]]\,, \quad {}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_i(\mathrm{AX}-\mathrm{B}) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall i \in [[\,1\,;\ p]]\,, \quad {}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_i\mathrm{AX} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_i\mathrm{B}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_1 \\ \hline {}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{C}_p \end{pmatrix} \mathrm{AX} = \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_1 \\ \hline {}^{\mathrm{t}}\mathrm{C}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{C}_p \end{pmatrix} \mathrm{B} \Longleftrightarrow {}^{\mathrm{t}}\mathrm{AAX} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{AB}$$

$$\text{Donc } \mathrm{Y} = p_{\mathrm{F}}(\mathrm{B}) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Y} = \mathrm{AX} \\ {}^{\mathrm{t}}\mathrm{AAX} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{AB} \end{cases}.$$

Donc le minimum cherché vaut $||Y - B||_2 = ||AX - B||_2$ où X est l'unique solution de ${}^t AAX = {}^t AB$.

Exercice 199

Ajustements polynomiaux

On se donne $x_1, \dots, x_n$ n réels deux à deux distincts et $y_1, \dots, y_n$ n réels quelconques. Par exemple, (x_i, y_i) est une série statistique de résultats expérimentaux. On cherche une fonction polynomiale P_m de degré au plus m passant au plus près des n points, en quelque sorte

$$\forall i \in [[\,1\,;\ n]]\,, \quad P_m(x_i) \simeq y_i.$$

Le § sur l'interpolation de LAGRANGE *montre que si $m = n - 1$, il existe une et une seule solution.*
Problème : si la série est grande (n grand), il est peu probable que l'on accepte un polynôme de degré n.
De plus, si on prend l'exemple de la trajectoire d'un mobile uniquement soumis à la gravitation, on sait que la trajectoire est parabolique, donc qu'on veut $m = 2$ et $P(x) = a^2 + bx + c$. Notre nuage de points (x_i, y_i) doit nous servir à préciser les coefficients.
Comment optimiser le choix de P lorsque $m < n - 1$?

On connaît $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, et on cherche

$$P_m(x) = c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0$$

qui minimise la somme des écarts au carré, alias *les moindres carrés*

$$\Sigma(c_0, \dots, c_m) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \big(P_m(x_i) - y_i\big)^2.$$

Or en munissant $\mathbb{R}^n$ de la norme $||.||_2$,

$$\Sigma(c_0, \dots, c_m) = \left\| \begin{pmatrix} c_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_m x_1^m - y_1 \\ \vdots \\ c_0 + c_1 x_n + \cdots + c_m x_n^m - y_n \end{pmatrix} \right\|_2^2 = ||AC - Y||_2^2$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{m+1} & \dots & x_{m+1}^m \\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m+1}(\mathbb{R})$ et Y connues,

et $C = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ est notre inconnue.

Montrer que le théorème des moindres carrés précédents s'applique.

Solution (**Ex.199 –** *Ajustements polynomiaux*)
Il suffit de vérifier que $\mathrm{rg}(A) = m + 1$ or
- $A \in \mathcal{M}_{n,m+1}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathrm{rg}(A) \leqslant m + 1$,
- les $m + 1$ premières lignes constituent une matrice de VANDERMONDE, de déterminant non nul car les x_i sont deux à deux distincts, donc le rang des $m + 1$ premières lignes est $m + 1$, dans $\mathrm{rg}(A) \geqslant m + 1$.

Cqfd.

Chapitre 58

Intégration numérique avec Python

On passe en revue quelques méthodes de calculs approchés d'intégrales. Il s'agit de calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ à partir de valeurs de f en quelques points.

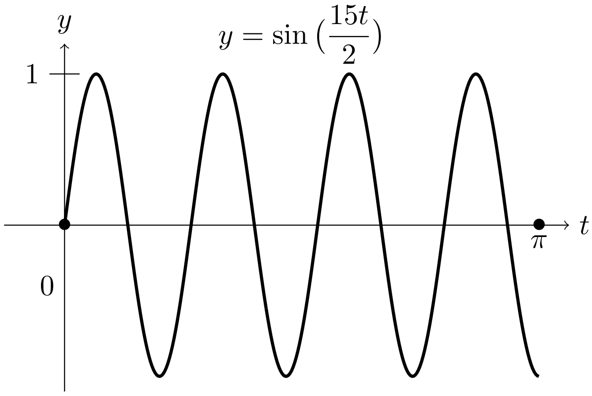
Dans le premier exercice, on s'intéresse à une fonction à la fois régulière ($\mathcal{C}^\infty$) mais avec une forte variabilité qui servira de fonction test pour les exercices suivants.

Exercice 200

Un simple sinus

1. Vérifier que $\int_0^\pi \sin\left(\frac{15t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{15}$.

2. Tracer la courbe représentative de $t \mapsto \sin\left(\frac{15t}{2}\right)$ et s'assurer que son allure est la suivante



Solution (**Ex.200** – *Un simple sinus*)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(t):
    return np.sin(7.5*t)

n = 300
t = np.linspace(0,np.pi,n)
y = f(t)
plt.plot(t,y)
```

Pour tout les exercices suivants, on suppose définie les modules `numpy` et `matplotlib.pyplot` importés sous `np` et `plt`, et on suppose définie une fonction $f : [\,a\,;\;b] \to \mathbb{R}$ continue.
Par exemple,

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def f(t):
    return np.sin(7.5*t)
```

Exercice 201

Méthode des rectangles

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.

Les formules énoncées ci-après sont à méditer et à savoir écrire.

1. Écrire à l'aide d'une boucle des fonctions `rect_g(a,b,N)`, `rect_d(a,b,N)` et `rect_m(a,b,N)` calculant des valeurs approchées de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ à l'aide des formules

$$\mathrm{G_N} = \frac{b-a}{\mathrm{N}} \sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1} f\left(a + i\frac{b-a}{\mathrm{N}}\right) \qquad \textit{Formule des rectangles à gauche}$$

$$\mathrm{D_N} = \frac{b-a}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} f\left(a + i\frac{b-a}{\mathrm{N}}\right) \qquad \textit{Formule des rectangles à droite}$$

$$\mathrm{M_N} = \frac{b-a}{\mathrm{N}} \sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1} f\left(a + (2i+1)\frac{b-a}{2\mathrm{N}}\right) \qquad \textit{Formule des rectanlges milieux}$$

2. Indiquer l'erreur absolue commise lors du calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \sin\left(\frac{15t}{2}\right)\mathrm{d}t$ par chacune de ces méthodes, pour $\mathrm{N} \in \{5, 10, 20, 50, 10$
Commentaire ?

3. En exploitant les fonctions `np.linspace` et `sum`, réécrire ces fonctions sans boucles.

Solution (**Ex.201** – *Méthode des rectangles*)

1.
```
def rect_g(a,b,N):
    s = 0
    h = (b-a)/N
    for i in range(N):
        s += f(a+i*h)
    return s*h

def rect_d(a,b,N):
    s = 0
    h = (b-a)/N
    for i in range(1,N+1):
        s += f(a+i*h)
    return s*h

def rect_m(a,b,N):
    s = 0
    h = (b-a)/N
    for i in range(0,N):
        s += f(a+(2*i+1)*(h/2))
    return s*h
```

2. Le script suivant

```
test = [5,10,20,50,100]
res = np.zeros((4,len(test)))
for i in range(len(test)):
    N = test[i]
    res[0,i] = N
    res[1,i] = abs(rect_g(0,np.pi,N)-2/15)
```

```
    res[2,i] = abs(rect_d(0,np.pi,N)-2/15)
    res[3,i] = abs(rect_m(0,np.pi,N)-2/15)

# Pour afficher 5 chiffres en \'evitant l'\'ecriture scientifique #
np.set_printoptions(precision=5,suppress=True)
print(res)
```

fournit le tableau

```
[[   5.        10.        20.        50.       100.     ]
 [   0.13333    0.08881    0.06275    0.02894    0.01509]
 [   0.76165    0.22535    0.09433    0.03389    0.01633]
 [   0.31095    0.03669    0.00803    0.00124    0.00031]]
```

Sur cet exemple, on observe que le choix des points milieux est bien meilleur que les deux autres.

3. Les fonctions usuelles `np....` comme `np.sin` supporte d'être appliquées directement à un tableau, élément par élément.

```
def rect_g(a,b,N):
    t = np.linspace(a,b,N+1)
    return sum(f(t[:-1]))*(b-a)/N

def rect_d(a,b,N):
    t = np.linspace(a,b,N+1)
    return sum(f(t[1:]))*(b-a)/N

def rect_m(a,b,N):
    h = (b-a)/N
    t = np.linspace(a+h/2,b-h/2,N)
    return sum(f(t))*h
```

Exercice 202

Méthode des trapèzes

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ et $h = \dfrac{b-a}{\mathrm{N}}$. La méthode des trapèzes consiste à approcher $\displaystyle\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(t)\mathrm{d}t$ par l'aire du trapèze du base h et de hauteurs $f(a+ih)$ et $f(a+(i+1)h)$.

1. Vérifier que cela conduit à

$$\mathrm{T}_\mathrm{N} = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} f(a+ih)\right) \quad \textit{Méthode des trapèzes}$$

2. Écrire une fonction `trap(a,b,N)` calculant des valeurs approchées de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ à l'aide de cette méthode.

3. Indiquer l'erreur absolue commise lors du calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{15t}{2}\right)\mathrm{d}t$ par cette méthode pour $\mathrm{N} \in \{5, 10, 20, 50, 100\}$. Commentaire ?

Solution (**Ex.202** – *Méthode des trapèzes*)

1.
```
def trap(a,b,N):
    h = (b-a)/N
    t = np.linspace(a+h,b-h,N-1)
    return ((f(a)+f(b))/2+sum(f(t)))*h
```

2.
```
test = [5,10,20,50,100]
res = np.zeros((2,len(test)))
for i in range(len(test)):
    N = test[i]
    res[0,i] = N
```

```
    res[1,i] = abs(trap(0,np.pi,N)-2/15)

# Pour afficher 5 chiffres en \'evitant l'\'ecriture scientifique #
np.set_printoptions(precision=5,suppress=True)
print(res)
```

On obtient

```
[[   5.        10.         20.         50.        100.     ]
 [   0.44749    0.06827    0.01579    0.00248    0.00062]]
```

L'erreur est de fois plus importante que dans la méthode des rectangles milieu, mais bien meilleure que les rectangles à gauche ou à droite.

Exercice 203

Méthode de Simpson

Les méthodes des rectangles et des trapèzes consistent à approcher sur chaque intervalle $[a+ih\,;\ a+(i+1)h]$ la fonction f par une fonction constante (méthodes des rectanlges) ou une fonction affine (méthode des trapèzes).
La méthode de Simpson consiste à approcher f par un polynôme du second degré (on approche alors la courbe de f par une parabole).

1. Soit $f : [a\,;\ b] \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que la base de Lagrange[1] associée aux points a, m et b est $(\mathrm{L}_a, \mathrm{L}_m, \mathrm{L}_b)$ définie par

$$\begin{cases} \mathrm{L}_a(x) = \dfrac{1}{(b-a)^2}\big(2x^2 - (a+3b)x + ab + b^2\big) \\ \mathrm{L}_m(x) = \dfrac{1}{(b-a)^2}\big(-4x^2 + 4(a+b)x - 4ab\big) \\ \mathrm{L}_b(x) = \dfrac{1}{(b-a)^2}\big(2x^2 - (3a+b)x + a^2 + ab\big) \end{cases}$$

b) Vérifier que

$$\int_a^b \mathrm{L}_a(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{L}_b(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6} \text{ et } \int_a^b \mathrm{L}_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2(b-a)}{3}.$$

c) En déduire que la méthode de Simpson consiste en l'approximation

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\right).$$

2. En partageant l'intervalle en $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ intervalles et en itérant cette démarche sur chacun des intervalles $\left[a + i\dfrac{b-a}{2}\,;\ a + (i\right.$
vérifier qu'on obtient la formule

$$\mathrm{S}_\mathrm{N} = h\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} f(a_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} f(a_{2i-1}) + f(b)\right) \quad \textit{Méthode de Simpson}$$

$$\text{où } h = \frac{b-a}{\mathrm{N}},\ a_i = a + i\frac{h}{2} \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 2\mathrm{N}-1$$

3. Écrire une fonction `Simpson(a,b,N)` calculant des valeurs approchées de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ à l'aide de cette méthode.

4. Indiquer l'erreur absolue commise lors du calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \sin\Big(\frac{15t}{2}\Big)\mathrm{d}t$ par cette méthode pour $\mathrm{N} \in \{5, 10, 20, 50, 100\}$.
Commentaire ?

Solution (**Ex.203** – *Méthode de Simpson*)

1. a) $\mathrm{L}_a(x) = \dfrac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)}$ de façon à ce que $\mathrm{L}_a(a) = 1$ tandis que $\mathrm{L}_a(m) = \mathrm{L}_a(b) = 0$.

On développe, en exploitant $(a-m) = -\dfrac{b-a}{2}$ donc $(a-m)(a-b) = \dfrac{(a-b)^2}{2}$.

De même pour les deux autres.

b) Simple vérification.

1. Voir le § consacré à l'interpolation de Lagrange.

c) D'après l'interpolation de Lagrange, le polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ coïncidant avec f en a, m et b est

$$P(x) = f(a)L_a(x) + f(m)L_m(x) + f(b)L_b(x).$$

Alors

$$\int_a^b P(x)dx \simeq f(a)\int_a^b L_a(x)dx + f(m)\int_a^b L_m(x)dx + f(b)\int_a^b L_b(x)dx$$

D'où

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\big(\frac{a+b}{2}\big) + f(b)\right).$$

2. Les extrémités a et b apparaissent une fois avec le coefficient $\frac{1}{6}$, les extrémités $a_{2i} = a + ih$ $(1 \leqslant i \leqslant N-1)$) des N sous-intervalles apparaissent deux fois en tant qu'extrémités droite puis gauche des sous-intervalles, munis du coefficient $2 \times \frac{1}{6}$, et les milieux a_{2i-1} $(1 \leqslant i \leqslant N)$ des sous-intervalles apparaissent une fois munis du coefficient $\frac{4}{6}$.

3.
```
def Simpson(a,b,N):
    s = f(a)+f(b)
    h = (b-a)/N
    for i in range(1,N):
        s += 2*f(a+i*h)
    for i in range(1,N+1):
        s += 4*f(a+(2*i-1)*h/2)
    return s*h/6
```

4.
```
test = [5,10,20,50,100]
res = np.zeros((2,len(test)))
for i in range(len(test)):
    N = test[i]
    res[0,i] = N
    res[1,i] = abs(Simpson(0,np.pi,N)-2/15)

# Pour afficher 7 chiffres en \'evitant l'\'ecriture scientifique #
np.set_printoptions(precision=7,suppress=True)
print(res)
```
fournit

```
[[  5.         10.         20.        50.         100.       ]
 [  0.0581391  0.0017027  0.000093  0.0000023  0.0000001]]
```

La précision est bien meilleure que celle des méthodes des rectangles et des trapèzes.

Exercice 204

Méthode de Gauss à trois points

Le § sur l'intégration numérique par la méthode de quadrature de Gauss nous a appris que

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt \simeq \frac{5}{9}P\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}P(0) + \frac{5}{9}P\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

cette formule étant exacte pour tout polynôme P de degré $\leqslant 5$.
Que donne cette méthode appliquée à d'autres fonctions que les polynômes ?
On pose $\rho = \sqrt{\frac{3}{5}}$, de sorte que notre formule d'approximation devient

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \simeq \frac{1}{9}\big(5f(-\rho) + 8f(0) + 5f(\rho)\big)$$

1. Soit $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$. On pose $d = \frac{b-a}{2}$. Montrer que la méthode revient à

$$\int_a^b f(u)du \simeq \frac{d}{9}\left(5f\big(-d\rho + m\big) + 8f(m) + 5f\big(d\rho + m\big)\right).$$

2. Écrire une fonction `Gauss3(a,b)` calculant une valeur approchée par cette méthode de $\int_a^b f(u)du$.

3. Pour améliorer la précision, on décide de partager $[\,a\,;\,b]$ en $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ intervalles de longueur $\dfrac{b-a}{\mathrm{N}}$ et d'appliquer l'approximation précédente sur chacun de ces sous-intervalles.
Programmer une fonction `Gauss(a,b,N)` calculant une valeur approchée de l'intégrale sur ce principe sans utiliser de boucle.

4. Indiquer l'erreur absolue commise lors du calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \sin\big(\frac{15t}{2}\big)\mathrm{d}t$ par cette méthode pour $\mathrm{N} \in \{5, 10, 20, 50, 100\}$.
Commentaire ?

Solution (**Ex.204 –** *Méthode de Gauss à trois points*)

1. On pose $t = \dfrac{2}{b-a}u - \dfrac{a+b}{b-a}$ $\big(\Longleftrightarrow u = \dfrac{b-a}{2}t + \dfrac{a+b}{2}\big)$ de sorte que

$$\int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f\big(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\big)\mathrm{d}t.$$

On obtient alors

$$\int_a^b f(u)\mathrm{d}u \simeq \frac{b-a}{18}\left(5f\big(-\frac{b-a}{2}\rho + m\big) + 8f(m) + 5f\big(\frac{b-a}{2}\rho + m\big)\right).$$

2.
```
def Gauss_3(a,b):
    rho = np.sqrt(3/5)
    h = (b-a)/2
    m = (a+b)/2
    return h*(5*(f(-h*rho+m)+f(h*rho+m))+8*f(m))/9
```

3.
```
def Gauss(a,b,N):
    rho = np.sqrt(3/5)
    h = (b-a)/(2*N)
    m = np.linspace(a+h,b-h,N)
    return h*(5*(sum(f(-h*rho+m))+sum(f(h*rho+m)))+8*sum(f(m)))/9
```

4.
```
test = [5,10,20,50,100]
res = np.zeros((2,len(test)))
for i in range(len(test)):
    N = test[i]
    res[0,i] = N
    res[1,i] = abs(Gauss(0,np.pi,N)-2/15)

# Pour afficher 3 chiffres avec \'ecriture scientifique #
np.set_printoptions(precision=2,suppress=False)
print(res)
```
Ce qui fournit le tableau

```
[[  5.         10.         20.         50.         100.]
 [  2.03e-03   1.38e-05   1.85e-07   7.30e-10   1.13e-11]]
```

La méthode de Gauss est de loin la plus performante que celles envisagées précédemment.

Chapitre 59

Gauss-Legendre et Gauss-Tchebychev avec Python

☞*Il est conseillé de lire les § « Espaces de Hilbert et familles de polynômes orthogonaux » et « Intégration numérique de Gauss » au préalable, mais on peut aussi admettre la propriété rappelée ci-après.*

Exercice 205

Quadrature numérique de Gauss

Soit $]a\,;\,b[\subset\mathbb{R}$ et $\omega :]a\,;\,b[\to\mathbb{R}$ une fonction poids, c'est-à-dire strictement positive et telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t\mapsto t^n\omega(t)$ est intégrable sur $]a\,;\,b[$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Soit $(\mathrm{P}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une famille de polynômes orthogonaux telle que : $\forall k\in[\![0\,;\,n]\!], \deg(\mathrm{P}_k)=k$.
Alors P_n admet exactement n racines réelles distinctes $r_1,\dots,r_n$ dans $]a\,;\,b[$ et il existe n coefficients réels $c_1,\dots,c_n$ tel que

$$\forall \mathrm{P}\in\mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}],\quad \int_a^b \mathrm{P}(t)\omega(t)\mathrm{d}t = c_1\mathrm{P}(r_1)+\cdots+c_n\mathrm{P}(r_n).$$

Cette formule étant remarquablement simple, on l'extrapole aux fonctions $f :]a\,;\,b[\to\mathbb{R}$, ce qui fournit la formule de quadrature de Gauss

$$\int_a^b f(t)\omega(t)\mathrm{d}t \simeq c_1 f(r_1)+\cdots+c_n f(r_n).$$

Lorsque $]a\,;\,b[\;=\;]-1\,;\,1[$ et $\omega=1$, on parle de méthode de Gauss-Legendre, et lorsque $]a\,;\,b[\;=\;]-1\,;\,1[$ et $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, on parle de méthode de Gauss-Tchebychev.

Exercice 206

Gauss-Legendre, Pascal, Horner, dichotomie...

1. *Petite bibliothèque pour calculer les polynômes de Legendre*
   Les polynômes de Legendre sont définis par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{L}_n(\mathrm{X}) = [(\mathrm{X}^2-1)^n]^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dX}^n}(\mathrm{X}^2-1)^n.$$

   Il arrive fréquemment qu'on les normalise par un coefficient $\dfrac{1}{2^n n!}$, ce qui n'a pas d'intérêt ici car on ne s'intéresse qu'à leurs racines. On décide de représenter les polynômes par des `numpy.array` et on amorce un script en `Python` par

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

degre = 20
```

`degre` est une constante indiquant le degré maximum des polynômes que l'on souhaite utiliser. Chaque polynôme $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_{degre}\mathrm{X}^{degre}$ sera représenté par le `np.array [ a0, a1, ..., adegre ]`, étant entendu que si $\deg(\mathrm{P}) <$`degre`, tous les coefficients d'ordre $k >$`degre` seront pris égaux à 0.

a) Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie le `np.array` codant le polynôme dont les coefficients sont fournis par la liste `l`

```
def creer(l):
    p = np.zeros(.............)
    for k in range(len(l)):
        p[k] = ..........
    return p
```

Par exemple

```
creer([1,-2,3])
>>>
array([ 1., -2.,  3.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,
        0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.])
```

b) Compléter la fonction suivante afin qu'elle transforme un polynôme au format `np.array` en chaîne de caractères suffisamment lisible, par exemple :

```
aff_poly(creer([1,0,-2,3]))
>>> '+3.0X^3-2.0X^2+1.0X^0'

def aff_poly(p):
    s = ""
    for k in reversed(range(0,degre+1)):
        if p[k] != 0:
            ......
            ......
            ......
    return s
```

c) Écrire une fonction `deriv(p)` renvoyant le dérivé du polynôme `p`.

d) Écrire le développement suivant la base canonique de $(\mathrm{X}^2 - 1)^n$.

e) Soit $0 \leqslant p \leqslant n$. Justifier les relations

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ \dfrac{n}{p}\dbinom{n-1}{p-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

et programmer une fonction **récursive** `binom(n,p)` calculant $\dbinom{n}{p}$.

f) Écrire enfin une fonction `Legendre(n)` calculant le n−ème polynôme de Legendre en dérivant n fois $(\mathrm{X}^2 - 1)^n$. On vérifiera qu'on obtient

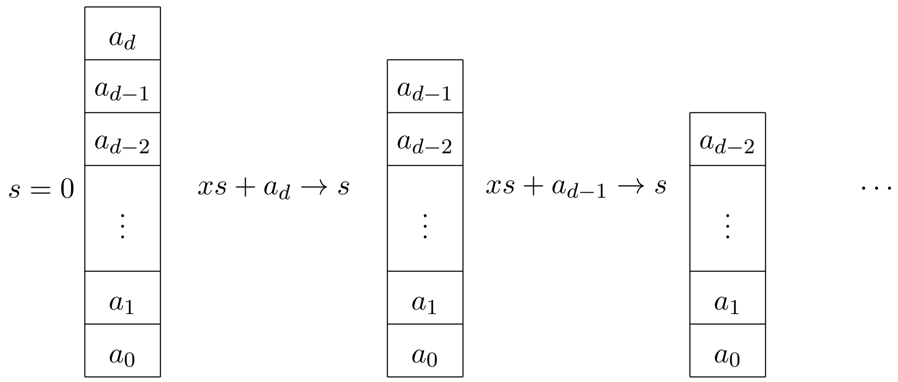
```
aff_poly(legendre(4))
>>> '+1680.0X^4-1440.0X^2+144.0X^0'
```

donc $\mathrm{L}_4 = 1680\mathrm{X}^4 - 1440\mathrm{X}^2 + 144$.

2. *Évaluation d'un polynôme en un point : algorithme de Horner*

On doit à Horner l'algorithme suivant de calcul de $\mathrm{P}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ qui est linéaire et ne nécessite aucun calcul de puissance.

La présentation en *pile* est assez efficace.



$$xs + a_1 \to s \;\boxed{a_0}\; xs + a_0 \to s, \text{ et alors } s = \mathrm{P}(x)$$

On rappelle que la méthode `liste.pop()` dépile la liste `liste`, c'est-à-dire
(i) renvoie le dernier élément de `liste`,
(ii) supprime cet élément de `liste`.
Compléter l'algorithme suivant afin qu'il renvoie la valeur de $\mathrm{P}(x)$, le polynôme P étant défini par le `np.array p`.

```
def Horner(p,x):
    s = ......
    l = list(p)
    for k in range(........):
        s = ......
    return s
```

3. *Recherche d'une racine par dichotomie*
On suppose un polynôme P défini sur $]\,a\,;\ b[$ vérifiant $\mathrm{P}(a)\mathrm{P}(b) < 0$.

a) Justifier que P admet au moins une racine dans $]\,a\,;\ b[$.

b) Écrire une fonction `dicho(p,a,b,e)` renvoyant une racine de `p` dans $]\,a\,;\ b[$ avec une précision au moins égale à `e`.

4. *Racines des polynômes de Legendre*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit P_n le polynôme $(\mathrm{X}^2-1)^n$.

a) Justifier qu'il existe une famille de polynômes $(\mathrm{Q}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ telle que

$$\forall k \in [[\,0\,;\ n]]\,, \quad \mathrm{P}_n^{(k)} = (\mathrm{X}^2-1)^{n-k}\mathrm{Q}_k,$$

et vérifiant

$$\forall k \in [[\,0\,;\ n-1]]\,, \quad \mathrm{Q}_{k+1} = (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{Q}_k' + 2(n-k)\mathrm{X}\mathrm{Q}_k.$$

b) Que peut-on dire de Q_n ?

c) Justifier, pour tout $k \in [[\,1\,;\ n]]$, que Q_k admet exactement k racines distinctes, et qu'entre chaque racine successive de P_k se trouve exactement une racine de P_{k-1}. Schématiquement

	-1							1
Q_0				pas de racine				
Q_1				$\alpha_{1,1} = 0$				
Q_2			$\alpha_{2,1}$		$\alpha_{2,2}$			
Q_3		$\alpha_{3,1}$		$\alpha_{3,2}$		$\alpha_{3,3}$		
Q_4	$\alpha_{4,1}$		$\alpha_{4,2}$		$\alpha_{4,3}$		$\alpha_{4,4}$	

d) Écrire une fonction `produit(p,q)` renvoyant le produit des deux polynômes `p` et `q`.

e) Compléter la fonction `racine(n,e)` suivante de sorte qu'elle renvoie la liste des racines de L_n avec une précision inférieure à `e`.

```
def racine(n,e):
    Qk = creer([1])
    Xdmu = creer([-1,0,1])
    dX = creer([0,2])
    Rk = [-1,1]
    for k in range(n):
        Qk = ..........................
```

```
        aux = [-1]
        for i in range(k+1):
            aux.append(dicho(....................))
        Rk = aux+[1]
    return np.array(Rk[1:-1])
```

À titre d'exemple, on doit obtenir ceci :

```
racine(3,1e-8)
>>> array([ -7.74596672e-01,   1.27271108e-09,
            7.74596670e-01])
```

5. *Calcul des coefficients c_i par les polynômes de Lagrange*
Toujours en notant $r_1, \dots, r_n$ les racines du polynôme de Legendre L_n, on introduit la base de Lagrange $(\ell_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ associée à ces n racines, définie par

$$\forall i \in [\![1\,;\ n]\!], \quad \ell_i(\mathrm{X}) = \prod_{1\leqslant j\leqslant n, j\neq i} \frac{\mathrm{X}-r_j}{r_i - rj}.$$

a) Justifier que

$$\forall i \in [\![1\,;\ n]\!], \quad c_i = \int_{-1}^{1} \ell_i(t)\mathrm{d}t.$$

b) Compléter les deux boucles de la fonction suivante qui doit renvoyer le tableau des coefficients $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$

```
def coeff_L(r):
    c = np.zeros(len(r))
    for i in range(len(r)):
    # Calcul de li
        li = creer([1])
        for j in range(len(r)):
            if j != i:
                li = ........
    # Calcul de l'int\'egrale de li sur [-1,1]
        for j in range(int((len(r)+1)/2)):
            c[i] += ........
    return c
```

À titre d'exemple, on doit obtenir ceci :

```
coeff_L(racine(3,1e-8))
>>> array([ 0.55555555,  0.88888889,  0.55555555])
```

6. *Calcul des coefficients c_i par la résolution d'un système de Vandermonde*
On note $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $\mathrm{V} = (r_j^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_0 \\ \vdots \\ \mathrm{I}_{n-1} \end{pmatrix}$ où, pour tout i de $[\![0\,;\ n-1]\!]$, $\mathrm{I}_i = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^i \mathrm{d}t$.

a) Justifier que C est l'unique solution du système linéaire $\mathrm{VC} = \mathrm{B}$.

b) L'instruction `a = np.vander(r,increasing=True).transpose()` crée la matrice de Vandermonde $a = (r[j]^{i-1})$, et `np.linalg.solve(a,b)` renvoie la solution `x` du système linéaire `a.x=b`.
Écrire une fonction `coeff_V(r)` renvoyant le tableau des coefficients (c_i) en résolvant le système de Vandermonde précédent.
S'assurer qu'on obtient les mêmes valeurs que par la fonction `coeff_L`.

7. *Mise en œuvre de la quadrature de Gauss-Legendre et exemples*
Soit $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$. On pose $\ell = \dfrac{b-a}{2}$ et $m = \dfrac{a+b}{2}$. Montrer que la méthode revient à l'approximation

$$\int_a^b f(u)\mathrm{d}u \simeq \ell \sum_{i=1}^{n} c_i f\big(\ell r_i + m\big).$$

a) Écrire une fonction `Gauss_Legendre(f,a,b,n)` calculant une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f$ à l'aide des racines du polynôme de L_n calculées avec une précision `1e-8`.

b) Soit $f : [0\,;\ \pi] \to \mathbb{R}, t \mapsto \sin\left(\dfrac{5}{2}t\right)$.

Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$.

On désigne par I_n la valeur renvoyée par `Gauss_Legendre(f,0,np.pi,n)`.

Compléter le tableau d'erreurs relatives suivant :

n	2	3	4	5	6	7
$\left\lvert\dfrac{\mathrm{I}-\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}}\right\rvert$						

c) Soit $g :]-1\,;\ 1[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$.

Justifier l'existence de $\mathrm{J} = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ et la calculer.

Dans la mesure où cette méthode de quadrature n'exige pas de calculer g en 1, on peut se demander ce que donne cette méthode pour une telle intégrale impropre.

On désigne par J_n la valeur renvoyée par `Gauss_Legendre(g,-1,1,n)`.

Compléter le tableau suivant :

n	2	3	4	7	10	15
$\left\lvert\dfrac{\mathrm{J}-\mathrm{J}_n}{\mathrm{J}}\right\rvert$						

Commentaire ? *Pour pallier cet inconvénient et élaborer une stratégie pour des intégrales impropre, voir l'exercice suivant.*

Solution (**Ex.206** – *Gauss-Legendre, Pascal, Horner, dichotomie...*)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

degre = 20

def creer(l):
    p = np.zeros(degre+1)
    for k in range(len(l)):
        p[k] = l[k]
    return p

def aff_poly(p):
    s = ""
    for k in reversed(range(0,degre+1)):
        if p[k] != 0:
            if p[k] > 0:
                s += "+"
            s += str(p[k])+"X^"+str(k)
    return s

def deriv(p):
    d = np.zeros(degre+1)
    for k in range(1,degre+1):
        d[k-1] = k*p[k]
    d[degre] = 0
    return d

def binom(n,p):
    if p == 0:
        return 1
    else:
```

```
        return (n*binom(n-1,p-1))//p

def Legendre(n):
    Ln = np.zeros(degre+1)
    for p in range(n+1):
        Ln[2*p] = binom(n,p)*(-1)**(n-p)
    for p in range(n):
        Ln=deriv(Ln)
    return Ln

def Horner(p,x):
    s = 0
    l = list(p)
    for k in range(degre+1):
        s = x*s+l.pop()
    return s

def dicho(p,a,b,e):
    a = a
    b = b
    while b-a>e:
        m=(a+b)/2
        if Horner(p,m)*Horner(p,a)>0:
            a = m
        else:
            b = m
    return (a+b)/2

def produit(p,q):
    r = np.zeros(degre+1)
    for k in range(degre+1):
        r[k] = 0
        for i in range(k+1):
            r[k] += p[i]*q[k-i]
    return r

def racine(n,e):
    Qk = creer([1])
    Xdmu = creer([-1,0,1])
    dX = creer([0,2])
    Rn = [-1,1]
    for k in range(n):
        Qk = produit(deriv(Qk),Xdmu)+(n-k)*produit(Qk,dX)
        aux = [-1]
        for i in range(k+1):
            aux.append(dicho(Qk,Rn[i],Rn[i+1],e))
        Rn = aux+[1]
    return np.array(Rn[1:-1])

def coeff_L(r):
    c = np.zeros(len(r))
    for i in range(len(r)):
    # Calcul de li
        li = creer([1])
        for j in range(len(r)):
```

```
            if j != i:
                li = produit(li,creer([-r[j],1]))/(r[i]-r[j])
    # Calcul de l'int\'egrale de li sur [-1,1]
        for j in range(int((len(r)+1)/2)):
            c[i] += 2*li[2*j]/(2*j+1)
    return c

def coeff_V(r):
    a = np.vander(r,increasing=True).transpose()
    b = np.zeros(len(r))
    for i in range(int((len(r)+1)/2)):
        b[2*i] = 2/(2*i+1)
    return np.linalg.solve(a,b)

def Gauss_Legendre(f,a,b,n):
    r = racine(n,1e-8)
    c = coeff_V(r)
    l = (b-a)/2
    m = (a+b)/2
    return l*sum(c*f(l*r+m))

def f(t):
    return np.sin(2.5*t)

for n in [2,3,4,5,6,7]:
    print(abs(Gauss_Legendre(f,0,np.pi,n)-2/5)*5/2)

def f(t):
    return 1/np.sqrt(1-t)

for n in [2,3,4,7,10,15]:
    print(abs(Gauss_Legendre(f,-1,1,n)/(2*np.sqrt(2))-1))
```

n	2	3	4	5	6	7
$\left\lvert\dfrac{\mathrm{I}-\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}}\right\rvert$	2.56	0.398	0.0307	0.00142	4.37E^{-05}	9.62E^{-07}

n	2	3	4	7	10	15
$\left\lvert\dfrac{\mathrm{J}-\mathrm{J}_n}{\mathrm{J}}\right\rvert$	0.175	0.125	0.0968	0.0581	0.0415	0.0281

Pour l'intégrale impropre J la convergence est moins rapide.

Exercice 207

Gauss-Tchebychev, exemple d'une intégrale impropre

On cherche à améliorer le calcul approché de l'intégrale impropre de l'exercice précédent

$$\mathrm{J} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$$

On observe que $\mathrm{J} = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} h(t)\omega(t)\mathrm{d}t$ où

$$h :]-1\,;\ 1[\to \mathbb{R}, \sqrt{1+t} \text{ et } \omega :]-1\,;\ 1[\to \mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

On sait que les polynômes de Tchebychev $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont orthogonaux pour cette fonction poids. De plus, les racines de T_n sont les réels $\cos\big(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\big)$ pour $k \in [[\,0\,;\ n-1]]$.

Donc il existe n coefficients $(c_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ tels que

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \simeq \sum_{i=0}^{n-1} c_i f\left(\cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right)\right)$$

la formule étant exacte pour toute fonction polynomiale f de degré au plus $2n-1$.

1. a) Justifier que pour $f(t)=t^k$, $\mathrm{I}_k \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^k(t)\mathrm{d}x$.

b) Justifier que $\sin^{2k}(t) = \dfrac{1}{2^{2k-1}}\left(\dfrac{1}{2}\dbinom{2k}{k} + (-1)^k \displaystyle\sum_{p=0}^{k-1}\binom{2k}{p}\cos(2(k-p)t)\right)$.

c) En déduire que

$$\mathrm{I}_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^k}\dbinom{k}{k/2}\pi & \text{si } k \text{ pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases}$$

d) Soit $0 \leqslant p \leqslant n$. Justifier les relations

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p=0 \\ \dfrac{n}{p}\dbinom{n-1}{p-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

et programmer une fonction **récursive** `binom(n,p)` calculant $\dbinom{n}{p}$.

e) Écrire une fonction `I(k)` renvoyant la valeur de l'intégrale I_k.

2. Écrire une fonction `racine(n)` renvoyant le tableau de type `np.array` contenant les n racines du polynôme T_n.

3. a) La relation étant exacte pour toutes les fonctions $t \mapsto t^k$ avec $k \in [[\,0\,;\ n-1]]$, écrire le système dont les $(c_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ sont solutions.

b) L'instruction `a = np.vander(r,increasing=True).transpose()` crée la matrice de Vandermonde $a = (r[j]^{i-1})$, et `np.linalg.solve(a,b)` renvoie la solution `x` du système linéaire `a.x=b`.
Compléter la fonction suivante

```
def Gauss_Tchebychev(f,n):
    r = racine(n)
    a = np.vander(r,increasing=True).transpose()
    # D\'efinir b
    ..............
    c = np.linalg.solve(a,b)
    return sum(c*f(r))
```

4. On revient au calcul approché de $\mathrm{J} = \displaystyle\int_{-1}^{1} h(t)\omega(t)\mathrm{d}t$.

a) Définir la fonction h.

b) On désigne par H_n la valeur renvoyée par `Gauss_Tchebychev(h,n)`.

n	2	3	4	7	10	15
$\left\lvert\dfrac{\mathrm{J}-\mathrm{H}_n}{\mathrm{J}}\right\rvert$						

Commentaire ?

Solution (**Ex.207** – *Gauss-Tchebychev, exemple d'une intégrale impropre*)

$$\sin^{2k}(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2i}\right)^{2k} = \frac{1}{2^{2k}}(-i)^{2k}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}(-1)^{2k-p}\mathrm{e}^{ipt}\mathrm{e}^{-i(2k-p)t}$$

$$\sin^{2k}(t) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\left(\sum_{p=0}^{k-1}\binom{2k}{p}(-1)^p\mathrm{e}^{i(2p-2k)t} + (-1)^k\binom{2k}{k}\right.$$
$$\left. + \sum_{p=k+1}^{2k}\binom{2k}{p}(-1)^p\mathrm{e}^{i(2p-2k)t}\right)$$

$$\sin^{2k}(t) \overset{q=2k-p}{=} \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\left(\sum_{p=0}^{k-1}\binom{2k}{p}(-1)^p\mathrm{e}^{i(2p-2k)t} + (-1)^k\binom{2k}{k}\right.$$

$$+\sum_{q=0}^{k-1}\binom{2k}{2k-q}(-1)^q \mathrm{e}^{i(2k-2q)t}\Bigg)$$

$$\sin^{2k}(t) \overset{q=2k-p}{=} \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\left(\sum_{p=0}^{k-1}\binom{2k}{p}\left[\mathrm{e}^{i(2p-2k)t}+\mathrm{e}^{i(2k-2p)t}\right]+(-1)^k\binom{2k}{k}\right)$$

$$\sin^{2k}(t) = \frac{1}{2^{2k-1}}\left(\frac{1}{2}\binom{2k}{k}+(-1)^k\sum_{p=0}^{k-1}\binom{2k}{p}\cos(2(k-p)t)\right)$$

I_k est nulle pour k impair car on intègre une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

Avec la relation précédente, comme $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(2(k-p)t)\mathrm{d}t = 0$ pour $0 \leqslant p < k$, on obtient $\mathrm{I}_k = \dfrac{1}{2^k}\dbinom{k}{k/2}$ pour k pair.

Proposition de programme :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def binom(n,p):
    if p == 0:
        return 1
    else:
        return (n*binom(n-1,p-1))//p

def I(k):
    if k%2 == 0:
        return binom(k,k/2)/2**k*np.pi
    else:
        return 0

def racine(n):
    return np.array([np.cos((2*k+1)*np.pi/(2*n)) for k in range(n)])

def Gauss_Tchebychev(f,n):
    r = racine(n)
    a = np.vander(r,increasing=True).transpose()
    b = np.array([I(k) for k in range(n)])
    c = np.linalg.solve(a,b)
    return sum(c*f(r))

def h(t):
    return np.sqrt(1+t)

for n in [2,3,4,7,10,15]:
    print(abs(Gauss_Tchebychev(h,n)/(2*np.sqrt(2))-1))
```

n	2	3	4	7	10	15
$\left\lvert\dfrac{\mathrm{J}-\mathrm{H}_n}{\mathrm{J}}\right\rvert$	0.0262	0.0115	0.00645	0.00210	0.00103	0.000457

La méthode Gauss-Tchebychev est mieux adaptée au calcul de ce type d'intégrales impropres que la méthode de Gauss-Legendre. Avec le même nombre de points, l'erreur relative est de l'ordre de 50 fois plus faible.

Chapitre 60

Programmation orientée objet : la classe `Polynome`

Pour manipuler des polynômes, nous pouvons utiliser des listes : après tout, un polynôme est avant tout une liste (finie) de coefficients. Par exemple, on peut convenir que la liste

$$P = [1,\ 2,\ 3] \text{ représente le polynôme } P = 1 + 2X + 3X^2.$$

C'est faisable mais les opérations sur les listes ne sont pas les mêmes que les opérations sur les polynômes.

Par exemple, si P = [1, 2, 3] et Q = [1, -2, 0, 1] alors P+Q est la liste [1, 2, 3, 1, -2, 0, 1] puisque pour les listes, « + » désigne la concaténation, alors que si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 1 - 2X + X^3$, $P + Q$ est le polynôme $1 + 3X^2 + X^3$, qui n'est évidemment pas représenté par la liste P+Q précédente mais par [1 ,0 ,3 ,1].

De même, P=[1,1] ; P(2) provoque une erreur de type 'LIST' OBJECT IS NOT CALLABLE signifiant qu'une liste n'est pas évaluable en un point. Or pour un polynôme P, l'évaluation de P en 2, notée P(2), a un sens.

Si PYTHON possède un certain nombre d'objets prédéfinis, avec leurs opérations propres, opérations appelées *méthodes*, dont la syntaxe est en général `nom_de_l_objet.methode()` (pensez à LISTE.APPEND() par exemple), PYTHON offre aussi la possibilité de créer de nouveaux objets, pour lesquels ont peut définir toutes les opérations et fonctions qui nous sembleront utiles.

Ainsi, nous allons définir une nouvelle *classe* d'objets, les polynômes, ainsi que les opérations et fonctions usuelles sur ces objets, pour pouvoir nous en servir aussi librement que n'importe quel autre objet déjà connu de PYTHON (liste LIST, chaîne de caractères STRING, entier INT, réel FLOAT, booléens BOOLEAN, etc.)

Exercice 208

Définition de la classe `Polynome`

1. Le code suivant

```
class Polynome():
    def __init__(self,coefficients):
        self.coeffs = coefficients
```

définit une nouvelle classe d'objet.

a) Exécuter ce script, puis dans la console exécuter `P = Polynome([1, 2, 3])`, puis `P`, puis `P.coeffs`.

On a défini une nouvelle classe d'objets, les polynômes, qui s'initialisent avec la donnée de ses coefficients, qu'on récupère en invoquant la méthode `nom_du_polynome.coeffs`, le nom du polynôme s'appelant traditionellement SELF (lui-même, logique non ?).

b) On complète notre script de la façon suivante :

```
class Polynome():
    def __init__(self,coefficients):
        self.coeffs = coefficients

    def deg(self):
        n = len(self.coeffs)
        for i, c in enumerate(reversed(self.coeffs)):
            if c != 0:   #ou abs(c)<=1e-10 (erreurs de calcul)
                return n-1-i
        return -1
```

Exécuter ce script, définir `P = Polynome([1, -2, 3, 0])`, puis `P.coeffs` puis `P.deg()`.

c) Quelle convention est adoptée pour le degré du polynôme nul dans ce script ?
Nous venons de définir une méthode propre aux polynômes : la fonction « degré ».

2. a) Exécuter P, puis PRINT(P). L'affichage est-il satisfaisant ?
On ne peut pas en vouloir à PYTHON de ne pas savoir que, pour nous, la présentation naturelle du polynôme de coefficients [1, -2, 3, 0] est $1-2X+3X^2$, que l'on pourrait afficher par la chaîne de caractères `'1+(-2)*X+3*X^3'`.

b) La méthode qui, dans une classe d'objets, définit sa repésentation est `__str__(self)`. Compléter le script suivant afin d'obtenir un affichage lisible des polynômes. On testera cet affichage en exécutant `print(P)` pour différents polynômes.

```
def __str__(self):
    if self.deg() == -1:
        return '0'
    else:
        chaine = ''
        for k, c in enumerate(self.coeffs):
            if c !=0:
                if c > 0:
                    chaine += str(c)
                else:
                    chaine +='('+str(c)+')'
                if k == 1:
                    chaine += .........
                elif k >= 2:
                    chaine += .........
                chaine += '+'
        return chaine[:len(chaine)-1]
```

Exercice 209

Opérations algébriques usuelles

Venons-en aux opérations sur les polynômes. Comme rappelé en introduction, la somme de listes (LIST) est la concaténation. Il est possible de définir la somme pour les polynômes, de façon à ce que P+Q génère le polynôme somme de P et Q.

1. a) Compléter la méthode `__add__(self,other)`

```
def __add__(self,other):
    if self.deg() < other.deg():
        self, other = other, self
    tmp = other.coeffs + [0]*(self.deg()-other.deg())
    res = []
    for k in range(len(self.coeffs)):
        res.append(.......................)
    return Polynome(res)
```

b) Définir deux polynômes P et Q puis vérifier que PRINT(P+Q) affiche le polynôme attendu.

2. Définir une méthode `__neg__(self)` générant le polynôme opposé de SELF. On pourra chercher une écriture condensée comme

```
def __neg__(self):
    return Polynome([...... for c in self.coeffs])
```

3. Définir, à l'aide des méthodes précédentes, la méthode `__sub__(self,other)` générant le polynôme SELF-OTHER sans utiliser de boucle.

4. On peut envisager le produit polynomial de deux façons :

- le produit par un scalaire, qui confère à $\mathbb{R}[X]$ (avec l'addition) une structure d'espace vectoriel $\big(\mathbb{R}[X],+,.\big)$;

- le produit de deux polynômes, qui confère à $(\mathbb{R}[X],+,.,\times)$[1] une structure d'*algèbre*[2]

a) Compléter la fonction (propre à la classe POLYNOME) afin qu'elle génère le polynôme produit de SELF par le scalaire REEL :

```
def scalp(self,reel):
    return Polynome([ ...................... ])
```

b) Soit $P=\sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ deux polynômes. Soit $R=P\times Q$. On pose $R=\sum_{k=0}^{m+n} c_k X^k$.

Justifier que, pour tout $k\in[[0\,;\,m+n]]$, $c_k=\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Justifier que, pour tout $k\in[[0\,;\,m+n]]$,

$$c_k=\sum_{\max(0,k-\deg(Q)\leqslant i\leqslant \min(\deg(P),k)} a_i b_{k-i}.$$

c) Écrire une méthode `__mul__(self,other)` générant le produit de SELF et OTHER.

d) Observer si P=POLYNOME([1,2,3]) ; Q=POLYNOME([1,0,-1]) ; PRINT(P*Q) produit l'affichage attendu.

Exercice 210

Évaluation : l'algorithme de HÖRNER

0

Un objet peut être « évaluable » (« CALLABLE » nous dit PYTHON) : c'est la cas des fonctions et des méthodes prédéfinies ou de celles que l'utilisateur définit. Syntaxiquement, cela s'exprime par les parenthèses (...) :

SIN(T), LISTE.INDEX('BONJOUR'), MIN(A,B),...

alors que les crochets [...] sont réservés aux collections (LIST, TUPLE, STRING, NUMPY.ARRAY...) d'objets énumérables par des indices (« ITERABLE » nous dit PYTHON).

Les coefficients des polynômes sont des listes (catégorie ITERABLE), mais les polynômes sont évaluables (CALLABLE) en un point. Il serait bon que, lorsqu'on écrit P(1), PYTHON calcule la valeur du polynôme P en 1. Pour cela, il faut définir la méthode `__call__(self, x)` qui retournera la valeur du polynôme SELF en X.

1. a) Vérifier la formule dite *Algorithme de Hörner* pour un polynôme $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$$P(x)=a_0+x(a_1+x(a_2+x(a_3+\dots(a_{n-1}+x(a_n))))).$$

b) En quoi cette formule est-elle bien meilleure que

$$P(x)=a_0+a_1\times x+a_2\times x\times x+\cdots+a_n\times x\times\cdots\times x\,?$$

2. Programmer la méthode `__call__(self, x)` et la tester en définissant un polynôme P et en exécutant P(2) par exemple.

Solution : proposition de définition des la classe POLYNOME

Proposition de définition de la classe POLYNOME :

```
class Polynome():            #D\'efinition d'une nouvelle classe d'objet
    def __init__(self,coefficients):    #Initialisation d'un objet polynome
        self.coeffs = coefficients      #par le liste de ses coefficients

    def deg(self):                      #M\'ethode d\'eterminant le degr\'e
        n = len(self.coeffs)
        for i, c in enumerate(reversed(self.coeffs)):   #Parcourir les
            if c != 0:                  #coefficients du plus haut au plus
                return n-1-i            #jusqu'\`a en rencontrer un non nul
        return -1                       #deg(0)=-1

    def __str__(self):                  #M\'ethode pour l'affichage propre
        if self.deg() == -1:            #Cas du polyn\^ome nul
            return '0'
```

1. Où $\times$ désigne le produit de deux polynômes.
2. Cette notion est hors de notre programme, mais vous noterez que c'est aussi les cas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe l'addition, la multiplication par un scalaire, mais aussi la multiplication de deux matrices.

```
        else:
            chaine = ''                 #des polynomes, e.g. 1+(-2)*X+3*X^2
            for k, c in enumerate(self.coeffs):
                if c !=0:               #On affiche que les mon\^omes non nuls
                    if c > 0:           #Parenth\'esage pour les coefficients
                        chaine += str(c)#n\'egatifs '+-2', c'est pas joli
                    else:
                        chaine +='('+str(c)+')'
                    if k == 1:          #Mon\^ome de degr\'e 1
                        chaine += '*X'
                    elif k >= 2:        #Mon\^omes de degr\'e sup\'erieur
                        chaine += '*X^'+str(k)
                    chaine += '+'       #Un '+' pour pr\'eparer le terme suivant
            return chaine[:len(chaine)-1]   #Suppression du dernier '+'
####### C'est parti pour les op\'erations usuelles
    def __add__(self,other):            #Addition
        if self.deg() < other.deg():
            self, other = other, self
        tmp = other.coeffs + [0]*(self.deg()-other.deg())
        res = []
        for k in range(len(self.coeffs)):
            res.append(self.coeffs[k]+tmp[k])
        return Polynome(res)

    def __neg__(self):                  #Opposition
        return Polynome([-c for c in self.coeffs])

    def __sub__(self,other):            #Soustraction
        return self+(-other)

    def scalp(self,reel):               #Produit par le scalaire 'reel'
        return Polynome([reel*c for c in self.coeffs])

    def __mul__(self,other):            #Produit de deux polyn\^omes
        dself = self.deg()
        dother = other.deg()
        res = []
        for k in range(dself+dother+1):
            res += [ sum(self.coeffs[i]*other.coeffs[k-i]#\`A \'ecrire sur 1 ligne
                        for i in range(max(0,k-dother),min(dself,k)+1))]
        return Polynome(res)

    def __call__(self, x):              #\'Evaluation en un point 'x' par
        somme = 0                       #l'algorithme de Horner
        for c in reversed(self.coeffs):
            somme = c +x*somme
        return somme
```

Chapitre 61

POO & interpolation polynomiale

Munis de la classe d'objets POLYNOME (voir section précédente), nous allons pouvoir déterminer le polynôme de degré coïncidant aux $n+1$ points x_i avec la fonction f.

Exercice 211

Bases de Lagrange et interpolation

1. Pour répondre au problème, Lagrange propose de créer $n+1$ polynômes définis par

$$\forall i \in [\![0\,;\ n]\!]\,, \quad \mathrm{L}_i(\mathrm{X}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \prod_{0\leqslant k\leqslant n, k\neq i} \frac{\mathrm{X}-x_k}{x_i-x_k}.$$

a) Quel est le degré de chaque L_i ?

b) Que vaut, pour tout $(i,j) \in [\![0\,;\ n]\!]^2$, $\mathrm{L}_i(x_j)$? On distinguera les cas $j=i$ et $j\neq i$.

c) En déduire, *sans chercher à développer les* L_i, que la famille $\left(\mathrm{L}_i\right)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

d) Vérifier que le polynôme

$$\mathrm{I}_n(\mathrm{X}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{L}_i(\mathrm{X})$$

est le polynôme cherché.

2. a) Compléter la fonction[1] suivante afin qu'elle renvoie la liste des polynômes constituant la base de Lagrange liée à la liste X de x_i.

```
def Base_Lag(x):
    res = []
    for k in ..........:
        lag = Polynome([1])
        for i in range(len(x)):
             if ..........:
                 lag *= .............................
        res += [ lag ]
    return res
```

b) Écrire un script pour vérifier que, pour X=[0, 1, 2, 3], les quatre polynômes de la base de Lagrange satisfont les relations décrites en 1.b).

3. a) Définir la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+10x^2}$.

b) Écrire une fonction INTERPOL(F,X) renvoyant le polynôme interpolant la fonction f aux points listés dans X.

c) Vérifier que le polynôme interpolateur obtenu pour X=[-1, -0.5, 0, 0.5, 1] est le bon.

Solution (**Ex.211 –** *Bases de Lagrange et interpolation*)

1. Base de Lagrange

a) $\forall i \in [\![0\,;\ n]\!]\,, \deg(\mathrm{L}_i) = n$ car produit de n polynôme de degré 1.

1. Cet algorithme n'est pas optimal car nécessitant beaucoup de produit mais on s'en contente, pour le moment...

b) $\forall (i,j) \in [\![0\,;\,n]\!]^2, \quad \mathrm{L}_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

c) On suppose que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{L}_i(\mathrm{X}) = 0 \quad (\heartsuit)$.

Pour tout $j \in [\![0\,;\,n]\!]$, $(\heartsuit)$ évaluée en x_j donne $a_j \times 1 = 0$ (tous les autres termes étant nuls). Donc $a_j = 0$.
Ce qui prouve que la famille $(\mathrm{L}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, lui-même de dimension $n+1$. Donc est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

d) Pour tout $j \in [\![0\,;\,n]\!]$, $\mathrm{I}_n(x_j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{L}_i(x_j) = 0 + f(x_j) \times 1 = f(x_j)$, donc I_n est un polynôme de degré au plus n coïncidant avec f en les $n+1$ points x_j. I_n est le polynôme cherché.

2. Programmation

a)
```
def Base_Lag(x):
    res = []
    for k in range(len(x)):
        lag = Polynome([1])
        for i in range(len(x)):
            if i != k:
                lag *= Polynome([-x[i],1]).scalp(1/(x[k]-x[i]))
        res += [ lag ]
    return res
```

b)
```
### Test de Bas_Lag
x = [0,1,2,3]
B = Base_Lag(x)
for k, xi in enumerate(x):
    print('B'+str(xi))
    for y in x:
        print('>> '+str(y)+' : '+str(B[k](y)))
```

Ce script produit l'affichage

```
B0
>> 0 : 1.0
>> 1 : 1.1102230246251565e-16
>> 2 : 4.440892098500626e-16
>> 3 : 2.220446049250313e-16
B1
>> 0 : 0.0
>> 1 : 1.0
>> 2 : 0.0
>> 3 : 0.0
B2
>> 0 : 0.0
>> 1 : 0.0
>> 2 : 1.0
>> 3 : 0.0
B3
>> 0 : 0.0
>> 1 : -5.551115123125783e-17
>> 2 : -1.1102230246251565e-16
>> 3 : 1.0
```

3. a)
```
def f(x):
    return 1+x+x**2
```

b)
```
def Interpol(f,x):
    B = Base_Lag(x)
    res = Polynome([0])
    for k, xi in enumerate(x):
```

```
        res += B[k].scalp(f(xi))
    return res
```

c)
```
x = [-1, -.5, 0, .5, 1]
I = Interpol(f,x)
for t in x:
    print(t,I(t)-f(t))
```

produit

```
-1 3.608224830031759e-16
-0.5 1.1102230246251565e-16
0 0.0
0.5 1.1102230246251565e-16
1 3.608224830031759e-16
```

Effectivement, aux erreurs d'arrondi près, I et f coïncident aux points de X.

Exercice 212

Phénomène de RUNGE

1. Importer les modules NUMPY et MATPLOTLIB.PYPLOT sous les alias NP et PLT afin d'utiliser les fonctions NP.LINSPACE et PLT.PLOT.
2. Écrire un script demandant un entier n à l'utilisateur et traçant la courbe de la fonction f sur $[-1\,;\,1]$ ainsi que la courbe du polynôme interpolateur de f en $n+1$ points équirépartis sur $[-1\,;\,1]$.
3. Qu'observe-t-on aux voisinages de -1 et de 1 lorsque n augmente ?
   Ce phénomène est connu sous le nom de *phénomène de Runge*[2]. On démontre que pour le choix équiréparti des $n+1$ points, il n'y a pas convergence uniforme lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution (**Ex.212** – *Phénomène de* RUNGE)

1.
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```
2.
```
t = np.linspace(-1,1,200)
n=eval(input('n='))
i = Interpol(f,np.linspace(-1,1,k))
plt.plot(t,i(t))
plt.plot(t,f(t))
```
3. Lorsque n augmente, les polynômes interpolateurs semblent pouvoir s'écarter fortement de f au voisinage des points -1 et 1 (voir les courbes à la fin de cette partie).

Exercice 213

Polynômes de Tchebychev et convergence uniforme

0

1. **a)** Les polynômes de Tchebychev sont définis par les relations

$$\mathrm{T}_0 = 1, \quad \mathrm{T}_1 = \mathrm{X} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n.$$

   Programmer une fonction récursive[3] TCHEBYCHEV(N) renvoyant le polynôme T_n.

   b) Tracer les courbes de T_5, T_{10}, T_{15} et T_{20}. Comment se répartissent les racines de T_n lorsque n augmente ?

   c) On rappelle que, pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, $\mathrm{T}_n(x) = \cos\big(n\mathrm{Arccos}(x)\big)$. Déterminer les racines de T_n.
   Ces racines sont appelées *points de Tchebychev.*

2. **a)** Écrire une fonction RACINES(N) renvoyant la liste des n racines du polynôme T_n.

2. Carl RUNGE, mathématicien et physicien allemand, 1856–1927
3. Là encore, cette méthode risque d'être gourmande en temps dès que n est un peu grand, mais on s'en contentera ici.

b) Écrire un script demandant un entier n à l'utilisateur et traçant la courbe de la fonction f sur $[-1\,;\,1]$ ainsi que la courbe du polynôme interpolateur de f aux $n+1$ racines du polynôme T_{n+1}.

c) Qu'observe-t-on lorsque n augmente ?
On peut montrer qu'avec ce choix de points d'interpolation, la convergence est uniforme lorsque n tend vers $+\infty$.
Les calculs précédents du polynôme annulateur nécessitent un grand nombre de calculs, ne serait-ce que le calcul des $n+1$ polynômes de la base de Lagrange.

Solution (**Ex.213** – *Polynômes de Tchebychev et convergence uniforme*)

1. a)
```
def Tchebychev(n):
    if n == 0:
        return Polynome([1])
    elif n == 1:
        return Polynome([0,1])
    else:
        return Polynome([0, 2])*Tchebychev(n-1)-Tchebychev(n-2)
```

b) On observe une plus grande densité des racines de T_n au voisinage de -1 et de 1.

c) • Cherchons les racines de T_n dans $[-1\,;\,1]$. Soit $x \in [-1\,;\,1]$ et $\theta = \operatorname{Arccos}(x) \in [0\,;\,\pi]$.

$\mathrm{T}_n(x) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$

De plus : $\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n} \in [0\,;\,\pi] \iff -\dfrac{1}{2} \leqslant k \leqslant n - \dfrac{1}{2}$, or $\theta \in [0\,;\,\pi]$, donc

$\mathrm{T}_n(x) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!], \theta = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$

$\mathrm{T}_n(x) = 0 \iff \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!], x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$.

La suite $\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est strictement croissante à valeurs dans $[0\,;\,\pi]$ et la fonction cos est strictement décroissante sur $[0\,;\,\pi]$ donc les n nombres $\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$ sont deux à deux distincts (suite strictement décroissante).

• Comme $\deg(\mathrm{T}_n) = n$, T_n possède au plus n racines distinctes.

• Finalement, T_n a exactement n racines distinctes, toutes dans $[-1\,;\,1]$, ce sont les

$$r_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \text{ pour } k \in [\![0\,;\,n-1]\!].$$

2. a)
```
def Racines(n):
    return [np.cos((2*i+1)*np.pi/(2*n)) for i in range(n)]
```

b)
```
t = np.linspace(-1,1,200)
n=eval(input('n='))
i = Interpol(f,Racines(n))
plt.plot(t,i(t))
plt.plot(t,f(t))
```

c) Lorsque n augmente, le polynôme interpolateur semble s'approcher uniformément de f en tout point de $[-1\,;\,1]$.

Exercice 214

Méthode des différences divisées

Pour $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, on note I_k le polynôme d'interpolation de f aux $k+1$ premiers points $x_0, x_1, \ldots, x_k$.
L'objectif est de construire le polynôme I_n. Nous allons le construire par récurrence.

1. D'après le premier exerice, quel est, au plus, le degré de I_k ?

2. Justifier que $\mathrm{I}_0(\mathrm{X}) = f(x_0)$.

3. a) Soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Montrer qu'il existe un coefficient réel, noté $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$, tel que

$$\mathrm{I}_k(\mathrm{X}) - \mathrm{I}_{k-1}(\mathrm{X}) = f[x_0, x_1, \ldots, x_k](\mathrm{X} - x_0)(\mathrm{X} - x_1)\ldots(\mathrm{X} - x_{k-1}).$$

b) Montrer alors que

$$\mathrm{I}_n(\mathrm{X}) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](\mathrm{X} - x_0)(\mathrm{X} - x_1)\ldots(\mathrm{X} - x_{k-1}).$$

Cette écriture s'appelle la *forme de Newton du polynôme interpolateur.*

4. Mise en œuvre

a) Pour $k \in [[1\,;\ n]]$, on note I^*_{k-1} le polynôme d'interpolation de f aux k points $x_1, x_2, \ldots, x_k$.
Justifier que son coefficient dominant est $f[x_1, \ldots, x_k]$.

b) Justifier que le polynôme P_k défini par

$$\mathrm{P}_k(\mathrm{X}) = \frac{1}{x_k - x_0}\big((\mathrm{X} - x_0)\mathrm{I}^*_{k-1}(\mathrm{X}) - (\mathrm{X} - x_k)\mathrm{I}_{k-1}(\mathrm{X})\big)$$

est de degré k et coïncident avec f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

c) En déduire que $\mathrm{P}_k = \mathrm{I}_k$.

d) Justifier alors les relations

$$\forall k \in [[1\,;\ n]], \quad f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$
$$\text{avec } \forall k \in [[0\,;\ n]], \quad f[x_k] = f(x_k).$$

De par ces relations, la quantité $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ est appelée *différence divisée d'ordre k de f aux points* $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

5. a) Écrire une fonction DIFFERENCES(F,X), d'arguments la fonction f et la liste X des points $x_0, x_1, \ldots, x_n$, renvoyant un tableau T de type NP.ARRAY de taille $n+1$ par $n+1$, tel que

$$\forall j \in [[0\,;\ n]], \forall i \in [[0\,;\ n-j]],$$
$$\text{T[I,J]} = f[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \begin{cases} f(x_i) & \text{si } j = 0 \\ \dfrac{\texttt{T[i+1,j-1]} - \texttt{T[i,j-1]}}{\texttt{x[i+j]} - \texttt{x[i]}} & \text{si } j \in [[1\,;\ n]] \end{cases}.$$

b) Écrire enfin une fonction NEWTON(F,X) renvoyant le polynôme interpolateur de f aux points de la liste X en utilisant la forme de Newton de la question précédente.

6. Comparer avec la première méthode.

Solution (**Ex.214 –** *Méthode des différences divisées*)

1. $\deg(\mathrm{I}_k) = k$.

2. I_0 est un polynôme constant coïncidant avec f en x_0 donc $\mathrm{I}_0(\mathrm{X}) = f(x_0)$.

3. a) $\mathrm{I}_k - \mathrm{I}_k k - 1$ est un polynôme de degré k s'annulant en $x_0, x_1, \ldots, x_k$ donc proportionnel à $(\mathrm{X}-x_0)(\mathrm{X}-x_1)\ldots(\mathrm{X}-x_{k-1})$. D'où l'existence du coefficient $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ (c'est aussi le coefficient dominant de $\mathrm{I}_k - \mathrm{I}_{k-1}$).

b) Posons pour tout $i \in [[0\,;\ n]]$,

$\mathrm{J}_i(\mathrm{X}) = f(x_0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{i} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](\mathrm{X} - x_0)(\mathrm{X} - x_1)\ldots(\mathrm{X} - x_{k-1})$ (en particulier $\mathrm{I}_0(\mathrm{X}) = f(x_0)$.

Montrons par récurrence que $\mathrm{J}_i = \mathrm{I}_i$ pour tout i de $[[0\,;\ n]]$.
La propriété est vraie au rang $i = 0$.
Soit $i \in [[0\,;\ n-1]]$. Supposons la propriété vraie au rang i.

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{i+1}(\mathrm{X}) &= f(x_0) + \sum_{k=1}^{i+1} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](\mathrm{X} - x_0)(\mathrm{X} - x_1)\ldots(\mathrm{X} - x_{k-1}) \\ &= \mathrm{J}_i(\mathrm{X}) + f[x_0, x_1, \ldots, x_{\mathrm{I}+1}](\mathrm{X} - x_0)(\mathrm{X} - x_1)\ldots(\mathrm{X} - x_i) \\ &= \mathrm{J}_i(\mathrm{X}) + \mathrm{I}_{i+1}(\mathrm{X}) - \mathrm{I}_i(\mathrm{X}) = \mathrm{I}_{i+1}(\mathrm{X})\end{aligned}$$

Par récurrence, la propriété est vraie pour tout i de $[[0\,;\ n]]$.
En particulier pour $i = n$... CQFD
Cette écriture s'appelle la *forme de Newton du polynôme interpolateur.*

4. Mise en œuvre

a) En appliquant ce qui précède avec les points $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $\mathrm{I}^*_{k-1} - \mathrm{I}^*_{k-2}$ est de degré $k-1$ et de coefficient dominant $f[x_1, \ldots, x_k]$. Comme I^*_{k-2} est de degré $k-2$, ce coefficient dominant est celui de I^*_{k-1}.

b) • Comme I_{k-1}^* et I_{k-1} sont de degré k_1 et de coefficients dominants distincts, P_k est de degré k.

• $\mathrm{P}_k(x_0) = -\dfrac{x_0 - x_k}{x_k - x_0}\mathrm{I}_{k-1}(x_0) = \mathrm{I}_{k-1}(x_0) = f(x_0)$

• $\mathrm{P}_k(x_k) = \dfrac{x_k - x_0}{x_k - x_0}\mathrm{I}_{k-1}^*(x_k) = \mathrm{I}_{k-1}^*(x_k) = f(x_k)$

• Pour $i \in [\![\,1\,;\,k-1]\!]$,

$\mathrm{P}_k(x_i) = \dfrac{1}{x_k - x_0}((x_i - x_0)\mathrm{I}_{k-1}^*(x_i) - (x_i - x_k)\mathrm{I}_{k-1}(x_i)) = \dfrac{x_i - x_0 - x_i + x_k}{x_k - x_0} f(x_i) = f(x_i)$

Donc P_k coïncide avec f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

c) Par unicité du polynôme de degré au plus k coïncidant avec f en $k+1$ points, $\mathrm{P}_k = \mathrm{I}_k$.

d) D'un côté, $\mathrm{P}_k = \mathrm{I}_k$ donc son coefficient dominant est $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$. D'un autre côté, son coefficient dominant est celui de

$$\frac{1}{x_k - x_0}\big((\mathrm{X} - x_0)\mathrm{I}_{k-1}^*(\mathrm{X}) - (\mathrm{X} - x_k)\mathrm{I}_{k-1}(\mathrm{X})\big)$$

c'est-à-dire $\dfrac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$.

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on a la relation voulue.

Enfin, $f[x_k]$ est le coefficient dominant du polynôme de degré 0 coïncidant avec f en x_k, donc du polynôme constant égal à $f(x_k)$, donc $f[x_k] = f(x_k)$.

De par ces relations, la quantité $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ est appelée *différence divisée d'ordre k de f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_k$*.

5. a)
```
def Differences(f,x):
    n = len(x)
    T = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        T[i,0] = f(x[i])
    for j in range(1,n):
        for i in range(n-j):
            T[i,j] = (T[i+1,j-1]-T[i,j-1])/(x[i+j]-x[i])
    return T
```
b)
```
def Newton(f,x):
    diff = Differences(f,x)
    I = Polynome([diff[0,0]])
    prod = Polynome([1])
    for k in range(1,len(x)):
        prod *= Polynome([-x[k-1],1])
        I += prod.scalp(diff[0,k])
    return I
```

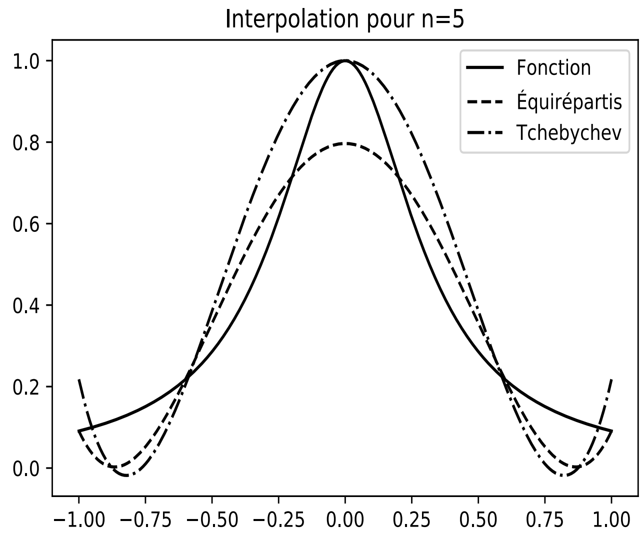
6. 10 essais avec 50 points au hasard :

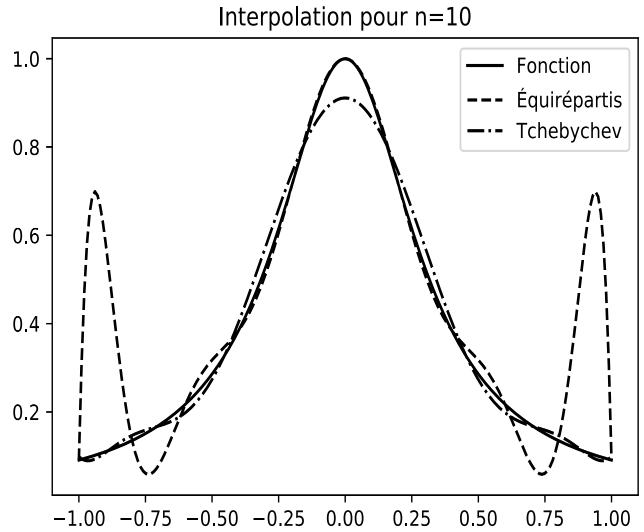
```
n = 10
deb = time()
x = list(np.random.rand(50))
for i in range(n):
    Newton(f,x)
print(time()-deb)
deb = time()
for i in range(n):
    Interpol(f,x)
print(time()-deb)
```

provoque

```
0.062194108963012695
1.3463971614837646
```

La méthode de différences divisées semble donc en moyenne environ 20 fois plus rapide que la méthode « brute »


Interpolation pour n=5
Fonction
Équirépartis
Tchebychev


Interpolation pour n=10
Fonction
Équirépartis
Tchebychev

Chapitre 62

Simulation aléatoire et méthode de Monte-Carlo

Les méthodes de Monte-Carlo (capitale du casino !) reposent essentiellement sur les lois des grands nombres : si (X_n) est une suite de variable aléatoire réelle indépendantes de même loi possédant une espérance m et une variance, alors

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} m \text{ (Loi faible des grands nombres[1])}$$

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\Big(\left|\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, convergence dite *en probabilité*, et

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} m \text{ (Loi forte de grands nombres[2])}$$

i.e. $\mathbb{P}\left(\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} m\right) = 1$, convergence dite *presque-sure*.

L'idée est de simuler N variables X_n et d'observer vers quoi tend leur moyenne. Pour simuler des situations aléatoires, on dispose du **générateur aléatoire** du module `numpy` de `Python`.

L'instruction `numpy.random.rand()` (lire `numpy` → sous-module `random` → instruction `rand()`) renvoie un réel de $]0\,;\,1[$ suivant la loi uniforme sur $[0\,;\,1[$, c'est-à-dire que :

① `rand()`$\in [0\,;\,1[$
② $\forall 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$,

$$\mathbb{P}\big(\texttt{rand()}\in [a\,;\,b]\big) = \mathbb{P}\big(\texttt{rand()}\in]a\,;\,b[\big) = b-a$$

Autrement dit, *la probabilité que* `rand()` *prenne sa valeur dans un intervalle donné de* $[0\,;\,1]$ *est proportionnelle à la longueur de cet intervalle.*
③ En particulier, pour tout $p \in [0\,;\,1]$,

$$\mathbb{P}\big(\texttt{rand()}\leqslant p\big) = \mathbb{P}\big(\texttt{rand()}< p\big) = p$$

④ Chaque appel de la fonction `rand()` renvoie une valeur indépendante des appels précédents.
⑤ `rand(N)` renvoie un `np.array` de taille `N` contenant `N` valeurs (indépendantes) obtenues par `rand()`. Ainsi
« `v = numpy.random.rand(1789)` » équivaut
«
```
v = numpy.zeros(1789)
for k in range(1789) :
    v[k] = numpy.random.rand()
```
 »

Pour tous les exercices de cette partie, on suppose la fonction `numpy.random.rand()` importée sous le nom « `rand()` » en plaçant systématiquement en en-tête des scripts `Python`

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.random import rand
```

Une variable U de loi uniforme sur [0 ;1] est une variable aléatoire vérifiant

$$U(\Omega) = [0\,;\,1] \text{ et } \forall [a\,;\,b] \subset [0\,;\,1], \quad \mathbb{P}(U \in [a\,;\,b]) = b-a.$$

On notera qu'on ne peut que raisonner par des inégalités, car en prenant $b = a$,

$$\forall a \in [0\,;\,1], \quad \mathbb{P}(U = a) = 0.$$

On peut d'ailleurs observer que $\mathrm{Card}([U = a]) = \mathrm{Card}(\{a\}) = 1$ tandis que $\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{Card}([0\,;\,1]) = +\infty$...

Il est indifférent de dire que **U suit une loi uniforme sur [0 ;1], sur]0 ;1], sur [0 ;1[, ou sur]0 ;1[**, et une telle variable peut être simulée par

```
U = rand().
```

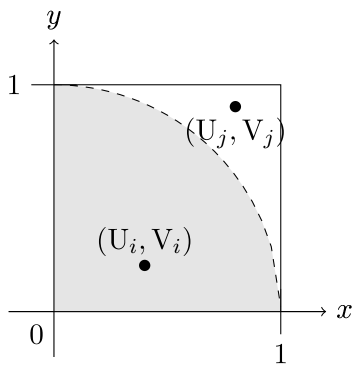
Dans les corrigés, U **désignera une telle variable.**

Exercice 215

Le hasard pour calculer $\boldsymbol{\pi}$

1. Soit $(\mathrm{U}_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(\mathrm{V}_i)_{1\leq i\leq n}$ $2n$ variables uniformes sur $[\,0\,;\,1]$ mutuellement indépendantes. Soit, pour $i \in [[\,1\,;\,n]]$, Y_i la variable indicatrice de l'événement $[(\mathrm{U}_i^2+\mathrm{V}_i^2)\leq 1]$.

a) En considérant la figure suivante, justifier que $\mathrm{Y}_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\dfrac{\pi}{4})$.



b) Compléter la fonction `Y()` afin qu'elle renvoie 0 ou 1 en suivant la loi des Y_i.

```
def Y():
    if rand()**2+rand()**2 <= 1:
        return ...
    else:
        return ...
```

c) On pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i$ et $\mathrm{Z}_n = \dfrac{1}{n}\mathrm{S}_n$.

Que valent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\mathrm{Z}_n)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(\mathrm{Z}_n)$?

En statistique, on dit que Z_n est *un estimateur convergent de* $\dfrac{\pi}{4}$.

d) On donne $\dfrac{4\pi-\pi^2}{16} \simeq 0,169$.

Justifier que $\mathbb{P}\left(\left|\mathrm{Z}_{1000}-\dfrac{\pi}{4}\right| \geqslant 0,1\right) \leqslant 2\%$.

2. Analyser le script suivant et expliquer le graphique créé ainsi que les valeurs affichées.

```
def MC_pi(n):
    s = 0
    t = np.zeros(n)
    for k in range(n):
        if rand()**2+rand()**2 <= 1:
            s += 1
        z[k] = s/(k+1)
    plt.plot(np.linspace(1,n,n),4*z)
    return t[-1]

for i in range(5):
    print(MC_pi(500))
```

3. Une spécificité des booléens bien pratique

Un booléen prend la valeur `True` ou la valeur `False`, mais lorsqu'on l'utilise dans un calcul, `Python` traduit automatiquement `True` par 1 et `False` par 0. Par exemple :

```
(1<2)
>>> True
(1<2)-4*(2<3)+(3>4)
>>> -3
```

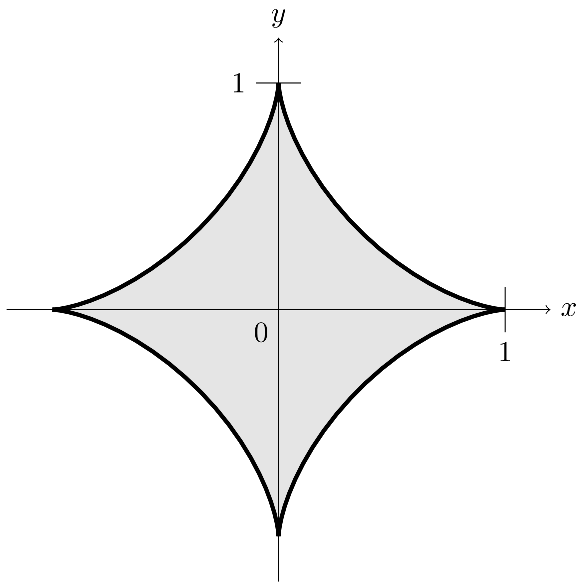
Que fournit le script suivant ? L'exécuter plusieurs fois.

```
def MC_pi(n):
    return 4*sum((rand(n)**2+rand(n)**2)<1)/n

print(MC_pi(1000000))
```

Exercice 216

Évaluation de l'aire de l'astroïde



On souhaite évaluer l'aire de l'astroïde, courbe d'équation paramétrique

$$\gamma(t) = \big(\sin^3(t), \cos^3(t)\big).$$

En raison des symétries de l'astroïde, on évalue le quart d'aire situé dans le carré $[\,0\,;\ 1]^2$.

1. Montrer qu'un point (x, y) est dans ce quart d'astroïde si, et seulement si,

$$x^{2/3} + y^{2/3} \leqslant 1.$$

2. En s'inspirant de l'exercice précédent, évaluer l'aire de l'astroïde.

3. Vérifier la justesse de ces évaluations en calculant la valeur exacte de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \big(1 - x^{2/3}\big)^{3/2} \mathrm{d}x.$$

On pourra méditer la définition paramétrique de l'astroïde pour trouver un changement de variable salvateur...

Solution (**Ex.216 –** *Évaluation de l'aire de l'astroïde*)

1. • Posons $x(t) = \sin^3(t)$ et $y(t) = \cos^3(t)$.
$x(t)^{2/3} + y(t)^{2/3} = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

• Soit $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Si $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ alors $(x^{1/3})^2 + (y^{1/3})^2 = 1$, donc $\exists t \in [\,0\,;\ \pi/2]\,, \begin{cases} x^{1/3} = \sin(t) \\ y^{1/3} = \cos(t) \end{cases}$

La frontière de l'astroïde (dans le carré $[\,0\,;\ 1]^2$) a pour équation

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

Comme $(0, 0)$ est à l'intérieur de l'astroïde, son intérieur a pour équation

$$x^{2/3} + y^{2/3} \leqslant 1.$$

2. Le script suivant

```
def astroide(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        x = rand()
        y  =rand()
        if x**(2/3)+y**(2/3) <= 1:
            s +=1
    return (s/n)*4

print(astroide(10000000)/np.pi)
```

renvoie (sur mon essai, mais il ne renverra pas deux fois la même valeur)

```
0.37494498169710994
```

D'où il ressort que $\mathcal{A}_{\text{astroïde}} \simeq 0,375\pi \simeq \dfrac{3}{8}\pi$? ? ?

3. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \left(1-x^{2/3}\right)^{3/2}\mathrm{d}x \overset{x=\sin^3(t)}{=} \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))^{3/2} 3\cos(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t$

$\mathrm{I} = 3\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t$, et linéarisons intelligemment,

$\mathrm{I} = 3\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}\frac{\sin^2(2t)}{4}\mathrm{d}t$

$\mathrm{I} = \dfrac{3}{8}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2t)\sin^2(2t) + \frac{1-\cos(4t)}{2}\mathrm{d}t$

$\mathrm{I} = \dfrac{3}{16}\times\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\left[\dfrac{\sin^3(2t)}{6} - \dfrac{\sin(4t)}{8}\right]_0^{\pi/2} = \dfrac{3\pi}{32}$ donc $\mathcal{A}_{\text{astroïde}} = \dfrac{3\pi}{8}$.

Exercice 217

Le paradoxe des anniversaires

Le paradoxe des anniversaires fait partie des *paradoxes contre-intuitifs*.
On réunit N convives et on fait l'hypothèse que leurs jours de naissances $\mathrm{J}_1, \dots, \mathrm{J}_\mathrm{N}$ sont N variables indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[\![1\,;\,365]\!]$.
Il paraît que dès qu'on réunit au moins 23 convives, alors il y a plus d'une chance sur deux pour qu'au moins deux d'entre eux soient nés le même jour.
On note p_N la probabilité que, lorsqu'on réunit N convives, au moins deux d'entre eux soient nés le même jour.

1. Justifier que

```
J = np.ceil(rand()*365)
```

simule une variable de loi uniforme sur $[\![1\,;\,365]\!]$.

2. Écrire une fonction `anniv()` qui crée une liste de simulations $\mathrm{J}_1, \dots, \mathrm{J}_\mathrm{N}$ de variables indépendantes du loi $\mathcal{U}([\![1\,;\,365]\!]$ telle que
(i) $\forall i, j \in [\![1\,;\,\mathrm{N}-1]\!],\quad (i \neq j) \Longrightarrow \mathrm{J}_i \neq \mathrm{J}_j$;
(ii) $\exists i \in [\![1\,;\,\mathrm{N}-1]\!], \mathrm{J}_\mathrm{N} = \mathrm{J}_i$.
La fonction `anniv()` renvoie alors N (mais ne renvoie pas la liste créée pour calculer N).

3. a) Définir en une phrase la variable aléatoire X simulée par la fonction `anniv()`.
b) Soit Y la variable indicatrice de l'événement $[\mathrm{X} \leqslant 23]$. Quelle est sa loi et quelle est son espérance ?

4. En déduire un algorithme évaluant p_{23} par simulation et donner une valeur obtenue au bout de 1 000 000 de simulations, voire 10 000 000 suivant la vitesse de votre ordinateur.

5. En prenant comme univers des possibles $\Omega = [\![1\,;\,365]\!]^{23}$, calculer de façon exacte p_{23}, puis écrire un script `Python` calculant cet probabilité.
Faire de même pour calculer p_{35}, p_{41} et p_{47}.

Solution (**Ex.217 –** *Le paradoxe des anniversaires*)

1. Rappelons que `np.ceil(x)` est le plafond du réel x, noté $\lceil x \rceil$ et défini par
$$\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}, \quad \lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil.$$
Posons $\mathrm{J} = \lceil 365.\mathrm{U} \rceil$. Comme $\mathrm{U}(\Omega) =]\,0\,;\ 1[$, $365/\mathrm{U}(\Omega) =]\,0\,;\ 365[$ et $\mathrm{J}(\Omega) = [\![1\,;\ 365]\!]$.
Soit $k \in [\![1\,;\ 365]\!]$. Alors :
$$\mathbb{P}([\mathrm{J} = k]) = \mathbb{P}\big(\lceil 365.\mathrm{U} \rceil = k\big) = \mathbb{P}(k-1 < 365.\mathrm{U} \leqslant k)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{k-1}{365} < \mathrm{U} \leqslant \frac{k}{365}\right) = \frac{k}{365} - \frac{k-1}{365} = \frac{1}{365},$$
ce qui prouve que J est une variable de loi uniforme sur $[\![1\,;\ 365]\!]$.

2. Par exemple :

```
def anniv():
    l = []
    t = True
    while t:
        d = np.ceil(rand()*365)
        t = not(d in l)
        l.append(d)
    return len(l)
```

Noter « `d in l` » qui renvoie `True` si $d \in \ell$ et `False` sinon.

3. a) X simulée par la fonction `anniv()` compte le nombre nécessaire de convives pour obtenir les premiers jumeaux[3], ou encore le temps d'attente de la première répétition lorsqu'on choisit au hasard et indépendamment des dates dans $[\![1\,;\ 365]\!]$.

b) Y est la variable indicatrice de l'événement « il faut au plus 23 convives pour avoir au moins deux jumeaux ».
Comme toute variable indicatrice, Y suit une loi de Bernoulli, de paramètre $\mathbb{P}([\mathrm{X} \leqslant 23]) = p_{23}$.
Donc : $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathcal{B}(p_{23})$ et $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = p_{23}$.

4. Ceci :

```
p = 0
n = 1000000
for i in range(n):
    p += anniv()<=23
print(n,p/(n+1))
```

produit : `10000000   0.507194649280535`

5. $\mathrm{Card}\,(\Omega) = 365^{23}$.
Soit A l'événement : « parmi les 23 dates, deux au moins coïncident ».
Alors $\overline{\mathrm{A}}$ est : « les 23 dates sont distinctes deux à deux » et $\mathrm{Card}\,(\overline{\mathrm{A}}) = 365 \times 364 \times \cdots \times (365-22) = \dfrac{365!}{342!}$.
Donc $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \dfrac{365!}{342!(365^23)} = \displaystyle\prod_{i=0}^{22} \frac{365-i}{365}$, cette dernière formulation évitant de manipuler de grands nombres tout en étant facilement programmable.

```
N = eval(input('N='))
p = 1
for i in range(N):
    p =p*(365-i)/365
print('N='+str(N)+' :   p=',1-p)
```

donne

```
N=23 :   p= 0.5072972343239855
N=35 :   p= 0.8143832388747152
N=41 :   p= 0.9031516114817354
N=47 :   p= 0.9547744028332993
```

En prenant comme univers des possibles $\Omega = [\![1\,;\ 365]\!]^{23}$, calculer de façon exacte p_{23}, puis p_{35}.

3. J'entends par « jumeaux » le même jour d'anniversaire, pas nécessairement la même année.

Exercice 218

Simulation et schéma de Bernoulli

Soit $p \in]0\,;\ 1[$.

1. Proposer une fonction `Ber(p)` simulant une variable de loi de Bernoulli de paramètre p, c'est-à-dire renvoyant 1 ou 0, avec une probabilité p et $1-p$ respectivement.

2. Proposer une fonction `B(n,p)` simulant une variable de loi de binomiale de paramètres n et p
(i) d'abord en utilisant une boucle avec n répétitions ;
(ii) ensuite sans boucle.

3. a) Proposer une fonction `G(p)` simulant une variable de loi géométrique de paramètre p à l'aide d'une boucle conditionnelle `while .... :`

b) Soit U de loi uniforme sur $]0\,;\ 1[$ et $\mathrm{X} = \left\lfloor \dfrac{\ln(\mathrm{U})}{\ln(1-p)} \right\rfloor + 1$.
Montrer que X suit la loi géométrique de paramètre p.

c) En déduire une fonction `G(p)` simulant une variable de loi géométrique de paramètre p *sans utiliser de boucle*.

Solution (**Ex.218** – *Simulation et schéma de Bernoulli*)

1.
```
def Ber(p):
    return int(rand()<p)
```

2. (i)

```
def B(n,p):
    s = 0
    for k in range(n):
        if rand() < p:
            s +=1
    return s
```

ou

```
def B(n,p):
    s = 0
    for k in range(n):
        s += rand() < p
    return s
```

(ii) À méditer

```
def B(n,p):
    return sum(rand(n)<p)
```

3. a) Comptons le nombre d'échecs jusqu'au premier succès...

```
def geometrique(p):
    X = 0
    while rand() >= p:
        X += 1
    return X+1
```

b) $\mathrm{U}(\Omega) =]0\,;\ 1[$ donc $\ln(\mathrm{U}) < 0$. Comme $\ln(1-p) < 0$, $\dfrac{\ln(\mathrm{U})}{\ln(1-p)} > 0$ et $\mathrm{Y}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\mathrm{Y}=k]) &= \mathbb{P}\left(\left\lfloor \frac{\ln(\mathrm{U})}{\ln(1-p)} \right\rfloor + 1 = k\right) = \mathbb{P}\left(\left\lfloor \frac{\ln(\mathrm{U})}{\ln(1-p)} \right\rfloor = k-1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(k-1 \leqslant \frac{\ln(\mathrm{U})}{\ln(1-p)} < k\right) \text{ avec } \ln(1-p) < 0 \\
&= \mathbb{P}\left(k\ln(1-p) < \ln(\mathrm{U}) \leqslant (k-1)\ln(1-p)\right) \\
&= \mathbb{P}\left((1-p)^k < \mathrm{U} \leqslant (1-p)^{k-1}\right) \text{ avec } \mathrm{U} \hookrightarrow \mathcal{U}(]0\,;\ 1[), \\
&= (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = (1-p)^{k-1}\big(1-(1-p)\big) \\
&= (1-p)^{k-1}p,
\end{aligned}$$

donc Y suit bien la loi géométrique de paramètre p.

c) D'où la simulation directe sans boucle :

```
def geometrique2(p):
    return np.ceil(np.log(rand())/np.log(1-p))
```

Exercice 219
Loi des séries

On lance indéfiniment une pièce pouvant amener, à chaque lancer et indépendamment des autres lancers, « Pile » avec une probabilité $p \in]0\,;\ 1[$ et « Face » avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note S_1 et S_2 respectivement la longueur de la première série de côtés identiques et celle de la seconde.
Ainsi, si on obtient comme premiers lancers

$$\underbrace{P_1\ P_2\ P_3}_{\text{1ère série}}\ \underbrace{F_4\ F_5}_{\text{2ème série}}\ P_6\dots$$

alors $S_1 = 3$ et $S_2 = 2$.

1. Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule S_1 et S_2.

```
def serie(p):
    E1 = rand()<p
    S1 = 1
    while (rand()<p) == E1:
        S1 += ...
    S2 = ...
    while ............ :
        S2 += ...
    return S1, S2
```

2. a) Afin d'évaluer $\mathbb{E}(S_1)$ et $\mathbb{E}(S_2)$, écrire un script
(i) demandant la valeur de p,
(ii) effectuant une série de 100 000 simulations de S_1 et S_2,
(iii) affichant la moyenne des simulations obtenues.

b) Remplir le tableau suivant avec les moyennes obtenues :

p	m_1	m_2
1/4		
1/3		
1/2		
2/3		
3/4		

c) Qu'observe-t-on concernant S_2 ?

3. a) Déterminer la loi du couple (S_1, S_2).
b) En déduire la loi de S_1 puis son espérance.
c) Même question pour S_2.
d) Confronter ces résultats aux simulations.
e) À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $\mathbb{E}(S_1) = \mathbb{E}(S_2)$?

Solution (**Ex.219** – *Loi des séries*)

1. Proposition (il n'y a pas trop de choix) :

```
def serie(p):
    E1 = rand()<p
    S1 = 1
    while (rand()<p) == E1:
        S1 +=1
    S2 = 1
    while (rand()<p) != E1:
        S2 +=1
    return S1, S2
```

2. a)
```
p= eval(input('p= ? '))
n = 100000
s = np.zeros(2)
for k in range(n):
    s += np.array(serie(p))
print(s/n)
```
b) On obtient par exemple :

p	m_1	m_2
1/4	3.32782	1.99759
1/3	2.50762	1.99996
1/2	1.99523	1.99769
2/3	2.49022	1.99595
3/4	3.3324	2.00208

c) m_2, qui estime $\mathbb{E}(\mathrm{S}_2)$, semble ne pas dépendre de p.

3. a) $(\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2)(\Omega)=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. Soit $(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

$[\mathrm{S}_1=i,\mathrm{S}_2=j]=\big(\mathrm{P}_1\cap\cdots\cap\mathrm{P}_i\cap\mathrm{F}_{i+1}\cap\cdots\cap\mathrm{F}_{i+j}\cap\mathrm{P}_{i+j+1}\big)$
$\bigcup\big(\mathrm{F}_1\cap\cdots\cap\mathrm{F}_i\cap\mathrm{P}_{i+1}\cap\cdots\cap\mathrm{P}_{i+j}\cap\mathrm{F}_{i+j+1}\big)$

Ces deux événements sont incompatibles, et comme les lancers ont des résultats indépendants,
$\mathbb{P}\big([\mathrm{S}_1=i,\mathrm{S}_2=j]\big)=p^iq^jp+q^ip^jq=p^{i+1}q^j+q^{i+1}p^j$.

b) À l'aide du système complet d'événements $([\mathrm{S}_2=j])_{j\in\mathbb{N}^*}$, la formule des probabilités totales donne

$$\forall i\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}([\mathrm{S}_1=i])=\sum_{j=1}^{+\infty}\left(p^{i+1}q^j+q^{i+1}p^j\right)\overset{gom.}{=}p^{i+1}\frac{q}{1-q}+q^{i+1}\frac{p}{1-p}$$

$\forall i\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}([\mathrm{S}_1=i])=p^iq+q^ip$.

De $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}ip^i=p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}p^i\right)=p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{1}{1-p}\right)=\frac{p}{(1-p)^2}=\frac{p}{q^2}$, on tire

$\mathbb{E}(\mathrm{S}_1)$ existe (*si !*) et $\mathbb{E}(\mathrm{S}_1)=\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}$.

c) À l'aide du système complet d'événements $([\mathrm{S}_1=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$, la formule des probabilités totales donne

$$\forall j\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}([\mathrm{S}_2=j])=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(p^{i+1}q^j+q^{i+1}p^j\right)\overset{gom.}{=}q^j\frac{p^2}{1-p}+p^j\frac{q^2}{1-q}$$

$\forall j\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}([\mathrm{S}_2=j])=q^{j-1}p^2+p^{j-1}q^2$.

De $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}jp^{j-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}q^j\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{1}{1-q}\right)=\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p^2}$, on tire

$\mathbb{E}(\mathrm{S}_2)$ existe (*si !*) et $\mathbb{E}(\mathrm{S}_1)=1+1=2$.

d) $\mathbb{E}(\mathrm{S}_2)$ ne dépend pas de p, ce que laissait penser m_2.

$\mathbb{E}(\mathrm{S}_1)$ est symétrique en p et q donc $\mathrm{E}(\mathrm{S}_1)$ est identique pour $(p,q)=(1/4,3/4)$ et $(p,q)=(3/4,1/4)$ et vaut $\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{1}=\dfrac{4}{3}$.

Pour $(p,q)=(1/3,2/3)$ et $(p,q)=(2/3,1/3)$, on obtient $\mathbb{E}(\mathrm{S}_1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{1}=\dfrac{5}{2}$.

Pour $(p,q)=(1/2,1/2)$, $\mathbb{E}(\mathrm{S}_1)=1+1=2$.

e) $\mathbb{E}(\mathrm{S}_1)=\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}=\dfrac{p^2+(1-p)^2}{(1-p)p}=\dfrac{2p^2-2p+1}{(1-p)p}=\dfrac{1}{(1-p)p}-2$

Or $(1-p)p=p-p^2=-\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{1}{4}$ avec égalité si, et seulement si, $p=\dfrac{1}{2}$.

Donc $\dfrac{1}{(1-p)p}\geqslant 4$ avec égalité si, et seulement si, $p=\dfrac{1}{2}$.

D'où : $\mathbb{E}(\mathrm{S}_1)\geqslant\mathbb{E}(\mathrm{S}_2)$, avec égalité si, et seulement si, $p=\dfrac{1}{2}$.

On pourra aussi remarquer que dans ce cas,

$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\mathrm{S}_1 = i) = \dfrac{1}{2^i} = \mathbb{P}(\mathrm{S}_2 = i)$, donc S_1 et S_2 suivent franchement la même loi, qui est la loi géométrique de paramètre $1/2$.

Exercice 220

Marche aléatoire

Un exercice qui permet d'appréhender la nuance entre « il est presque-sûr que le mobile revient à l'origine en un temps fini » et « le temps du retour à l'origine n'a pas d'espérance », ou « le temps moyen de retour à l'origine est infini ». Il est conseillé de lire les § « Problème du scrutin et marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ » et « Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ et séries entières », car nous en admettrons les résultats.

Soit $p \in \,]\,0\,;\,1[$ et $q = 1 - p$. On considére une suite de variables $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes toutes de lois définies par

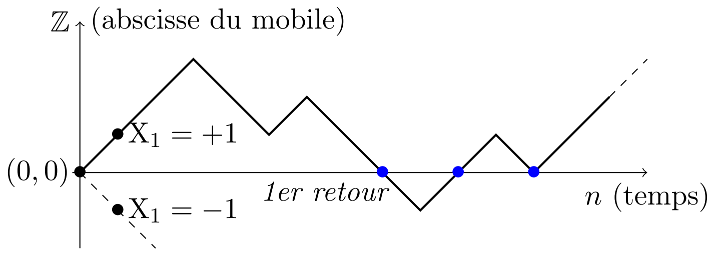
$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{X}_i(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 1) = p,\ \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = -1) = q.$$

On pose

$$\mathrm{S}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n.$$

On peut se représenter la situation par un mobile se déplaçant sur $\mathbb{Z}$, considéré comme axe gradué, situé en 0 à l'instant $i = 0$, et se déplaçant à chaque instant $i \in \mathbb{N}^*$ de $\mathrm{X}_i = \pm 1$ unité. S_n est alors l'abscisse du mobile à l'issue du $n-$ième déplacement, $\mathrm{S}_0 = 0$ caractérisant l'abscisse nulle au début de l'expérience.

On s'intéresse au premier retour à l'origine du mobile.



On peut montrer que :

(i) l'événement R « *le mobile revient au moins une fois à l'abscisse nulle* » ou encore « *le mobile revient à l'origine en un temps fini* » a pour probabilité

$$\mathbb{P}(\mathrm{R}) = 1 - |p - q|,$$

(ii) en particulier, R est presque-certain si, et seulement si, $p = q = 1/2$, et on peut dès lors affirmer, puisque les déplacements sont indépendants donc le processus est sans mémoire, qu'il est presque-certain que le mobile reviendra une infinité de fois à l'origine,

(iii) cependant, toujours lorsque $p = q = 1/2$, la variable égale au rang n du premier retour à l'origine n'admet pas d'espérance finie, et la série définissant son espérance diverge vers $+\infty$.

1. a) Justifier que les variables X_i peuvent être simulée par

```
2*(rand()<p)-1
```

b) Compléter la fonction suivante afin qu'elle trace une trajectoire de longueur n avec le paramètre p.

```
def marche(p,n):
    s = np.zeros(n)
    for i in range(1,n):
        s[i] = ...............
    plt.plot(range(n),s)
```

c) Écrire un script qui demande n et p à l'utilisateur et trace cinq trajectoires de longueur n avec ce paramètre p – on convient qu'une trajectoire de longueur n contient $n + 1$ points, le premier d'entre eux étant l'origine $(0, 0)$.

d) Exécuter ce script pour $n = 200$ et $p = 0,5$, puis $p = 0,45$ et $p = 0,55$, et observer.

e) Tracer cinq trajectoires de longueur 400 avec $p = 0,5$. Observer qu'il y a vraisemblablement des trajectoires qui restent longtemps sans repasser par l'origine, voire n'y repassent pas.

Ce phénomène est connu sous le nom « persistance de la malchance » : bien qu'on soit (presque-)sûr de revenir en l'origine, difficile de savoir quand...

2. Dans cette question, $p = 1/2$.
On souhaite évaluer l'espérance de la variable T égale au nombre de déplacements nécessaires au premier retour à l'origine.
a) Écrire une fonction `T()` simulant la variable T.
b) Écrire un script créant un `np.array` contenant 1000 simulations de la variable T, affichant la plus grande valeur de ce tableau ainsi que sa moyenne.
c) Exécuter plusieurs fois ce script et observer.
Pourquoi certaines exécutions sont-elles longues, voire très longues ?
Quel est votre record de persistance de la malchance ?
La moyenne converge-t-elle ?
Méditer...

Solution (**Ex.220** – *Marche aléatoire*)

1. a) $\mathbb{P}(2*(rand() < p) - 1 = 1) = \mathbb{P}((rand() < p) = 1) = \mathbb{P}(rand() < p) = p$.
$\mathbb{P}(2*(rand() < p) - 1 = -1) = \mathbb{P}((rand() < p) = 0) = \mathbb{P}(rand() \geqslant p) = 1 - p$.

b)
```
def marche(p,n):
    s = np.zeros(n+1)
    for i in range(1,n+1):
        s[i] = ...............
    plt.plot(range(n+1),s)
```
c)
```
n = eval(input('n='))
p = eval(input('p='))
for i in range(5):
    marche(p,n)
plt.plot([0,n],[0,0])
```
d) 0bserver...
e) Bis

2. a)
```
def T():
    S = 2*(rand()<.5)-1
    T = 1
    while S:
        S +=2*(rand()<.5)-1
        T +=1
    return T
```
b)
```
N = 1000
S = np.zeros(N)
for i in range(N):
    S[i] = T()
print(np.max(S),sum(S/N))
```
c) Pourquoi certaines exécutions sont-elles longues, voire très longues ?
En zone de persistance de malchance, l'atterrissage peut être long à venir...
Quel est votre record de persistance de la malchance ? Ça dépend, jamais deux fois le même...
La moyenne converge-t-elle ? Manifestement non...

Chapitre 63

Propagation d'une épidémie & résolutions numériques d'équations

A. Modèle SIR

Le modèle SIR est historiquement le premier exemple de modèle à compartiments, c'est-à-dire dans lequel on divise la population en plusieurs catégories. C'est encore aujourd'hui le modèle à la base des simulations actuels. Il a été introduit en 1927 par Anderson Gray McKendrick (1876–1943).

Pour une population donnée, on étudie la taille de trois sous-populations au cours du temps t : $\mathrm{S}(t)$ représente les personnes saines (susceptible en anglais) au temps t, $\mathrm{I}(t)$ les personnes infectées (infected), et $\mathrm{R}(t)$ les personnes retirées (removed).

Il convient de bien différencier les personnes saines des personnes retirées : les personnes saines n'ont pas encore été touchées par le virus, alors que les personnes retirées sont guéries, et donc immunisées. Autrement dit, les personnes retirées ne sont plus prises en compte. Par conséquent, le modèle SIR de base ne s'occupe pas directement de prédire la mortalité de l'épidémie, pour cela nous verrons les modifications que nous pourrons apporter.

Le modèle SIR peut donc être représenté par le schéma suivant :

$$\boxed{\mathrm{S}} \xrightarrow{\quad\beta\quad} \boxed{\mathrm{I}} \xrightarrow{\quad\gamma\quad} \boxed{\mathrm{R}}$$

où

- β représente le *taux de transmission*, c'est à dire le taux de personnes saines qui deviennent infectées
- γ le *taux de guérison*, c'est à dire le taux de personnes infectées qui deviennent retirées.

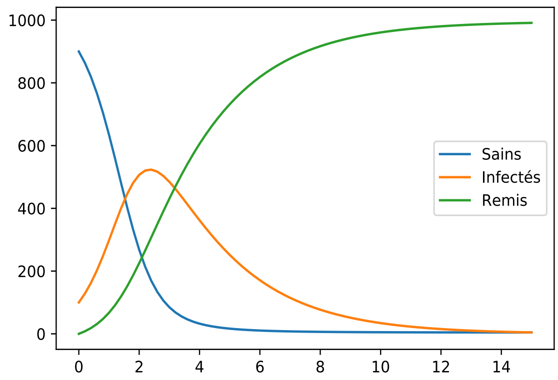
Mathématiquement, le modèle SIR est donné par le système suivant :

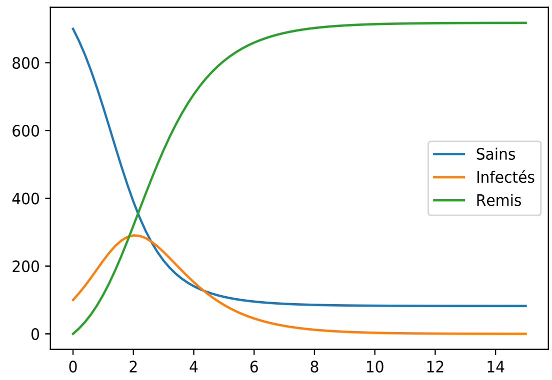
$$(\mathrm{SIR}) \begin{cases} \dfrac{\mathrm{dS}(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta \mathrm{S}(t)\mathrm{I}(t) & (1.1) \\ \dfrac{\mathrm{dI}(t)}{\mathrm{d}t} = \beta \mathrm{S}(t)\mathrm{I}(t) - \gamma \mathrm{I}(t) & (1.2) \\ \dfrac{\mathrm{dR}(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma \mathrm{I}(t) & (1.3) \end{cases}$$

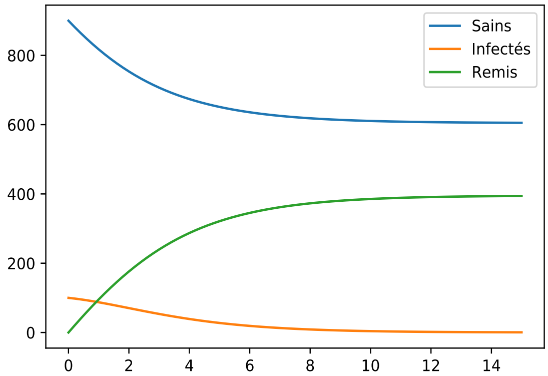
avec

$$\mathrm{R}(0) = 0, \quad \mathrm{S}(0) > 0, \quad \mathrm{I}(0) > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}(0) + \mathrm{I}(0) = \mathrm{N}.$$

Au départ de l'épidémie, *a priori* le nombre $\mathrm{I}(0)$ de personnes infectées est très faible au regard de la population totale N.







Exercice 221

Quelques propriétés du modèle SIR

Justifier les propriétés suivantes.

1. La population totale $\mathrm{N} = \mathrm{S}(t) + \mathrm{I}(t) + \mathrm{R}(t)$ est constante.
2. $\mathrm{S}(t)$, $\mathrm{I}(t)$ et $\mathrm{R}(t)$ restent strictement positifs (sauf R uniquement en $t = 0$).
3. Quand t parcourt $[0\,;\ +\infty[$, $\mathrm{S}(t)$ décroît strictement vers une limite $\mathrm{S}_\infty > 0$, $\mathrm{I}(t)$ tend vers 0 et $\mathrm{R}(t)$ croît strictement vers une limite $\mathrm{R}_\infty < \mathrm{N}$.
4. S_∞ vérifie la relation
$$-\ln\left(\frac{\mathrm{S}_\infty}{\mathrm{S}(0)}\right) = \frac{\beta}{\gamma}(\mathrm{N} - \mathrm{S}_\infty).$$
5. R_∞ vérifie la relation
$$-\ln\left(\frac{\mathrm{N} - \mathrm{R}_\infty}{\mathrm{S}(0)}\right) = \frac{\beta}{\gamma}\mathrm{R}_\infty,$$
et si on se permet l'approximation $\mathrm{S}(0) \simeq \mathrm{N}$ (le nombre initial d'infectés est très très faible au regard de la population totale),
$$-\ln\left(1 - \frac{\mathrm{R}_\infty}{\mathrm{N}}\right) \simeq \frac{\beta}{\gamma}\mathrm{R}_\infty,$$

Solution (**Ex.221** – *Quelques propriétés du modèle SIR*)

1. En notant $\mathrm{N}(t)$ la population à l'instant t, (1) + (2) + (3) donne $\dfrac{\mathrm{dN}(t)}{\mathrm{d}t} = 0$.
2. En considérant (1) comme une équation d'ordre 1 vérifiée par S, on a
$$\mathrm{S}(t) = \mathrm{S}(0)\mathrm{e}^{-\beta \displaystyle\int_0^t \mathrm{I}(u)\mathrm{d}u} > 0.$$
De même, (2) fournit
$$\mathrm{I}(t) = \mathrm{I}(0)\mathrm{e}^{\beta \displaystyle\int_0^t \mathrm{I}(u)\mathrm{d}u - \gamma t} > 0.$$

(3) induit alors que R est strictement croissante, et avec $R(0) = 0$, R reste strictement positive sur $]0\,;\ +\infty[$.

3. S, I et R sont bornées, à valeurs dans $[0\,;\ N]$ puisque $S + I + R = N$.
Or (1) induit que S est strictement décroissante, et étant minorée, elle admet une limite finie S_∞.
R est croissante, et étant majorée, elle admet une limite finie R_∞.
Et comme $I = N - S - R$, I admet aussi une limite finie I_∞.
De plus, (3) s'écrit $R(t) = \int_0^t \gamma I(u)\mathrm{d}u$, donc si $I_\infty > 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} R(t) = +\infty$, ce qui est absurde.
Donc $I_\infty = 0$, $R_\infty \in]0\,;\ N[$, $S_\infty \in]0\,;\ N[$ et $R_\infty + S_\infty = N$.

4. (1) peut s'écrire $\dfrac{\mathrm{d}\ln(S(t))}{\mathrm{d}t} = -\beta I(t)$ que l'on peut intégrer sur $[0\,;\ +\infty[$ en $\ln(S_\infty) - \ln(S(0)) = -\beta \int_0^{+\infty} I(t)\mathrm{d}t$.
Et (2) réécrite $\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} - \gamma I(t)$ s'intègre en $-I(0) = -S_\infty + S(0) - \gamma \int_0^{+\infty} I(t)\mathrm{d}t$.
En éliminant $\int_0^{+\infty} I(t)\mathrm{d}t$, $\ln \dfrac{S_\infty}{S(0)} = \dfrac{\beta}{\gamma}\big(-I(0) + S_\infty - S(0)\big)$, et comme $R(0) = 0$, $I(0) + S(0) = N$. Donc $-\ln \dfrac{S_\infty}{S(0)} = \dfrac{\beta}{\gamma}(N - S_\infty)$

5. Il suffit de se souvenir que $R_\infty = N - S_\infty$ puisque $I_\infty = 0$.

Exercice 222

Taux de reproduction $\mathcal{R}_0$ et théorème du seuil

On définit le *taux de reproduction* $\mathcal{R}_0$ par

$$\mathcal{R}_0 \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\beta S(0)}{\gamma} \simeq \frac{\beta N}{\gamma}.$$

En général, le nombre initial d'infectés n'est pas connu précisément – il faudrait tester toute la population pour le connaître –, mais s'il concerne quelques cas, voire quelques milliers de cas, pour une population s'évaluant en dizaines de millions ou plus, l'approximation est tout à fait recevable.

Théorème du seuil

1. Montrer que si $\mathcal{R}_0 \leqslant 1$, alors I est décroissante et il n'y a pas d'épidémie.

2. Montrer que si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors I est strictement croissante jusqu'à un pic épidémique puis décroissante.

Solution (**Ex.222** – *Taux de reproduction $\mathcal{R}_0$ et théorème du seuil*)

(2) donne $\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = I(t)\big(\beta S(t) - \gamma\big)$ avec $I > 0$ et S strictement décroissante.

1. Si $\mathcal{R}_0 \leqslant 1$, alors $\beta S(t) - \gamma \leqslant \beta S(0) - \gamma$ et $\beta S(0) - \gamma = \gamma(\mathcal{R}_0 - 1) \leqslant 0$. Donc I décroît, tendant vers $I_\infty = 0$: la maladie s'éteint sans pic épidémique.

2. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors $\beta S(0) - \gamma = \gamma(\mathcal{R}_0 - 1) > 0$. Donc I est initialement croissante. Comme I tend vers $I_\infty = 0$, I décroît nécessairement à partir d'un certain t_0 où elle atteint son maximum. Alors $I'(t_0) = 0 = \beta S(t_0) - \gamma$. Au-délà, pour $t > t_0$, puisque S est strictement décroissante, $\beta S(t) - \gamma < 0$ donc I décroît strictement à partir de t_0 : la maladie atteint un unique pic épidémique.

Quelques interprétations

• βN est le nombre de personnes qu'une personne infectée contamine par unité de temps et $1/\gamma$ est la durée moyenne de la période infectieuse (c'est la durée moyenne en unité de temps pour atteindre la guérison. En effet, pensez à l'espérance de la loi géométrique : si la probabilité de guérison par unité de temps est γ, alors le temps moyen pour obtenir la guérison est $1/\gamma$ unités de temps).

Donc $\mathcal{R}_0$ est le nombre moyen de « cas secondaires » dûs à une personne infectée.

• Le théorème du seuil montre l'intérêt de ramener $\mathcal{R}_0$ en-dessous de 1, et l'interprétation de $\mathcal{R}_0$ indique des stratégies pour réduire l'épidémie :

(i) confinement, distanciation sociale et fermeture de lieux fréquentés pour réduire le taux de transmission β ;

(ii) traitement médicaux pour augmenter le taux de guérison γ et réduire la période infectieuse ;

(iii) dépistage et quarantaine pour réduire simultanément β et $1/\gamma$.

• Suivant les conditions initiales, on observe que la propagation s'arrête lorsque le nombre d'immunisés R atteint un certain seuil. C'est l'**immunité grégaire ou collective**.

Pour atteindre cet état, il faut que la proportion d'immunisés soit $i = \dfrac{\mathrm{R}_\infty}{\mathrm{N}}$.

On a vu que R_∞ est implicitement défini par

$$-\ln\left(1 - \frac{\mathrm{R}_\infty}{\mathrm{N}}\right) = \mathcal{R}_0 \frac{\mathrm{R}_\infty}{\mathrm{N}}.$$

L'étude de la fonction $i \mapsto \ln(1-i) + \mathcal{R}_0 i$ montre que l'équation

$$\ln(1-i) + \mathcal{R}_0 i = 0$$

admet un unique solution dans $]\,0\,;\ 1[$.

• Parmi les moyens de lutte, la **vaccination** permet de baisser $\mathcal{R}_0$, l'objectif étant alors de passer sous le seuil de 1.

Si une proportion p de la population est vaccinée, cela revient remplacer dans le modèle SIR initial $\mathrm{S}(0)$ par $(1-p)\mathrm{S}(0)$ et $\mathrm{R}(0)$ par $p\mathrm{S}(0)$. $\mathcal{R}_0$ devient alors $(1-p)\mathcal{R}_0$ et la condition pour qu'il n'y ait pas d'épidémie devient

$$(1-p)\mathcal{R}_0 \leqslant 1 \iff p \geqslant 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

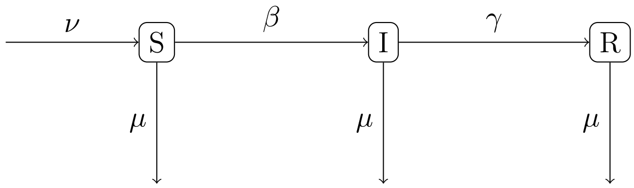
On atteint alors une immunité collective par vaccination.

Dans son flash-presse du 15 avril 2020, l'Institut Pasteur donne les valeurs suivant de l'immunité collective

Maladie	$\mathcal{R}_0$	p
Grippe saisonnière	2	50%
Rougeole	12 – 20	90% – 95%
COVID-19 (estimé)	$3,3$	70%

Améliorations du modèle SIR

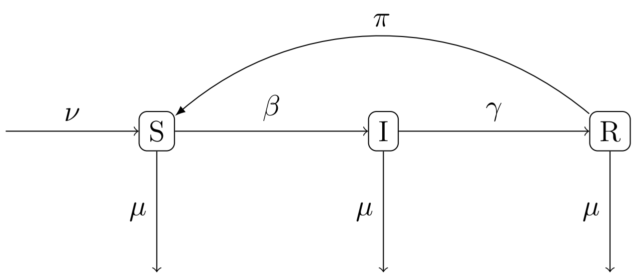
Le modèle SIR reste très théorique. On peut par exemple vouloir tenir compte de la démographie et introduire un taux de natalité ν et un taux de mortalité μ indépendants de la maladie.



La population totale $\mathrm{N}(t)$ évolue alors au cours du temps et le système différentiel devient

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dS}(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta \mathrm{S}(t)\mathrm{I}(t) + \nu \mathrm{N}(t) - \mu \mathrm{S}(t) \\ \dfrac{\mathrm{dI}(t)}{\mathrm{d}t} = \beta \mathrm{S}(t)\mathrm{I}(t) - \gamma \mathrm{I}(t) - \mu \mathrm{I}(t) \\ \dfrac{\mathrm{dR}(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma \mathrm{I}(t) - \mu \mathrm{R}(t) \\ \mathrm{N}(t) = \mathrm{S}(t) + \mathrm{I}(t) + \mathrm{R}(t) \end{cases}$$

On peut aussi envisager que l'immunité suite à la guérison ne soit que temporaire et proposer le modèle SIR suivant avec perte d'immunité :



conduisant au système

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{dS}(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta \mathrm{S}(t)\mathrm{I}(t) + \nu \mathrm{N}(t) - \mu \mathrm{S}(t) + \pi \mathrm{R}(t) \\
\dfrac{\mathrm{dI}(t)}{\mathrm{d}t} = \beta \mathrm{S}(t)\mathrm{I}(t) - \gamma \mathrm{I}(t) - \mu \mathrm{I}(t) \\
\dfrac{\mathrm{dR}(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma \mathrm{I}(t) - \mu \mathrm{R}(t) - \pi \mathrm{R}(t) \\
\dfrac{\mathrm{dN}(t)}{\mathrm{d}t} = (\nu - \mu)\mathrm{N}(t)
\end{cases}
$$

Une autre possibilité est d'ajouter un ou plusieurs compartiments.

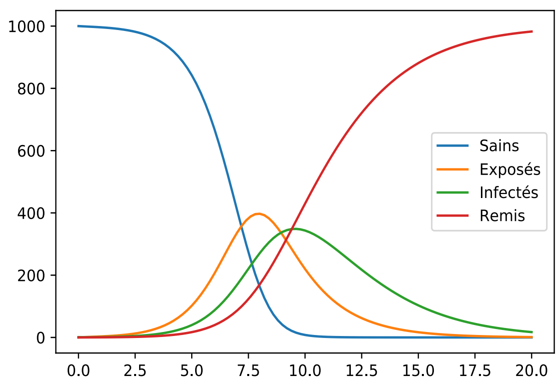
B. Modèles SEIR, SEIRD, ...

Pour tenir compte du temps d'incubation, on ajoute un compartiment pour les personnes *infectées non infectieuses*, baptisé « E » (pour *exposées* et un taux d'incubation α pour tenir compte de la phase d'incubation. Par exemple :

$$
\boxed{\mathrm{S}} \xrightarrow{\beta} \boxed{\mathrm{E}} \xrightarrow{\alpha} \boxed{\mathrm{I}} \xrightarrow{\gamma} \boxed{\mathrm{R}}
$$

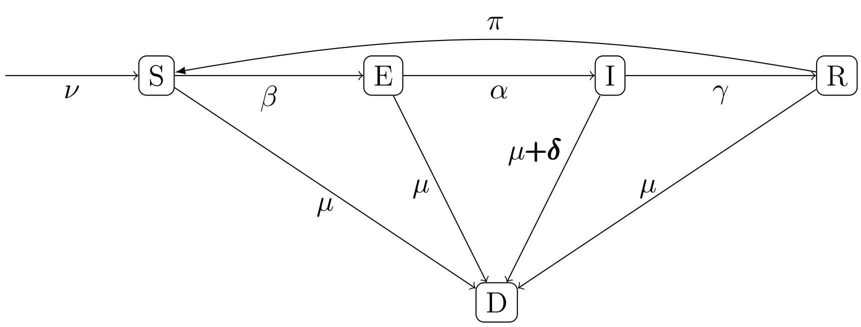
conduisant au système

$$
(\mathrm{SEIR}) \begin{cases}
\dfrac{\mathrm{dS}(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta \mathrm{S}(t)\mathrm{I}(t) & (2.1) \\
\dfrac{\mathrm{dE}(t)}{\mathrm{d}t} = \beta \mathrm{S}(t)\mathrm{I}(t) - \alpha \mathrm{E}(t) & (2.2) \\
\dfrac{\mathrm{dI}(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha \mathrm{E}(t) - \gamma \mathrm{I}(t) & (2.3) \\
\dfrac{\mathrm{dR}(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma \mathrm{I}(t) & (2.4)
\end{cases}
$$



On peut évidemment envisager d'y ajouter des considérations démographiques (natalité ν et mortalité μ), ou sanitaires (perte d'immunité π), mais aussi l'enrichir d'autres compartiment, par exemple « D » pour décédés spécifiquement en raison de la maladie, avec un *taux de décès* δ.

Par exemple :



$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dS}(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta \mathrm{S}(t)\mathrm{I}(t) + \nu \mathrm{N}(t) - \mu \mathrm{S}(t) + \pi \mathrm{R}(t) \\ \dfrac{\mathrm{dE}(t)}{\mathrm{d}t} = \beta \mathrm{S}(t)\mathrm{I}(t) - \alpha \mathrm{E}(t) - \mu \mathrm{E}(t) \\ \dfrac{\mathrm{dI}(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha \mathrm{E}(t) - \gamma \mathrm{I}(t) - (\mu + \delta)\mathrm{I}(t) \\ \dfrac{\mathrm{dR}(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma \mathrm{I}(t) - \mu \mathrm{R}(t) - \pi \mathrm{R}(t) \\ \dfrac{\mathrm{dD}(t)}{\mathrm{d}t} = \mu \mathrm{N}(t) + \delta \mathrm{I}(t) \\ \dfrac{\mathrm{dN}(t)}{\mathrm{d}t} = (\nu - \mu)\mathrm{N}(t) - \delta \mathrm{I}(t) \end{cases}$$

C. Modèle SEIR structuré par âge

Dans ce modèle, on considère que le comportement de la maladie dépend de l'âge de la personne (ce qui est le cas pour le Covid-19), on obtient alors des équations aux dérivées partielles (EDP).

En reprenant le système du modèle SEIR, et avec les mêmes sous-populations $\mathrm{S}(a,t)$, $\mathrm{E}(a,t)$, $\mathrm{I}(a,t)$ et $\mathrm{R}(a,t)$ que précédemment mais en fonction du temps t et de l'âge a, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{S}(a,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathrm{S}(a,t)}{\partial a} = -\beta(a)\mathrm{S}(a,t)\mathrm{I}(a,t) - \mu(a)\mathrm{S}(a,t) & (3.1) \\ \dfrac{\partial \mathrm{E}(a,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathrm{E}(a,t)}{\partial a} = \beta(a)\mathrm{S}(a,t)\mathrm{I}(a,t) - \alpha(a)\mathrm{E}(a,t) - \mu(a)\mathrm{E}(a,t) & (3.2) \\ \dfrac{\partial \mathrm{I}(a,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathrm{I}(a,t)}{\partial a} = \alpha(a)\mathrm{E}(a,t) - \gamma(a)\mathrm{I}(a,t) - \mu(a)\mathrm{S}(a,t) & (3.3) \\ \dfrac{\partial \mathrm{R}(a,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathrm{R}(a,t)}{\partial a} = \gamma(a)\mathrm{I}(a,t) - \mu(a)\mathrm{R}(a,t) & (3.4) \end{cases}$$

avec $\beta(a)$, $\alpha(a)$, $\gamma(a)$ et $\mu(a)$ respectivement les taux de transmission, d'incubation, de guérison et de mortalité qui dépendent tous de l'âge.

Nous considérons de plus que $\mathrm{I}(0,t) = \mathrm{E}(0,t) = \mathrm{R}(0,t) = 0$ et $\mathrm{S}(0,t) = \nu$; c'est à dire que, pour tout temps t, les personnes naissent ($a = 0$) saines et où ν est un paramètre connu pour une population donnée (taux de natalité).

D. Recherche numérique de $\mathrm{R}_\infty/\mathrm{N}$

Exercice 223

Méthodes de dichotomie, du point fixe et de Newton

Soit $\mathcal{R}_0 \in \,]\,1\,;\ +\infty[$. On souhaite déterminer numériquement le taux final d'immunisés $\tau = \dfrac{\mathrm{R}_\infty}{\mathrm{N}}$, défini implicitement par

$$\tau \in \,]\,0\,;\ 1[\qquad \text{et} \qquad \ln(1-\tau) + \mathcal{R}_0\tau = 0.$$

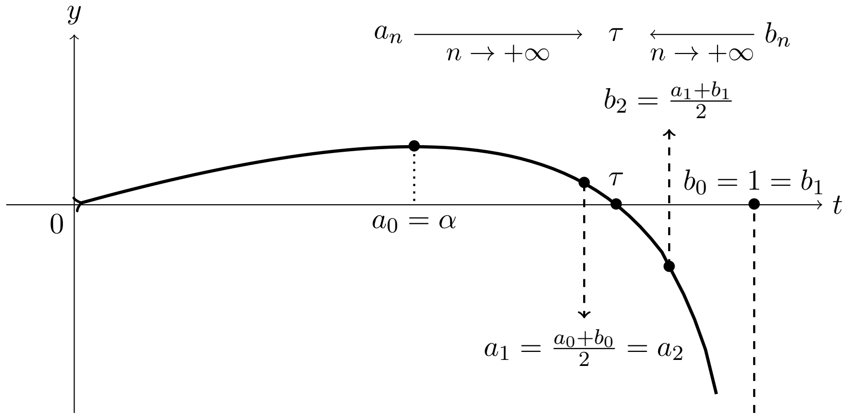
1. Soit

$$f : \,]\,0\,;\ 1[\to \mathbb{R}, t \mapsto \ln(1-t) + \mathcal{R}_0 t.$$

a) Montrer que $f(t) = 0$ admet une unique solution.

b) On pose $\alpha = 1 - \dfrac{1}{\mathcal{R}_0}$. Justifier que $\tau \in \,]\,\alpha\,;\ 1[$.

2. *Méthode de dichotomie*



Résolution par dichotomie

a) Justifier que l'on peut employer la méthode de dichotomie pour déterminer τ.

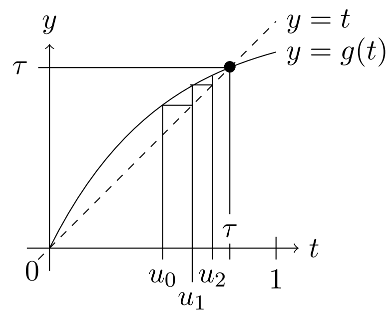
b) Définir la fonction d'en-tête `f(r,t)` où `r` recevra la valeur de $\mathcal{R}_0$.

c) Programmer une fonction `dicho(r0,e)` calculant τ avec une erreur maximale `e`.

d) Pour $\mathcal{R}_0 = 2$, combien de boucles le calcul de τ avec une précision 10^{-7} nécessite-t-il ?

e) Donner des approximations de τ à 10^{-7} près pour $\mathcal{R}_0 = 1.5$ (ébola), $\mathcal{R}_0 = 2.5$ (grippe), $\mathcal{R}_0 = 3.3$ (COVID-19 ?) puis $\mathcal{R}_0 = 15$ (rougeole).

3. *Méthode du point fixe*



Approximations successives par la méthode du point fixe

On définit

$$g :]\,0\,;\ 1[\,\to \mathbb{R}, t \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\mathcal{R}_0 t}.$$

a) Vérifier que

$$f(t) = 0 \iff g(t) = t.$$

b) Justifier que l'intervalle $]\,0\,;\ 1[$ est stable par g, puis que $[\,\alpha\,;\ 1]$ est stable par g. *On pourra commencer par montrer que $g(\alpha) \geqslant \alpha$.*

c) On pose $u_0 = \alpha$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = g(u_n)$.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \tau| \leqslant \frac{k^n}{\mathcal{R}_0} \quad \text{avec } k = \frac{\mathcal{R}_0}{\mathrm{e}^{\mathcal{R}_0 - 1}} \in \,]\,0\,;\ 1[.$$

d) Programmer une fonction `fixe(r0,e)` calculant τ avec une erreur maximale `e`. On commencera par évaluer le nombre de boucles nécessaires pour calculer τ avec une précision `e`.

e) Donner des approximations de τ à 10^{-7} près pour $\mathcal{R}_0 = 1.5$ (ébola), $\mathcal{R}_0 = 2.5$ (grippe), $\mathcal{R}_0 = 3.3$ (COVID-19 ?) puis $\mathcal{R}_0 = 15$ (rougeole), précisant le nombre de boucles nécessaires à ses calculs.

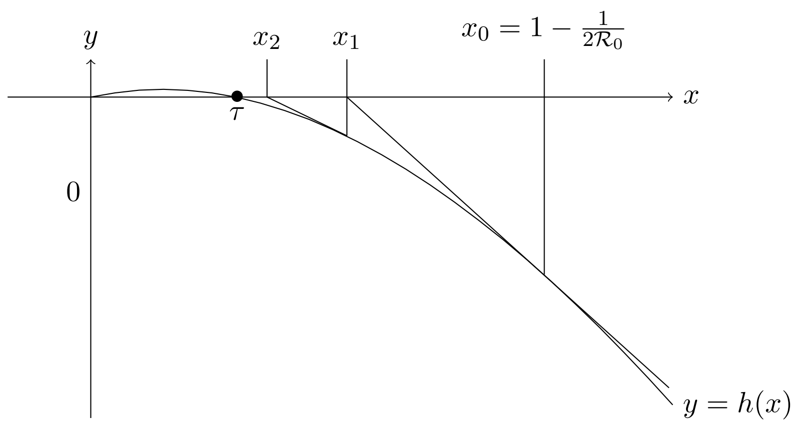
4. *Méthode des tangentes de Newton*

On pose

$$h : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\mathcal{R}_0 x} - x.$$

On construit une suite (x_k) suivant la méthode des tangentes de Newton en posant

$$x_0 = \frac{\alpha + 1}{2} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = x_k - \frac{h(x_k)}{h'(x_k)}.$$



Méthode des tangentes de Newton

a) Programmer une fonction `Newton(r0,e)` calculant τ avec une erreur maximale `e`, en prenant pour condition d'arrêt que $|x_{k+1} - x_k| \leqslant$ e.

b) Donner des approximations de τ à 10^{-7} près pour $\mathcal{R}_0 = 1.5$ (ébola), $\mathcal{R}_0 = 2.5$ (grippe), $\mathcal{R}_0 = 3.3$ (COVID-19 ?) puis $\mathcal{R}_0 = 15$ (rougeole), précisant le nombre de boucles nécessaires à ses calculs.

Solution (**Ex.223** – *Méthodes de dichotomie, du point fixe et de Newton*)

1. $f'(t) = \dfrac{\mathcal{R}_0 - 1 - \mathcal{R}_0 t}{1-t}$, $f'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 1 - \dfrac{1}{\mathcal{R}_0}$. Soit $\alpha = 1 - \dfrac{1}{\mathcal{R}_0}$.

t	0		α		τ		1
$f'(t)$	||	$+$	0		$-$		||
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2. *Méthode de dichotomie*

$f(\alpha) > 0$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = -\infty$, théorème des valeurs intermédiaires...

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(r,t):
    return np.log(1-t)+r*t

def dicho(r,e):
    a=1-1/r
    b=0.999999999
    while (b-a)>e:
        m = (a+b)/2
        if f(r,a)*f(r,m)>0:
            a = m
        else:
            b = m
    return (a+b)/2

for r in [1.5, 2.5, 3.3, 12 ]:
    print(dicho(r,1e-7))
```

fournit

```
0.5828116333716117
0.8926447384193892
0.9575740270973441
0.9999938398534473
```

La longueur initiale de l'intervalle est $\ell_0 = 1 - \alpha = \dfrac{1}{\mathcal{R}_0}$, et à chaque étape elle est divisée par 2. A l'issue de la $n-$ième étape, elle vaut $\ell_n = \dfrac{1}{2^n \mathcal{R}_0}$.
On veut $\ell_n \leqslant \mathrm{e}$:
$\ell_n \leqslant \mathrm{e} \iff 2^n \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}\mathcal{R}_0} \iff n \geqslant -\dfrac{\ln(\mathrm{e}\mathcal{R}_0)}{\ln(2)}$ donc le nombre de boucles est $n = \left\lfloor -\dfrac{\ln(\mathrm{e}\mathcal{R}_0)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$
Pour $\mathcal{R}_0 = 2$, $n = 23$.

3. *Méthode du point fixe*
On définit
$$g :]\,0\,;\ 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\mathcal{R}_0 t}.$$
$g(t) = t \iff \mathrm{e}^{-\mathcal{R}_0 t} = 1 - t \iff -\mathcal{R}_0 t = \ln(1-t) \iff f(t) = 0.$
$g'(t) = \mathrm{e}^{-\mathcal{R}_0 t}$ donc g est croissante.
$g(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $g(t) \xrightarrow[t\to 1]{} 1 - \mathrm{e}^{-\mathcal{R}_0} < 1$ donc $]\,0\,;\ 1[$ est stable par g.
Soit pour $t \in [\,0\,;\ 1]$, $\delta(t) = g(t) - t$ (on prend évidemment $g(0) = 0$). Alors δ est $\mathcal{C}^1$, ne s'annule qu'en 0 et en τ, et $\delta'(t) = \mathcal{R}_0 \mathrm{e}^{-\mathcal{R}_0 t} - 1$ est positive au voisinage de 0^+ avec $\delta(0) = 0$. Donc δ est positive au voisinage de 0^+, donc par les valeurs intermédiaires, h est strictement positive sur $]\,0\,;\ \tau[$.
Comme $\alpha \in]\,0\,;\ \tau[$, $\delta(\alpha) > 0$, *i.e.* $g(\alpha) > \alpha$. Donc $[\,\alpha\,;\ 1]$ est stable par g.
Par stabilité de $[\,\alpha\,;\ 1]$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\,\alpha\,;\ 1]$.
g est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,\alpha\,;\ 1]$ avec
$$\forall t \in [\,\alpha\,;\ 1]\,, \quad g'(t) = \mathcal{R}_0 \mathrm{e}^{-\mathcal{R}_0 t}.$$
g' est positive et décroissante donc $\forall t \in [\,\alpha\,;\ 1]\,, |g'(t)| \leqslant g'(\alpha)$.
$g'(\alpha) = \mathcal{R}_0 \mathrm{e}^{1-\mathcal{R}_0} = \dfrac{\mathcal{R}_0}{\mathrm{e}^{\mathcal{R}_0 - 1}}$ or $\mathrm{e}^{\mathcal{R}_0 - 1} > (\mathcal{R}_0 - 1) + 1$ (car $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ avec égalité si, et seulement si, $x = 0$).
Donc $\forall t \in [\,0\,;\ 1]\,, |g'(t)| \leqslant k$ où $k = g'(\alpha) = \dfrac{\mathcal{R}_0}{\mathrm{e}^{\mathcal{R}_0 - 1}}$.
En appliquant l'inégalité des accroissement finis sur $[\,\alpha\,;\ 1]$:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \tau| \leqslant k\,|u_n - \tau|.$$
Et par récurrence sur n :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \tau| \leqslant k^n\,|u_0 - \tau|.$$
Comme $u_0 = \alpha = 1 - \dfrac{1}{\mathcal{R}_0}$ et $\tau \in [\,\alpha\,;\ 1]$, $0 \leqslant \tau - u_0 \leqslant 1 - u_0 \leqslant \dfrac{1}{\mathcal{R}_0}$. Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \tau| \leqslant \frac{k^n}{\mathcal{R}_0} \quad \text{avec } k = \frac{\mathcal{R}_0}{\mathrm{e}^{\mathcal{R}_0 - 1}} \in]\,0\,;\ 1[.$$
En particulier, $k^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ induit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tau$.
$\dfrac{k^n}{\mathcal{R}_0} \leqslant \mathrm{e} \iff n \geqslant \dfrac{\ln(e\mathcal{R}_0)}{\ln(k)}$

```
def g(r,t):
    return 1-np.exp(-r*t)

def fixe(r,e):
    k = r/np.exp(r-1)
    n = int(np.log(e*r)/np.log(k))+1
    u = 1-1/r
    for i in range(n):
        u = g(r,u)
    return u

for r in [1.5, 2.5, 3.3, 12 ]:
    print(fixe(r,1e-7))
```

produit

```
167
0.582811643866
27
0.892644753609
14
```

```
0.957574014941
2
0.999993854556
```

4. *Méthode des tangentes de Newton*

```
def h(r,t):
    return 1-np.exp(-r*t)-t

def hp(r,t):
    return r*np.exp(-r*t)-1

def Newton(r,e):
    n = 0
    x = 1
    xx = 1-1/(2*r)
    while np.abs(xx-x) > e:
        x, xx = xx, xx-h(r,xx)/hp(r,xx)
        n += 1
    print(n)
    return xx
```

produit

```
4
0.582811643866
4
0.892644753609
4
0.957574014941
3
0.999993855335
```

On observe que le nombre maximum de boucles sur ces quatre exemples est 4, pas mal non ?

E. Méthode d'Euler pour les systèmes différentiels

Exercice 224

Les modèles SIR et SEIR par la méthode d'Euler

On souhaite résoudre numériquement le modèle SIR décrit par les équations (1.1), (1.2) et (1.3). Pour cela on utilise la méthode d'Euler, ou méthode des différences finies.
On définit les constantes nécessaires :

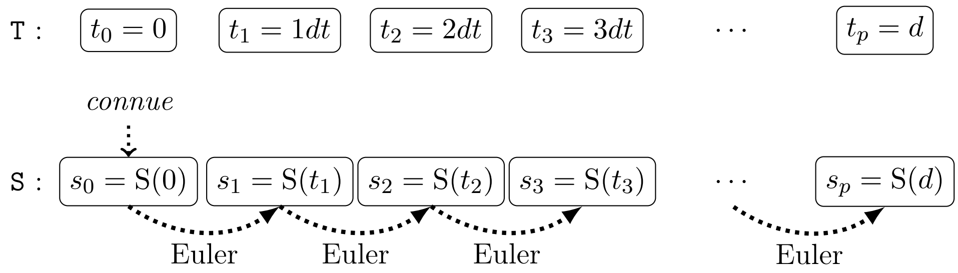
```
# Constantes de la simulation
N=1000
beta=2/N
gamma=.8
```

Pour utiliser la méthode d'Euler, on discrétise la durée d'observation d (en jours) en coupant chaque jour en n parties :

```
# Dur\'ee et \'echantillonnage
d=20 # dur\'ee (jours)
n=5 # \'echantillonnage par jours
p=n*d # nombre de donn\'ees, indice 0 \`a t
dt=1/n
```

Ainsi, le temps est discrétisé en $t_0 = 0$, $t_1 = dt$, $t_2 = 2dt$,... $t_i = idt$, $t_p = d$, et sera représenté par un vecteur `T=np.linspace(0,d,t+1)`.

Chaque fonction S, I et R sera représentée par un vecteur dont les coefficients sont les valeurs de $\mathrm{S}(t_0)$, $\mathrm{S}(t_1)$, ..., $\mathrm{I}(t_0)$, $\mathrm{I}(t_1)$, etc.



D'où l'initialisation

```
# initialisation
T=np.linspace(0,d,p+1)
I=np.zeros(p+1)
I[0]=1
S=np.zeros(p+1)
S[0]=N-I[0]
R=np.zeros(p+1)
```

La méthode d'Euler consiste en l'approximation

$$\mathrm{S}(t_{i+1}) \simeq \mathrm{S}(t_i) + \frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}t}(t_i)(t_{i+1} - t_i).$$

1. a) Compléter les lignes suivantes afin de calculer les vecteurs S, I et R

```
# Euler
for k in range(p):
    S[k+1] = S[k]-beta*S[k]*I[k]*dt
    I[k+1] = .......
    R[k+1] = .......
```

b) Faire tracer sur un même graphique les courbes de S, I et R.

2. Plutôt que de gérer séparément trois vecteurs `S`, `I` et `R`, on souhaite traiter le système vectoriellement en posant

$$\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{S}(t) \\ \mathrm{I}(t) \\ \mathrm{R}(t) \end{pmatrix}$$

et en traduisant le système sous la forme d'une unique relation

$$\frac{\mathrm{dX}(t)}{\mathrm{d}t} = f\big(\mathrm{X}(t)\big).$$

On conserve les définitions des constantes, de la durée et de l'échantillonnage précédente et on remplace l'initialisation par

```
# initialisation
T=np.linspace(0,d,p+1)
I0=1
X=np.array([N-I0,I0,0])
XX=[X]
```

où la liste `XX` contiendra à la fin de l'algorithme les vecteurs représentant $\mathrm{X}(t_0)$, $\mathrm{X}(t_1)$, $\mathrm{X}(t_2)$,...

a) Compléter la définition de la fonction f :

```
def f(X):
    return np.array([......... , .......... , .........])
```

b) Écrire la boucle qui construit la liste `XX`.

c) Afin de séparer facilement (sans écrire de boucle) les coordonnées dans la liste de vecteurs `XX`, on la transforme en un tableau à double entrée (une matrice) par

`RES=np.array(XX)`

de sorte que `RES[:,0]` fournit la première colonne de `RES` de taille $p+1$.

d) Faire tracer sur un même graphique les courbes de S, I et R.

3. Adapter le script précédent pour résoudre numériquement le modèle SEIR décrit par les équations (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4).

Solution (**Ex.224** – *Les modèles SIR et SEIR par la méthode d'Euler*)

```
# Constantes de la simulation
N=1000
beta=2/N
gamma=.8

# Dur\'ee et \'echantillonnage
d=20 # dur\'ee (jours)
n=5 # \'echantillonnage par jours
p=n*d # nombre de donn\'ees, indice 0 \`a t
dt=1/n

# initialisation
T=np.linspace(0,d,p+1)
I=np.zeros(t+1)
I[0]=1
S=np.zeros(t+1)
S[0]=N-I[0]
R=np.zeros(t+1)
R[0]=0

# Euler
for k in range(t):
    S[k+1] = S[k]-beta*S[k]*I[k]*dt
    I[k+1] = I[k]+beta*S[k]*I[k]*dt-gamma*I[k]*dt
    R[k+1] = R[k]+gamma*I[k]*dt

# Trac\'e
plt.plot(T,S)
plt.plot(T,I)
plt.plot(T,R)
plt.legend(['Sains','Infect\'es','Remis'])
```

et version fonction vectorielle

```
# initialisation
T=np.linspace(0,d,p+1)
I0=100
X=np.array([N-I0,I0,0])
XX=[X]

# Euler
def f(X):
    return np.array([-beta*X[0]*X[1],
            beta*X[0]*X[1]-gamma*X[1],
            gamma*X[1]])
```

```
for k in range(p):
    X = X+f(X)*dt
    XX.append(X)

RES=np.array(XX)
# Trac\'e
plt.plot(T,RES[:,0])
plt.plot(T,RES[:,1])
plt.plot(T,RES[:,2])
plt.legend(['Sains','Infect\'es','Remis'])
```

Et SEIR :

```
#SEIR
N=1000
beta=4/N
gamma=.4
alpha=.5

d=20 # dur\'ee (jours)
n=5 # \'echantillonnage par jours
p=n*d
dt=1/n

# initialisation
T=np.linspace(0,d,p+1)
I=np.zeros(p+1)
I[0]=1
S=np.zeros(p+1)
S[0]=N-I[0]
E=np.zeros(p+1)
E[0]=0
R=np.zeros(p+1)
R[0]=0

# Euler
for k in range(p):
    S[k+1] = S[k]-beta*S[k]*I[k]*dt
    E[k+1] = E[k]+beta*S[k]*I[k]*dt-alpha*E[k]*dt
    I[k+1] = I[k]+alpha*E[k]*dt-gamma*I[k]*dt
    R[k+1] = R[k]+gamma*I[k]*dt

# Trac\'e
plt.plot(T,S)
plt.plot(T,E)
plt.plot(T,I)
plt.plot(T,R)
plt.legend(['Sains','Expos\'es','Infect\'es','Remis'])
```

Chapitre 64

Liste de exercices

Liste des exercices

Index