

Exercice 1 *Calculs*

Montrer l'existence et calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$
2. $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\exp(x)+1)(\exp(-x)+1)}$
3. $K = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$
4. $L = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$
5. $M = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$
6. $N_a = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$ où $a \in]1; +\infty[$
7. $P = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\exp(x)+1}}$
8. $Q = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{sh}(x)}$
9. $R = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \ln(\sin x) dx$

Exercice 2 *Intégrales jumelles*

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$ et sous réserve d'existence, les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)} \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)} dt.$$

1. Justifier que I_n et J_n existent. Que vaut $I_n + J_n$?
2. À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, en déduire I_n et J_n .

Exercice 3 *Équivalent d'une suite d'intégrales*

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \ln(n+x) dx.$$

1. Établir que, pour tout entier naturel non nul n , I_n existe.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_n = \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 4 *Développement asymptotique du reste de l'intégrale de Gauss*

1. Justifier l'existence de l'intégrale de Gauß :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

2. a) On pose, pour tout $x \geq 0$, $R(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x)$?
- b) Vérifier que, pour tout $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - R(x)$.
- c) En déduire que : $R(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

Exercice 5 *Fonction gamma d'Euler et suite double d'intégrales*

Pour tout x de $]0; +\infty[$, on pose, sous réserve d'existence,

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Justifier que la fonction Γ est effectivement définie sur $]0; +\infty[$.
 Γ s'appelle la fonction gamma d'Euler.
2. a) Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

- b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

En quelque sorte, Γ prolonge la factorielle sur $]0; +\infty[$... au décalage d'une unité près.

3. On admet que Γ est une fonction continue.
Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ au voisinage de 0.

4. Pour tous p et q de $\mathbb{N}$, on pose sous réserve d'existence,

$$I_{p,q} \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^1 z^p \ln^q z \, dz.$$

En utilisant le changement de variable $u = -(p+1) \ln z$, justifier l'existence de $I_{p,q}$ et la calculer.

Exercice 6 Quelques séries de Bertrand

1. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.
2. Soit $\beta > 1$. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$.

Exercice 7 Limite d'une famille de séries

1. Soit $a \in]0; +\infty[$.
 - a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a}{n^2 + a^2}$ converge.
 - b) Montrer que : $\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left(\frac{1}{a} \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer l'existence de $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$, puis la calculer.

Exercice 8 Fonction définie par une intégrale

Soit, pour $a \in \mathbb{R}$ et sous réserve d'existence,

$$f(a) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a + 1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est décroissante.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 9 Que faire d'un logarithme ?

1. Établir la convergence de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$.
2. Calculer I .

Exercice 10 Intégrale à paramètre

Soit a un réel.

1. Établir la convergence de $I_a = \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{a^2}{t^2} \right) dt$.
2. Calculer I_a .

Exercice 11 Racines imbriquées

1. Montrer que $I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-\sqrt{t}}}$ existe.
2. Calculer I en posant $t = \sin^4 x$.

Exercice 12 Arc-tangente like

1. Justifier la convergence de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4u^2 + 4u + 5} du$.
2. Calculer I à l'aide du changement de variable $x = u + 1/2$.