Exercice 1 *Calculs*

Montrer l'existence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$

2. $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\exp(x)+1)(\exp(-x)+1)}$

3. $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

4. $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

5. $\mathrm{M} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

6. $\mathrm{N}_a = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$ où $a \in \,]\,1\,;+\infty\,[$

7. $\mathrm{P} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\exp(x)+1}}$

8. $\mathrm{Q} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}(x)}$

9. $\mathrm{R} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)\ln(\sin x)\mathrm{d}x$

Solution (**Ex.1** – *Calculs*)

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ continue positive sur $[\,0\,;+\infty\,[$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$: convergence par équivalence.

$\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x = \left[\ln\frac{x+1}{x+2}\right]_0^{+\infty} = \ln 2.$

2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{-x}+1)}$ continue positive sur $[\,0\,;+\infty\,[$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$: convergence par équivalence.

$\mathrm{J} \overset{u=\mathrm{e}^x}{=} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$

3. $f : x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ continue positive sur $]\,0\,;+\infty\,[$,

$\sqrt{x}f(x) = \sqrt{x}\ln(1+x^2) - 2\sqrt{x}\ln x \xrightarrow[x\to0]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0 et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$: convergence par domination en 0 et équivalence en $+\infty$.

$\mathrm{K} \overset{\mathrm{IPP.}}{=} \left[x\ln(1+1/x^2)\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi.$

4. $f : x \mapsto \exp(-\sqrt{x})$ continue positive sur $[\,0\,;+\infty\,[$, $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination en $+\infty$.

$\mathrm{L} \overset{u=\sqrt{x}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \overset{\mathrm{IPP.}}{=} \left[-2u\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 2.$

5. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$ continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$, $\sqrt{x}f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0 et $x^{3/2}f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination en 0 et en $+\infty$.

$\mathrm{M} \overset{u=1/x}{=} -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{(u+1)^2}\mathrm{d}u = -\mathrm{M}$ donc $\mathrm{M} = 0$.

6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ continue positive sur $[\,a\,;+\infty\,[$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$: convergence par équivalence.

$\mathrm{N}_a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{x-1}{x+1}\right]_a^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln\frac{a+1}{a-1}.$

7. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$ continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$, $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination.

$\mathrm{P} \overset{u=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}{=} \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{u^2-1}\mathrm{d}u = 2\mathrm{N}_{\sqrt{2}} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2\ln(1+\sqrt{2}).$

8. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}x}$ continue sur $[\,1\,;+\infty\,[$, $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination.

$\mathrm{Q} \overset{u=\mathrm{e}^x}{=} \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{2}{u^2-1}\mathrm{d}u = 2\mathrm{N}_{\mathrm{e}} = \ln\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}.$

9. $f : x \mapsto \sin x\ln(\sin x)$ continue sur $]\,0\,;\pi/2\,]$, $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$ donc intégrale faussement impropre.

$\mathrm{R} \overset{x=\cos t}{=} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-t) + \ln(1+t)\mathrm{d}t = \ln 2 - 1.$

Exercice 2 *Intégrales jumelles*

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$ et sous réserve d'existence, les intégrales :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^n)} \text{ et } \mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)}\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que I_n et J_n existent. Que vaut $\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n$?

2. À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, en déduire I_n et J_n.

Solution (**Ex.2** – *Intégrales jumelles*)

1. • Convergence : $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^n)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{n+2}}$ avec $n+2>1$ et $\dfrac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^2}$ avec $2>1$.

• $\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi/2.$

2. $\mathrm{I}_n \overset{u=1/t}{=} \mathrm{J}_n$, donc $\mathrm{I}_n = \mathrm{J}_n = \pi/4$.

Exercice 3 *Équivalent d'une suite d'intégrales*

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\mathrm{d}x.$$

1. Établir que, pour tout entier naturel non nul n, I_n existe.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\mathrm{I}_n = \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Solution (**Ex.3** – *Équivalent d'une suite d'intégrales*)

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^{nx}}\frac{\ln(n+x)}{x} = 0\times 0 = 0$, ainsi $\mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et on conclut par négligeabilité ...

2. $\mathrm{I}_n \overset{\text{IPP.}}{=} \left[\dfrac{-\mathrm{e}^{-nx}}{n}\ln(n+x)\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\mathrm{d}x = \frac{\ln n}{n} + \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\mathrm{d}x.$

Alors $\forall x>0,\ 0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x \overset{\text{primit.}}{=} \frac{1}{n}$ donne $\dfrac{\ln n}{n} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{1}{n^3}$, donc $\mathrm{I}_n - \dfrac{\ln n}{n} = O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

Exercice 4 *Développement asymptotique du reste de l'intégrale de Gauss*

1. Justifier l'existence de l'intégrale de Gauβ :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

2. a) On pose, pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{R}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{R}(x)$?

b) Vérifier que, pour tout $x>0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \mathrm{R}(x).$

c) En déduire que : $\mathrm{R}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.

Solution (**Ex.4** – *Développement asymptotique du reste de l'intégrale de Gauss*)

1. $\mathrm{e}^{-t^2} = o(\mathrm{e}^{-t})$ assure la convergence en $+\infty$.

2. a) $\mathrm{R}(x) = \mathrm{I} - \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ comme tout reste d'une intégrale convergente.

b) $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t \overset{\text{IPP.}}{=} \left[\frac{-\mathrm{e}^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \mathrm{R}(x).$

c) Par croissance de l'intégrale : $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2x^2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{R}(x)}{2x^2}$

En divisant par $\mathrm{R}(x)$ (car $\mathrm{R}(x) \neq 0$), on obtient $\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}/(2x)}{\mathrm{R}(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ ...

Exercice 5 *Fonction gamma d'Euler et suite double d'intégrales*

Pour tout x de $]\,0\,;+\infty\,[$, on pose, sous réserve d'existence,

$$\Gamma(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que la fonction Γ est effectivement définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
Γ *s'appelle la fonction gamma d'Euler.*

2. a) Montrer que, pour tout x de $]\,0\,;+\infty\,[$,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

En quelque sorte, Γ prolonge la factorielle sur $]0\,;+\infty[$... au décalage d'une unité près.

3. On admet que Γ est une fonction continue.
Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ au voisinage de 0.

4. Pour tous p et q de $\mathbb{N}$, on pose sous réserve d'existence,

$$\mathrm{I}_{p,q} \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 z^p \ln^q z\mathrm{d}z.$$

En utilisant le changement de variable $u = -(p+1)\ln z$, justifier l'existence de $\mathrm{I}_{p,q}$ et la calculer.

Solution (**Ex.5** – *Fonction gamma d'Euler et suite double d'intégrales*)

1.
- $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ assure la convergence en $+\infty$.
- $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et $x-1 > -1$ assure la convergence en 0 (et aussi la divergence si $x \leqslant 0$...).

2. a) Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Comme $t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, par une intégration par parties, j'obtiens :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$...

3. $\forall \mathrm{X} > 0, \Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ or $\Gamma(x+1) \xrightarrow[x\to 0]{} \Gamma(1)$ par continuité donc $\Gamma(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
D'où $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

4. Le changement proposé étant une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante,

$$\mathrm{I}_{p,q} \overset{u=1(p+1)\ln z}{=} \int_{+\infty}^0 \left(\mathrm{e}^{-u/(p+1)}\right)^p \left(\frac{-u}{p+1}\right)^q \left(\frac{-1}{p+1}\mathrm{e}^{-u/(p+1)}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{(-1)^q}{(p+1)^{q+1}}\Gamma(q+1) = (-1)^q\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

Exercice 6 *Quelques séries de Bertrand*

1. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

2. Soit $\beta > 1$. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^\beta(n)}$.

Solution (**Ex.6** – *Quelques séries de Bertrand*)

1. Soit $f : [2\,;+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$.

$\displaystyle\int_2^{\mathrm{T}} f(t)\mathrm{d}t = [\ln(\ln(t))]_2^{\mathrm{T}} \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} +\infty$, et comme f est continue, positive et décroissante, par comparaison série/intégrale, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

2. Soit $f_\beta : [2\,;+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^\beta(t)}$.

$\displaystyle\int_2^{\mathrm{T}} f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1}(t)}\right]_2^{\mathrm{T}} \xrightarrow[\mathrm{T}\to+\infty]{} \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1}(2)}$s, et comme f est continue, positive et décroissante, par comparaison série/intégrale, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln^\beta(n)}$ converge.

Exercice 7 *Limite d'une famille de séries*

1. Soit $a \in]0\,;+\infty[$.

a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{a}{n^2+a^2}$ converge.

b) Montrer que : $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{a}\right) \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2. Montrer l'existence de $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$, puis la calculer.

Solution (**Ex.7** – *Limite d'une famille de séries*)

1. a) $\dfrac{a}{n^2+a^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ assure la convergence par le critère des équivalents pour ces séries à terme général positif et par la convergence de la série de Riemann de paramètre 2.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall t \in [n\,;n+1]$, $\dfrac{a}{n^2+a^2} \geqslant \dfrac{a}{t^2+a^2}$, donc $\dfrac{a}{n^2+a^2} \geqslant \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{a}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$

$\forall t \in [n-1\,;n]$, $\dfrac{a}{n^2+a^2} \leqslant \dfrac{a}{t^2+a^2}$, donc $\dfrac{a}{n^2+a^2} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{a}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$

En sommant ces inégalités pour $n \in [\![1\,;\mathrm{N}]\!]$,

$$\int_1^{N+1} \frac{a}{t^2+a^2}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \int_0^{N} \frac{a}{t^2+a^2}\mathrm{d}t.$$

À l'aide de la primitive $t \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{a}\right)$ de $t \mapsto \frac{a}{t^2+a^2}$,

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{N+1}{a}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \operatorname{Arctan}\left(\frac{N}{a}\right).$$

Par conservation des inégalités (larges) en passant à la limite :

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

2. Puisque $\lim\limits_{a\to+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) = 0$, $\lim\limits_{a\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$ existe par le théorème d'encadrement et

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8 *Fonction définie par une intégrale*

Soit, pour $a \in \mathbb{R}$ et sous réserve d'existence,

$$f(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a+1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que f est décroissante.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution (**Ex.8** – *Fonction définie par une intégrale*)

1. $t \mapsto \frac{1}{t^a+1}$ est continue et positive sur $[1\,;+\infty[$ et :

- pour $a > 0$, $\frac{1}{t^a+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^a}$ donc par équivalence $f(a)$ existe si, et seulement si, $a > 1$;
- pour $a \leqslant 0$, $\forall t \geqslant 1, t^a = \mathrm{e}^{a\ln(t)} \leqslant 1$ donc $\frac{1}{t^a+1} \geqslant \frac{1}{2}$ donc par comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a+1}$ diverge et $f(a)$ n'est pas définie.

Bilan : l'ensemble de définition de f est $]1\,;+\infty[$.

2. Soit $1 < a \leqslant b$. $\forall t \geqslant 1$, $\frac{1}{t^b+1} \leqslant \frac{1}{t^a+1}$ donc par croissance de l'intégrale $f(b) \geqslant f(a)$. Donc f est décroissante.

3. Soit $1 < a$. $\forall t \geqslant 1$, $\frac{1}{t^a+1} \leqslant \frac{1}{t^a}$ donc par croissance de l'intégrale :

$0 \leqslant f(a) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{a-1}$, d'où par encadrement $f(a) \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$.

Exercice 9 *Que faire d'un logarithme ?*

1. Établir la convergence de $\mathrm{I} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

2. Calculer I.

Solution (**Ex.9** – *Que faire d'un logarithme ?*)

1. $\frac{\ln(t)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}(1/t^{3/2})$ et on conclut par le critère de domination.

2. $\mathrm{I} \overset{\text{IPP.}}{=} \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \overset{\text{primit.}}{=} 1.$

Exercice 10 *Intégrale à paramètre*

Soit a un réel.

1. Établir la convergence de $\mathrm{I}_a = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

2. Calculer I_a.

Solution (**Ex.10** – *Intégrale à paramètre*)

1. $\ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{a^2}{t^2}$ donne la convergence en $+\infty$ par équivalence (Riemann en $+\infty$).

$\ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right) = \ln(t^2+a^2) - 2\ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} -2\ln(t)$ donne la convergence en 0 par équivalence ($\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge).

2. $\mathrm{I}_a \overset{\text{IPP.}}{=} \left[t\ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t\left(\frac{2t}{t^2+a^2} - \frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2a^2}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$

$\mathrm{I}_a = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t/a)^2+1}\mathrm{d}t \overset{u=t/a}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}a\mathrm{d}u = 2a\frac{\pi}{2} = a\pi$ (happy ?)

Exercice 11 *Racines imbriquées*

1. Montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sqrt{t}}}$ existe.

2. Calculer I en posant $t = \sin^4 x$.

Solution (**Ex.11** – *Racines imbriquées*)

1. $\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{t}}} = \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t}}$ donc I existe par équivalence et convergence de l'intégrale de Riemann sur $[\,0\,;1\,[$.

2. $\mathrm{I} \overset{x=\sin^4 t}{=} 4\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \mathrm{d}x = \left[-3\cos x + \frac{\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}$

car $\sin^3 x = \dfrac{1}{4}\big(3\sin(x) - \sin(3x)\big)$: toujours linéariser pour primitiver des puissances de sin ou cos.

Exercice 12 *Arc-tangente like*

1. Justifier la convergence de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4u^2+4u+5}\mathrm{d}u$.

2. Calculer I à l'aide du changement de variable $x = u + 1/2$.

Solution (**Ex.12** – *Arc-tangente like*)

1. Remarquer que $4u^2 + 4u + 5 = 4\left[(u+\frac{1}{2})^2 + 1\right] > 0$.
$\dfrac{1}{4u^2+4u+5} \underset{u\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{4u^2}$ assure la convergence.

2. $\mathrm{I} \overset{x=u+1/2}{=} \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \overset{\text{primit.}}{=} \frac{\pi}{4}$.