Exercice 1 *Natures des séries de terme général u_n ...*

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \quad (n \geqslant 0)$
2. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} \quad (n \geqslant 1)$
3. $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad (n \geqslant 0)$
4. $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^{-1} \quad (n \geqslant 1)$
5. $u_n = \sin \dfrac{\pi \times n^2}{n+1} \quad (n \geqslant 0)$
6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \quad (n \geqslant 2)$
7. $u_n = \left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \quad (n \geqslant 1, \alpha \in \mathbb{R})$
8. $u_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} \quad (n \geqslant 0,\ a \in \mathbb{R})$

Solution (**Ex.1** – *Natures des séries de terme général u_n ...*)

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$ car $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
Par le critère de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

2. $n\ln(1+\dfrac{1}{n}) = 1-\dfrac{1}{n}+O\left(1/n^2\right)$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}-\dfrac{1}{n}+O\left(1/n^2\right)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$: la série diverge.

3. $\ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. $\sum u_n$ converge par équivalence.

4. $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$: la série converge par comparaison à la série de Riemann de paramètre 2.

5. $u_n = \sin\left(\pi\dfrac{(n+1)^2-2(n+1)+1}{n+1}\right) = \sin\left(\pi(n-1)+\dfrac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{n+1}$: on conclut à la convergence grâce au critère spécial des séries alternées.

6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{1+(-1)^n/\sqrt{n}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$
$u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$
$\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le théorème spécial de séries alternées,
$\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente,
$\sum O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ est une série absolument convergente donc convergente, par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$,
donc $\sum u_n$ diverge.

7. $\ln(u_n) = n^\alpha \ln\left(1-\dfrac{1}{6n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = n^\alpha\left(1-\dfrac{1}{6n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$
$\ln(u_n) = -\dfrac{1}{6}n^{\alpha-2}+o\left(n^{\alpha-3}\right)$
   - Si $\alpha < 2$: $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, la série diverge grossièrement.
   - Si $\alpha = 2$: $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1/6$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(-1/6)$, la série diverge grossièrement.
   - Si $\alpha > 2$: $n^2u_n = \exp\left(2\ln(n)-\dfrac{1}{6}n^{\alpha-2}+o\left(n^{\alpha-3}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\ln(n) = o\left(n^{\alpha-2}\right)$, donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série converge par comparaison à la série de Riemann de paramètre 2.

8.
   - Si $|a|<1$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |a|^n$, or $\sum |a|^n$ est une série géométrique convergente. Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
   - Si $a=1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ et si $a=-1$, $u_{2n}=1/2$ et $u_{2n+1}=-1/2$: dans le deux cas, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
   - Si $|a|>1$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\dfrac{1}{a}\right|^n$, or $\sum \left|\dfrac{1}{a}\right|^n$ est une série géométrique convergente.
   Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 2 *Pairs et impairs*

1. a) Justifier la convergence des séries

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2},\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n)^2}.$$

b) En admettant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer les sommes des séries précédentes.

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} > \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Solution (**Ex.2** – *Pairs et impairs*)

1. a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge par application du théorème spécial des séries alternées.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n)^2}$ converge par linéarité car la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$ converge.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge par le critère des équivalents de t.g. positifs : $\displaystyle\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ et convergence de la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{24},$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Remarque : la somme de cette dernière série alternée est bien du signe de son premier terme.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\displaystyle\forall k \in \mathbb{R}, 0 \leqslant \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{(x^2)^k}{k!}$ assure la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ par comparaison à la série exponentielle de paramètre x^2.

Une comparaison analogue justifie la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$, donc de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ par linéarité.

Attention si on utilise un autre critère : x^{2k+1} est de signe alternant pour $x < 0$.

Enfin $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \exp(-x) > 0.$

Exercice 3 *Constante γ d'Euler*

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$?

2. En déduire l'existence $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$

Solution (**Ex.3** – *Constante γ d'Euler*)

1. $\displaystyle v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-1}{n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par domination $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

2. Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge, la suite (u_n) converge. En notant γ sa limite,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma\right) = 0 = o(1), \text{ donc :}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

Exercice 4 *Autour du logarithme*

1. Existence et valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

2. a) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.

b) Proposer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme partielle de la série précédente.

Solution (**Ex.4** – *Autour du logarithme*)

1. L'existence peut être obtenue via l'équivalence $\ln(1-1/n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n^2$ et la convergence de la série de Riemann de paramètre 2. Mais on peut faire d'une pierre deux coups en cherchant la somme.

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) =$$

$$\sum_{n=2}^{N} \left[\ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln(n)\right] = \sum_{n=1}^{N-1}\ln(n) + \sum_{n=3}^{N+1}\ln(n) - 2\sum_{n=2}^{N}\ln(n) =$$

$$\ln(1)+\ln(2)+\ln(N)+\ln(N+1)-2\ln(2)-2\ln(N) = \ln\frac{N+1}{2N}$$

Donc la série converge et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$.

Remarque : termes strictement négatifs... somme strictement négative...

2. $$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N}\left[\ln(n)-\ln(n+1)\right] =$$

$$\sum_{n=1}^{N}\ln(n) - \sum_{n=2}^{N+1}\ln(n) = \ln(1)-\ln(N+1) = -\ln(N+1)$$

Donc la série diverge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} -\ln(N)$.

Exercice 5 *Produit infini*

Montrer la convergence de la suite de terme général
$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right).$$

Solution (**Ex.5** – *Produit infini*)

Manifestement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \overset{\text{déf.}}{=} \ln(u_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$, or $\ln\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2}$ et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ converge.

Le critère des équivalents pour ces séries à termes positifs permet d'affirmer que la suite $(v_n)_n$ converge. Par composition par la fonction exponentielle (continue !), la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 6 *Exemples de Séries de Bertrand*

Soit $\alpha \in \,]\,0\,; +\infty\,[$.

1. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\ln^\alpha n}$.

2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln n}$.

Solution (**Ex.6** – *Exemples de Séries de Bertrand*)

1. $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^\alpha t}$ est continue positive et décroissante sur $[\,2\,; +\infty\,[$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$.

- Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_2^x f_1(t)\mathrm{d}t = [\ln|\ln(t)|]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ... $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.
- Si $\alpha \neq 1$,

$$\int_2^x f_\alpha(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(t)}\right]_2^x$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(x)} - \frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-1)\ln^{\alpha-1}(2)} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

- Bilan : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2. $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha \ln t}$ est continue positive et décroissante sur $[\,2\,; +\infty\,[$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$.

- si $\alpha > 1$, $f_\alpha(t) = o(1/t^\alpha)$ et $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable ... $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.
- si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_2^x f_1(t)\mathrm{d}t = [\ln|\ln(t)|]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ... $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$

diverge.

- si $\alpha < 1$, $f_\alpha(t) \geqslant f_1(t) \geqslant 0$ car $t^\alpha \leqslant t$, or $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_1(t)\mathrm{d}t$ diverge d'après le point

précédent donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ diverge ... $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

Exercice 7 *Une série semi-convergente très classique*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

1. a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$, et déterminer le signe de sa somme.

b) Cette série est-elle absolument convergente ?

2. En écrivant u_n à l'aide d'une intégrale, montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

Solution (**Ex.7** – *Une série semi-convergente très classique*)

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

1. a) Le théorème spécial pour les séries alternées permet de justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$. De plus, le signe de sa somme est celui de son premier terme, donc positif.

b) La série harmonique étant divergente, cette série n'est pas absolument convergente.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{0}{n} = \left[\dfrac{(-t)^n}{n}\right]_0^1 = \displaystyle\int_0^1 -(-t)^{n-1}\mathrm{d}t$.

Alors :

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = -\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \int_0^1 (-t)^{n-1}\mathrm{d}t \overset{\text{lin.}}{=} -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (-t)^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{\mathrm{N}}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - \mathrm{I}_\mathrm{N} \text{ où } \mathrm{I}_\mathrm{N} = \int_0^1 \frac{(-t)^{\mathrm{N}}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Par l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale :

$$|\mathrm{I}_\mathrm{N}| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{\mathrm{N}}}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{\mathrm{N}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}+1}.$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = \ln(2) - \mathrm{I}_\mathrm{N}$ avec $\mathrm{I}_\mathrm{N} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$, d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

Exercice 8 *Terme général défini par récurrence*

On considère la suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \,]\,0\,;+\infty\,[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

1. Dans cette question, on suppose $u_0 > 1$.

a) Vérifier que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 1$, et en déduire : $\quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

b) À l'aide de la suite $\left(\dfrac{1}{u_n - 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ converge et déterminer sa somme.

2. Étudier le comportement de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ lorsque $u_0 \in \,]\,0\,;1\,]$.

Solution (**Ex.8** – *Terme général défini par récurrence*)

1. Dans cette question, on suppose $u_0 > 1$.

a) Se démontre par récurrence, l'hérédité étant assurait par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1).$$

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geqslant 0$.

Donc u est croissante : soit elle converge vers une limite ℓ, soit elle diverge vers $+\infty$.

Supposons que u converge vers ℓ. Alors $\ell = \ell^2 - \ell + 1$, donc $(\ell - 1)^2 = 0$, donc $\ell = 1$, ce qui est absurde car :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_0 > 1) \Rightarrow (\ell \geqslant u_0 > 1).$$

Donc u diverge et : $\quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

c) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ (au fait, $u_n \neq 1$!).

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{1}{u_n(u_n-1)} = -\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_n - 1} = -\dfrac{1}{u_n} + v_n$, doù :

$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{u_n} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (v_n - v_{n+1}) = v_0 - v_{\mathrm{N}+1} = \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{\mathrm{N}+1} - 1}$

Comme $u_{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} +\infty$, la série converge, et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0 - 1}.$$

2. On a, comme en 1.b), u croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0 > 0$.

On montre, par réccurence comme en 1.a), que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 1$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 > u_n \leqslant 1$, et $\dfrac{1}{u_n} \geqslant 1$. Ainsi $\dfrac{1}{u_n}$ ne tend pas vers 0, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ diverge grossièrement lorsque $u_0 \in]\,0\,;\,1\,]$.

Exercice 9 *Exponentielle et sinus*

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

1. Justifier l'existence de R_n, et rappeler les limites des suites (S_n) et (R_n).

2. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $(n+1)!\mathrm{R}_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Quelle est la nature de la série de terme général $\sin\big(2\pi \mathrm{e}(n!)\big)$.

Solution (**Ex.9** – *Exponentielle et sinus*)

1. R_n étant le reste d'ordre n de la série exponentielle (donc convergente !) de paramètre 1, R_n existe et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \mathrm{e} \text{ tandis que } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = 0.$$

2. a) $(n+1)!\mathrm{R}_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+k)!}$, or $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{(n+1)!}{(n+k)!} \leqslant \dfrac{1}{(n+2)^{k-1}}$

donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+k)!} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-1}} \leqslant \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^k \leqslant \frac{1}{n+1}$

d'où $1 \leqslant (n+1)!\mathrm{R}_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

b) Par encadrement, $(n+1)!\mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)!}$

3. Partons de : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S}_n + \mathrm{R}_n = \mathrm{e}$.
$\sin\big(2\pi \mathrm{e}(n!)\big) = \sin(2\pi n!\mathrm{S}_n + 2\pi n!\mathrm{R}_n) = \sin(2\pi n!\mathrm{R}_n)$ car $n!\mathrm{S}_n$ est un entier naturel.
Or $n!\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}$ donc $\sin(2\pi \mathrm{e}(n!)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\pi}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi \times \dfrac{1}{n}$.
Par équivalence de termes positifs à partir d'un certain rang, puisque la série harmonique diverge, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin\big(2\pi \mathrm{e}(n!)\big)$ diverge.

Exercice 10 *En passant par la série harmonique*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n(2n+1)}$.

1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n.

2. On note H_N la $\mathrm{N}^{\text{ème}}$ somme partielle de la série harmonique : $\mathrm{H}_\mathrm{N} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n}$.

Justifier que la suite $\big(\mathrm{H}_n - \ln n\big)_{n\geqslant 1}$ converge. On note γ sa limite.

3. a) Déterminer deux réels α et β tels que $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n+1}$.

b) En déduire que, pour tout $\mathrm{N} \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = 2\mathrm{H}_\mathrm{N} - 2\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+1} + 2$.

4. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Solution (**Ex.10** – *En passant par la série harmonique*)

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ (ou "$\leqslant$", ou encore "O"...) permet de conclure.

2. Vu en cours. En posant $v_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$,
$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{-1}{n^2+n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ assure la convergence de la série de t.g. $v_{n+1} - v_n$, donc la convergence de la suite v.

3. a) $\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n+1} = \dfrac{(2\alpha+\beta)n + \alpha}{n(2n+1)}$ donc $\beta = -2$ et $\alpha = 1$ conviennent.

b) $$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n = \mathrm{H}_\mathrm{N} - 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n+1} = \mathrm{H}_\mathrm{N} - 2 \sum_{\substack{3 \leqslant n \leqslant 2\mathrm{N}+1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n} = \mathrm{H}_\mathrm{N} - 2\left(\sum_{n=2}^{2\mathrm{N}+1} \frac{1}{n} - \sum_{\substack{2 \leqslant n \leqslant 2\mathrm{N} \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n}\right)$$
$$= \mathrm{H}_\mathrm{N} - 2(\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+1} - 1) + 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n} = 2\mathrm{H}_\mathrm{N} - 2\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+1} + 2.$$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = 2(\ln N + \gamma + o(1)) - 2(\ln 2N + 1 + \gamma + o(1)) + 2 = 2 + 2\ln\frac{N}{2N+1} + o(1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 2 - 2\ln 2$

Exercice 11 *En passant par la formule de Stirling*

Soit : $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \left(\dfrac{n!}{(2n)!}\right)^{1/n}$.

1. a) Montrer que : $\left(u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \text{ et } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\right) \Rightarrow \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

b) Montrer que : $\ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1)$.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_n u_n$?

Solution (**Ex.11** – *En passant par la formule de Stirling*)

1. a) $\dfrac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \dfrac{\ln\left((u_n/v_n)\times v_n\right)}{\ln(v_n)} = \dfrac{\ln(u_n/v_n)}{\ln(v_n)} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

b) Par la formule de Stirling, $\ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1)$.

2. $\ln(u_n) = -\ln n + (1 - 2\ln 2) + o(1)$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{1-2\ln 2}\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{4n}$, d'où la divergence de la série.

Exercice 12 *Sinus et cosinus*

Nature des séries

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{|\sin n| + |\cos n|}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{|\sin n| + |\cos n|}{n^2}.$$

Solution (**Ex.12** – *Sinus et cosinus*)

- $\dfrac{|\sin n| + |\cos n|}{n} \geqslant \dfrac{\sin^2 n + \cos^2 n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$: la série diverge.
- $\dfrac{|\sin n| + |\cos n|}{n^2} \leqslant \dfrac{2}{n^2}$: la série converge.

Exercice 13 *Comparaison de sommes et d'intégrales*

Pour $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[$, on pose : $\forall n \geqslant 1, \quad u_n(x) = \dfrac{1}{n(n+x)}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge.

Dans la suite, on pose, pour $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[$, $\mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Soit $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[$ et $f : [\,1\,;+\infty\,[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{t(t+x)}$.

a) Montrer que f est intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

b) Justifier que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

c) En déduire un encadrement explicite (i.e. sans intégrale) de $\mathrm{S}(x)$.

3. En déduire un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution (**Ex.13** – *Comparaison de sommes et d'intégrales*)

1. $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ (ou "$\leqslant$", ou "O"...) permet de prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge.

2. a) $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ assure que f est intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

b) Il s'agit d'une comparaison série/intégrale, possible par la décroissance de f.

On prouve d'abord $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant u_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$.

On somme la partie gauche pour n de 1 à $+\infty$ (les convergences ont déjà été prouvées) : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x)$.

On somme la partie droite pour n de 2 à $+\infty$ (les convergences ont déjà été prouvées) : $\mathrm{S}(x) - u_1(x) \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Et comme $u_1(x) = f(1)$, on obtient le résultat voulu.

c) On peut décomposer : $\dfrac{1}{t(t+x)} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}\right)$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\ln t - \ln(t+x)\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}\left[\ln\frac{t}{t+x}\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

3. On vérifie sans peine que $\dfrac{1}{1+x} = o\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$.

On pense alors que $\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ ce que l'on prouve en divisant l'encadre-

ment précédent :
$1 \leqslant \dfrac{x\mathrm{S}(x)}{\ln(1+x)} \leqslant \dfrac{x}{(1+x)\ln(1+x)} + 1$. Le majorant tend vers 1 : les gendarmes assurent $\dfrac{x\mathrm{S}(x)}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$...

Exercice 14 *Télescopage*

Convergence et calcul de la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Solution (**Ex.14** – *Télescopage*)

Voilà qui sent le télescopage à plein nez, donc le calcul de la somme partielle permettra au passage de justifier la convergence.

$$\mathrm{S_N} = \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - 2\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\mathrm{S_N} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=3}^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\mathrm{S_N} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 1 - \sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 15 *De la nécessité...*

Soit : $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que u_n et v_n sont équivalents.

2. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

3. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$.

Solution (**Ex.15** – *De la nécessité...*)

1. $\dfrac{v_n}{u_n} = 1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ car $(-1)^n = o(\sqrt{n})$.

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge par application directe du théorème de Leibniz : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_n$ décroît et tend vers 0.

3. Malgré l'équivalence, le critère ne s'applique car le signe n'est pas constant. $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$, or $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge mais $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ diverge.