

Exercice 1 Déterminants élémentaires

Calculer sous forme factoriser

$$1. \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix};$$

$$2. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix};$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} \quad (\text{on pourra commencer par retrancher la première colonne aux autres});$$

$$4. \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Solution (Ex.1 – Déterminants élémentaires)

1. $2abc$.
2. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca))$.
3. $-4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \sin \frac{b-c}{2}$.
4. $abc(a-b)(a-c)(b-c)$.

Exercice 2 Par récurrence

$$\text{Calculer par récurrence } D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Solution (Ex.2 – Par récurrence)

$$D_n = D_{n-2} \text{ et}$$

$$D_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Exercice 3 Par récurrence

$$\text{Calculer par récurrence } D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Solution (Ex.3 – Par récurrence)

$$D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2} \text{ et}$$

$$D_n = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Exercice 4 TridiagonalSoit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+z^2 & z & & (0) \\ & z & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & z \\ (0) & & & z & 1+z^2 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Solution (Ex.4 – Tridiagonal)

En développant suivant la première colonne puis la première ligne (stratégie tridiagonale) :

$$D_n = (1+z^2)D_{n-1} - z^2D_{n-2}.$$

Notons que cette relation est encore vérifiée pour $n=0$ en prenant $D_0=1$, car $D_1=1+z^2$ et $D_2=(1+z^2)^2-z^2$.

Suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$$x^2 - (1+z^2)x + z^2 = 0, \text{ de racines } 1 \text{ et } z^2.$$

- Premier cas : $z^2 \neq 1$.

Il existe a et b dans $\mathbb{C}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = a + bz^{2n}$.

$$\text{Avec } D_0 \text{ et } D_1, \text{ on obtient } \forall n \in \mathbb{N}, D_n = \frac{1 - z^{2n+2}}{1 - z^2}.$$

- Second cas : $z^2 = 1$.

Il existe a et b dans $\mathbb{C}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = a + bn$.Avec $D_0=1$ et $D_1=2$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = 1+n$.**Exercice 5** Déterminant de sommes

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Soit pour tout } k \in \llbracket 1; n \rrbracket S_k = \sum_{i=1}^k i.$$

Calculer
$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Solution (Ex.5 – Déterminant de sommes)

En effectuant successivement $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, ce déterminant vaut $n!$.

Exercice 6 Déterminant et racines n -ièmes de l'unité

Soit $n \geq 2$, $a \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & a & (0) \\ & \ddots & \ddots \\ (0) & \ddots & a \\ a & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Calculer $\det(M)$.
2. Déterminer le rang de M en fonction de a .

Solution (Ex.6 – Déterminant et racines n -ièmes de l'unité)

1. En décomposant la première colonne :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & a & (0) \\ & \ddots & \ddots \\ (0) & \ddots & a \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & (0) \\ & \ddots & \ddots \\ (0) & \ddots & a \\ a & & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} a^n.$$

2. $\det(M) = 0 \Leftrightarrow (-a)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, a = -e^{2ik\pi/n}.$

Dans ce cas, M_a possède une matrice extraite $\begin{pmatrix} 1 & a & (0) \\ & \ddots & \ddots \\ (0) & \ddots & a \\ & & 1 \end{pmatrix}_{[n-1]}$ de rang

$n-1$ donc est au moins de rang $n-1$.

Finalement :

$$\text{rg}(M_a) = \begin{cases} n-1 & \text{si } \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, a = -e^{2ik\pi/n}, \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 7 Matrices antisymétriques

Soit A une matrice antisymétrique d'ordre $2n+1$. Montrer que $\det(A) = 0$.
En est-il de même pour une matrice antisymétrique d'ordre pair ?

Solution (Ex.7 – Matrices antisymétriques)

$\det(A) = \det({}^t A) = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det(A) = -\det(A)$ donc $\det(A) = 0$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est un contre-exemple si l'ordre est pair...

Exercice 8 Déterminant et blocs

Soit $(A, B, C, D) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^4$ tel que $D \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $CD = DC$.

Montrer que : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

Solution (Ex.8 – Déterminant et blocs)

On cherche à trouver des relations entre matrices triangulaires par blocs, par exemple :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ? & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & 0 \\ ? & AD - BC \end{pmatrix}.$$

En prenant le premier « ? » égal à I_n :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & AD - BC \end{pmatrix}.$$

Alors $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \det(A) = \det(A) \det(AD - BC)$.

Et puisque $\det(A) \neq 0$, $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.