

Exercice 1 *Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$*

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit f définie sur E par

$$\forall (x, y, z) \in E, \quad f(x, y, z) = (2x - 3y + z, -x + 2y - z, -9x + 15y - 6z).$$

1. a) Vérifier que f est un endomorphisme de E .
b) Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$. f est-il un automorphisme ?
2. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de E . Déterminer la matrice M représentant f dans $\mathcal{B}$.
3. Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 3)$ et $w = (0, 1, 3)$ et $\mathcal{C} = (u, v, w)$.
Justifier que $\mathcal{C}$ est une base de E .
4. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
5. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.
6. Déterminer la matrice N représentant f dans $\mathcal{C}$.
7. Montrer que $\text{Vect}(u)$ et $\text{Vect}(v, w)$ sont deux sous-espaces de E stables par f .
8. Calculer N^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Solution (Ex.1 – Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$)

1. a) La linéarité est banale, f est un endomorphisme.
b) $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 1, 1))$ donc f n'est pas injective, donc f n'est pas un automorphisme.
 $\text{Im}(f) = \text{Vect}((-1, 1, 6), (-2, 1, 9))$.
On peut aussi dresser la matrice M de f dans la base canonique et vérifier que $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 2$ (ci-après).
2. $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -9 & 15 & -6 \end{pmatrix}$
3. Soit $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. $\text{rg}(P) = 3 = \dim E$ (à calculer) donc $\mathcal{C}$ est une base de E .
4. C'est la matrice P précédente.

$$5. \quad \mathcal{P}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. • On peut utiliser la formule de changement de base :

$$N = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- En calculant MP , on calcule les images de vecteurs représentés par les colonnes de P , i.e. de u, v et w :

$$MP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \text{ donc } f(u) = 0, f(v) = -v + 2w \text{ et } f(w) = -w \text{ ce}$$

qui permet d'écrire N .

7. • Soit $F = \text{Vect}(u)$. $f(u) = 0 \in F$ donc par linéarité de f , F est stable par f .
• Soit $G = \text{Vect}(v, w)$. $f(v) = -v + w \in G$ et $f(w) = -w \in G$, donc par linéarité de f , G est stable par f .

$$8. \quad \bullet \text{ Ecrivons } N = D + A \text{ avec } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et du}$$

coup : $\forall k \geq 2, A^k = 0$.

Puisque D et A commutent, par la formule du binôme,

$$N^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k D^{n-k} = D^n + nAD^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 2n(-1)^{n-1} & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

- On peut aussi calculer N^2, N^3 puis conjecturer son expression générale et démontrer le résultat par récurrence sur n .

Exercice 2 *Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$*

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit f définie sur E par

$$\forall (x, y, z) \in E, \quad f(x, y, z) = (-2y + z, x - 3y + z, x - 2y).$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E . Est-ce un automorphisme ?

2. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de E . Déterminer la matrice M représentant f dans $\mathcal{B}$.
3. Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 3)$ et $w = (0, 1, 3)$ et $\mathcal{C} = (u, v, w)$. Justifier que $\mathcal{C}$ est une base de E .
4. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$, puis celle de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$.
5. Déterminer la matrice N représentant f dans $\mathcal{C}$.
6. Montrer que $\text{Vect}(u, w)$ et $\text{Vect}(v)$ sont deux sous-espaces de E stables par f .
7. Calculer N^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Solution (Ex.2 – Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$)

1. La linéarité est banale, f est un endomorphisme.
 $\text{Ker } f = \{0\}$ donc f est injective, et comme E est de dimension finie, f est un automorphisme. On peut aussi dresser la matrice M de f dans la base canonique et vérifier que $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 3$ (ci-après).

$$2. M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soit $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. $\text{rg}(P) = 3 = \dim E$ (à calculer) donc $\mathcal{C}$ est une base de E .

4. • C'est la matrice P précédente.
 • Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. $\mathcal{P}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

5. • On peut utiliser la formule de changement de base :

$$N = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- En calculant MP , on calcule les images de vecteurs représentés par les colonnes de P , i.e. de u , v et w :

$$MP = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \text{ donc } f(u) = -u, f(v) = -v \text{ et } f(w) = u - w \text{ ce}$$

qui permet d'écrire N .

6. • Soit $F = \text{Vect}(u, w)$. $f(u) = -u \in F$ et $f(w) = u - w \in F$, donc par linéarité de f , F est stable par f .
 • Soit $G = \text{Vect}(v)$. $f(v) = -v \in G$ donc par linéarité de f , G est stable par f .

7. • Écrivons $N = -I_3 + A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et du coup : $\forall k \geq 2, A^k = 0$.

Puisque $-I_3$ et A commutent, par la formule du binôme,

$$N^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k (-I_3)^{n-k} = (-I_3)^n + nA(-I_3)^{n-1} = (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} nA.$$

- On peut aussi calculer N^2, N^3 puis conjecturer son expression générale et démontrer le résultat par récurrence sur n .

Exercice 3 Matrice d'un endomorphisme nilpotent

1. Soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à N .

- a) Calculer N^2 et N^3 . Que peut-on en déduire pour f ?
 On dit que f est *nilpotente d'indice (ou d'ordre) 3*.
- b) On pose $e_1 = (1, 0, 0)$. Montrer que $\mathcal{B} = (f^2(e_1), f(e_1), e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- c) Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$?
2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Solution (Ex.3 – Matrice d'un endomorphisme nilpotent)

1. a) $N^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ -2 & -6 & -6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_3$. Donc $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

b) En notant $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$\text{rg}(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})) = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \text{ donc } \mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

c) De $f^3(e_1) = 0$ car $f^3 = 0$, on tire immédiatement $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$.

Soit $\mathcal{B} = (f^{n-1}(e), f^{n-2}(e), \dots, f(e), e)$. $\mathcal{B}$ est une famille de $n = \dim(E)$ vecteurs. Il suffit qu'elle soit libre pour être une base. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre.

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$a_{n-1}f^{n-1}(e) + \dots + a_1f(e) + a_0e = 0 \quad (\heartsuit).$$

En composant $(\heartsuit)$ par f^{n-1} , il vient immédiatement $a_0f^{n-1}(e) = 0$ donc $a_0 = 0$ car $f^{n-1}(e) \neq 0$.

$(\heartsuit)$ devient alors $a_{n-1}f^{n-1}(e) + \dots + a_1f(e) = 0$.

En composant $(\heartsuit)$ par f^{n-2} , il vient immédiatement $a_1f^{n-1}(e) = 0$ donc $a_1 = 0$ car $f^{n-1}(e) \neq 0$.

En itérant, on a : $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $a_k = 0$. Donc $\mathcal{B}$ est une libre et par conséquent $\mathcal{B}$ est une base.

De $f^n(e) = 0$ car $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ vient alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Exemple de changement de base

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{C} = (1, 1 - X, (1 + X)^2)$.

1. Écrire les matrices de passage $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$, puis $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$.
2. Soit $A = X^2 + X + 1$. Donner les coordonnées de A dans $\mathcal{B}$ puis dans $\mathcal{C}$.
3. a) Soit $f : A \mapsto A + A' + A''$. Vérifier que f est un endomorphisme de E , puis donner la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
b) Déterminer, à l'aide de P et Q , la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$.
c) Calculer directement $f(1)$, $f(1 - X)$ et $f((1 + X)^2)$ et retrouver la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$.
4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{D} = (1, 1 + X, (1 + X)^2)$.
5. a) Montrer que $\mathbb{R}_0[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$ sont stables par f .
b) Montrer que $\mathbb{R}_0[X]$ est le seul sous-espace de dimension 1 de E stable par f .

Solution (Ex.4 – Exemple de changement de base)

$$1. P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $A = ((1+X)^2 + (1-X) - 1$ ou $Q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. a) $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $N = \text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1}MP = QMP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $f(1) = 1, f(1-X) = -X = (1-X) - 1, f(X^2 + 2X + 1) = X^2 + 4X + 5 = (X^2 + 2X + 1) - 2(1-X) + 6$.

4. $f(1) = 1, f(1+X) = X + 2 = 1 + (1+X), f((1+X)^2) = X^2 + 4X + 5 = (1+X)^2 + 2(1+X) + 2$, d'où $\text{mat}_{\mathcal{D}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\text{mat}_{\mathcal{D}}(f) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

5. a) • $\forall T \in \mathbb{R}_0[X], f(T) = T + T' + T'' = T \in \mathbb{R}_0[X]$.

• $\forall T \in \mathbb{R}_1[X], f(T) = T + T' + T'' = T + T' \in \mathbb{R}_1[X]$.

b) Soit F un sous-espace de E de dimension 1 et stable par f . Soit T tel que $F = \text{Vect}(T)$. Comme F est stable, $f(T) \in F$ donc il existe α tel que $f(T) = \alpha T$. En écrivant $T = aX^2 + bX + c$, on obtient

$$aX^2 + (b+2a)X + (c+b+2a) = \alpha(aX^2 + bX + c).$$

Identifions les coefficients de même degré.

Si $a \neq 0$, alors $\alpha = 1$, mais alors $b+2a = b$ donc $a = 0$: absurde. Donc $a = 0$.

Si $b \neq 0$, alors $\alpha = 1$, mais alors $c+b = c$ donc $b = 0$: absurde. Donc $b = 0$.

Donc T est constant et $F = \mathbb{R}_0[X]$.

Réciproquement, on sait que $\mathbb{R}_0[X]$ est stable par f .

Exercice 5 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit n un entier au moins égal à 2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi : E \longrightarrow E, M \longmapsto M - \text{tr}(M)I_n$.

1. a) Vérifier que φ est un endomorphisme de E .

b) Déterminer $\text{Ker}\varphi$.

c) φ est-il un automorphisme ?

2. a) Déterminer l'ensemble E_1 des matrices M telles que $\varphi(M) = M$.

Justifier qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E , préciser sa dimension.

b) Déterminer l'ensemble E_2 des matrices M telles que

$$\varphi(M) = (1-n)M.$$

Justifier qu'il s'agit d'un sous-espace de E , préciser sa dimension.

3. a) Justifier que E_1 et E_2 sont stables par φ , et supplémentaires.

b) Donner la matrice représentant φ dans une base obtenue en concaténant une base de E_1 et une base E_2 .

Solution (Ex.5 – Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

1. a) Par la linéarité de tr , on vérifie sans peine que φ est linéaire.

b) $M \in \text{Ker}\varphi \Rightarrow M = \text{tr}(M)I_n \Rightarrow \text{tr}(M) = \text{tr}(\text{tr}(M)I_n) \Rightarrow \text{tr}(M) = \text{tr}(M)\text{tr}(I_n) \Rightarrow \text{tr}(M) = n\text{tr}(M)$, et comme $n \neq 1, \text{tr}(M) = 0$.

Or $M = \text{tr}(M)I_n$ donc $M = 0$. $\text{Ker}\varphi = \{0\}$.

c) φ est un endomorphisme de E , de dimension finie n^2 . Comme φ est injectif (puisque $\text{Ker}\varphi = \{0\}$), φ est un automorphisme.

2. a) $\varphi(M) = M \Leftrightarrow M - \text{tr}(M)I_n = 0 \Leftrightarrow \text{tr}(M) = 0 \Leftrightarrow M \in \text{Ker}(\text{tr})$.

$E_1 = \text{Ker}(\text{tr})$, comme tout noyau, c'est un sous-e.v. de E . Comme tr est une forme linéaire non nulle ($\text{tr} : E \rightarrow \mathbb{R}$), $\text{Im}(\text{tr}) = \mathbb{R}$, $\text{rg}(\text{tr}) = 1$, et par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(\text{tr})) = \dim E - \text{rg}(\text{tr})$, donc $\dim(E_1) = n^2 - 1$.

b) $\varphi(M) = (1-n)M \Leftrightarrow M - \text{tr}(M)I_n = (1-n)M \Leftrightarrow \frac{\text{tr}(M)}{n}I_n = M$.

Donc : $M \in E_2 \Rightarrow M \in \text{Vect}(I_n)$.

Réciproquement, si $M \in \text{Vect}(I_n)$, en écrivant $M = \alpha I_n$, $\frac{\text{tr}(M)}{n}I_n = \frac{\alpha n}{n}I_n = \alpha I_n = M$ donc $M \in E_2$.

Donc $E_2 = \text{Vect}(I_n)$, sous-espace vectoriel de dimension 1 de E .

3. a) On a déjà $\dim(E_1) + \dim(E_2) = n^2 = \dim(E)$.

Soit $M \in E_1 \cap E_2$. Alors $\text{tr}(M) = 0$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha I_n$.

Alors $0 = \text{tr}(M) = \text{tr}(\alpha I_n) = \alpha \text{tr}(I_n) = \alpha n$, donc $\alpha = 0$ puisque $n \neq 0$.

Donc $M = 0$.

- b) Soit $\mathcal{B} = (A_1, \dots, A_{n^2-1}, B)$ une base de E avec $A_i \in E_1$ pour $1 \leq i \leq n^2 - 1$ et $B \in E_2$. Alors

$\forall i \in \llbracket 1; n^2 - 1 \rrbracket, \varphi(A_i) = 1 \times A_i$ et $\varphi(B) = (1 - n)B$.

Du coup, la matrice de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ représentant φ est la matrice diagonale :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \text{diag}(1, \dots, 1, 1 - n)$$

Exercice 6 Rang et trace d'un projecteur

Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n tel que :

$$p \circ p = p.$$

- a) Démontrer que $\text{Im}(p) = \{u \in E, p(u) = u\}$.
b) Démontrer que $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont supplémentaires.
- Montrer que $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$.

Solution (Ex.6 – Rang et trace d'un projecteur)

- a) • $\forall u \in E, (u = p(u)) \Rightarrow (u \in \text{Im}(p))$.
• Soit $u \in \text{Im}(p)$. Alors : $\exists v \in E, p(v) = u$.
Donc $p(u) = p^2(v) = p(v) = u$.
b) • Soit $u \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$. Comme $u \in \text{Im}(p), p(u) = u$. Comme $u \in \text{Ker}(p), p(u) = 0$. Donc $u = 0$. Bilan : $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0\}$, l'inclusion réciproque étant évidente (pour mémoire, $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels E ...). Ainsi, $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont en somme directe.
• Par le théorème du rang : $\dim(\text{Ker}(p)) + \dim(\text{Im}(p)) = \dim(E)$.
Conclusion : $\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E$

- Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_{\dim(\text{Im}(p))} & 0 \\ \hline 0 & 0_{\dim(\text{Ker}(p))} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_{\text{rg}(p)} & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-\text{rg}(p)} \end{array} \right)$$

Par conséquent, $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$.

Exercice 7 Trace et crochets

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$AB - BA = I_n ?$$

Solution (Ex.7 – Trace et crochets)

$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$ et $\text{tr}(I_n) = n$. Comme $n \neq 0$, il est impossible que $AB - BA = I_n$...

Exercice 8 Matrices particulières

Soit n un entier naturel au moins égal à 2. Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &= \{M \in E, M^T = M\}, \mathcal{A}_n = \{M \in E, M^T = -M\}, \\ \mathcal{I}_n &= \{(m_{i,j}) \in E, (i \leq j) \Rightarrow m_{i,j} = 0\} \text{ et} \\ \mathcal{D}_n &= \{(m_{i,j}) \in E, (i \neq j) \Rightarrow m_{i,j} = 0\}. \end{aligned}$$

- Les sous-espaces suivants sont-ils supplémentaires dans E :
(i) $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$? (ii) $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{I}_n$? (iii) $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{I}_n$?
- Montrer que : $\mathcal{A}_n, \mathcal{I}_n$ et $\mathcal{D}_n$ sont supplémentaires dans E .

Solution (Ex.8 – Matrices particulières)

- (i) Analyse – Soit $M \in E$. Supposons qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n$ et $A \in \mathcal{A}_n$ telles que $M = S + A$. Alors $M^T = S - A$, et du coup

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) \text{ et } A = \frac{1}{2}(M - M^T).$$

Synthèse – Soit $M \in E$, soit $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. On vérifie sans problème que S et A sont respectivement symétrique et antisymétrique. Et l'analyse assure l'unicité de la décomposition.

$$\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = E.$$

- (ii) Analyse – Soit $M \in E$. Supposons qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n$ et $B \in \mathcal{I}_n$ telles que $M = S + B$. Alors :

$$\forall i \leq j, s_{i,j} = m_{i,j}, b_{i,j} = 0, \forall i < j, s_{i,j} = m_{j,i}, b_{i,j} = m_{i,j} - m_{j,i}.$$

Synthèse – Soit $M \in E$, soit S et B définie par les relations précédentes. On vérifie sans problème que S et A sont respectivement symétrique et strictement inférieure. Et l'analyse assure l'unicité de la décomposition.

$$\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{I}_n = E.$$

(iii) $I_n \notin \mathcal{A}_n$ et $I_n \notin \mathcal{I}_n$ donc $\dots \mathcal{A}_n + \mathcal{I}_n \neq E$.

$\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{I}_n$ ne sont pas supplémentaires.

2. On montrer successivement que :

$\mathcal{I}_n \cap \mathcal{D}_n = \{0\}$ (strictement inférieure et diagonale ... donc nulle)

$\mathcal{A}_n \cap (\mathcal{I}_n + \mathcal{D}_n) = \{0\}$ (antisymétrique et inférieure ... donc nulle)

Donc la somme est directe.

Soit $M \in E$. On pose :

$D = \text{diag}(m_{1,1}, \dots, m_{n,n}) \in \mathcal{D}_n$,

$A \in E$ telle que : $\forall i < j, a_{i,j} = m_{i,j}$ et $a_{j,i} = -m_{i,j}$ et $\forall i, a_{i,i} = 0$, de sorte que $A \in \mathcal{A}_n$,

$B \in E$ telle que : $\forall i \leq j, b_{i,j} = 0$ et $\forall i > j, b_{i,j} = m_{i,j} - m_{j,i}$, de sorte que $B \in \mathcal{I}_n$.

Alors $M = D + A + B$.

Donc $E = \mathcal{A}_n + \mathcal{I}_n + \mathcal{D}_n$.

Ainsi ces trois sous-espaces sont supplémentaires dans E .

Exercice 9 L'endomorphisme « transposition »

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M \mapsto {}^tM$.

Déterminer f^2 , $\text{Im}(f)$, $\text{Ker}(f)$, $\text{rg}(f)$, $\text{tr}(f)$ et $\det(f)$.

Solution (Ex.9 – L'endomorphisme « transposition »)

$f^2 = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, donc f est un automorphisme involutif ($f^{-1} = f$), donc $\text{Im}(f) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Ker}(f) = \{0\}$, $\text{rg}(f) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$.

Dans une base obtenue en concaténant une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(K)$ des matrices symétriques, de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, et une base du sous-

espace vectoriel $\mathcal{A}_n(K)$ des matrices antisymétriques, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, qui sont supplémentaires, la matrice de f est $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ et :

$$\text{tr}(f) = \frac{n(n+1)}{2} \times 1 + \frac{n(n-1)}{2} \times (-1) = n,$$

$$\det(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

1. Polynôme minimal

Soit $n \geq 2$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Justifier que la famille $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$ est liée.

b) En déduire l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(A) = 0$.

Un tel polynôme est qualifié de « polynôme annulateur de A ».

c) Soit $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N} / \exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \text{ tel que } P(A) = 0 \text{ et } \deg(P) = n\}$.

Justifier qu'il existe $d \stackrel{\text{def}}{=} \min(\mathcal{D})$, et qu'il existe un polynôme μ_A unitaire de degré d tel que $\mu_A(A) = 0$.

d) Montrer que, si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de A , alors il existe Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q\mu_A$.

e) Montrer que μ_A , défini en 1.c), est unique.

f) En déduire que l'ensemble $\mathcal{Z}(A)$ des polynômes annulateurs de A est :

$$\mathcal{Z}(A) = \{Q\mu_A, Q \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Ce polynôme est qualifié de « polynôme minimal de A ».

2. Un polynôme divisible par son dérivé

Soit P un polynôme unitaire (donc non nul) de $\mathbb{K}[X]$ tel qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$XP' = \alpha P.$$

a) Montrer que $\alpha = \deg P$.

b) On suppose que P' possède une racine β non nulle d'ordre de multiplicité μ .

i – Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine β de XP' ?

ii – Justifier que β est racine de P . Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine β de P ?

iii – En déduire que $P = X^\alpha$.

3. Application à une équation matricielle

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$AB - BA = A.$$

a) Que peut-on dire de $\text{tr}(A)$?

b) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$A^k B - B A^k = k A^k.$$

c) Justifier que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(A)B - B P(A) = A P'(A).$$

d) En déduire que $\mu_A = X^d$. Que peut-on dire de A ?

e) Donner un exemple de deux matrices non nulles A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ vérifiant $AB - BA = A$.

Solution (Ex.9 – L'endomorphisme « transposition »)

1. Polynôme minimal

- a) La famille $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$ est liée car elle compte $n^2 + 1$ vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n^2 .
- b) Par conséquent, il existe $n^2 + 1$ coefficients $(a_k)_{0 \leq k \leq n^2}$ non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0$. Avec $P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$, on a $P(A) = 0$.
- c) $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{K}[X]/P(A) \text{ et } \deg(P) = n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle admet un plus petit élément $d \stackrel{\text{déf.}}{=} \min(\mathcal{D})$.
Il existe donc (au moins) un polynôme Π de degré d tel que $\Pi(A) = 0$.
Soit a_d le coefficient dominant de Π . Alors $\mu_A \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{a_d} \Pi$ convient.
- d) Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de A . Effectuons la division euclidienne de P par $\mu_A : P = Q\mu_A + R$ avec $\deg(R) < d$.
Alors $R(A) = P(A) - Q(A)\mu_A(A) = 0$. Donc R est un polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à d . Par définition de d , $R = 0$.
Donc il existe bien Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q\mu_A$.
- e) Réciproquement, si $P = Q\mu_A$, alors $P(A) = 0$.
On en déduit bien que : $\mathcal{Z}(A) = \{Q\mu_A, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

2. Un polynôme divisible par son dérivé

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ tel qu'il existe α dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$XP' = \alpha P.$$

- a) Soit d le degré de P . Le coefficient dominant de XP' est d et celui de αP est α donc $\alpha = d = \deg(P)$.
- b) On suppose que P' possède une racine β non nulle d'ordre de multiplicité μ .
- i – L'ordre de multiplicité de la racine β de XP' est encore μ (β n'étant pas racine de X).
- ii – $P(\beta) = \beta P'(\beta) = 0 : \beta$ est racine de P . L'ordre de multiplicité de la racine β de P est :
- $\mu + 1$ par la propriété liant multiplicité et dérivation,
 - μ par l'égalité $P = XP'$...
- d'où PROBLÈME!!!

Donc P' ne possède par de racine non nulle.

- iii – L'unique racine de P' est 0, et de multiplicité $d - 1 = \alpha - 1$. Donc $P' = \alpha X^{\alpha-1}$. Donc $P = X^\alpha + c$. Or $P(0) = 0P'(0) = 0$. Donc $c = 0$ et $P = X^\alpha$.

3. Application à une équation matricielle

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$AB - BA = A.$$

- a) $\text{tr}(A) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$.
- b) La propriété est vraie au rang $k = 0$ (et $k = 1$).
Supposons-la vraie à un rang k quelconque. Alors :
 $A^{k+1}B - BA^{k+1} = AA^k B - ABA^k + ABA^k - BAA^k = A(A^k B - BA^k) + (AB - BA)A^k = A A^k + AA^k = (k+1)A^{k+1}$.
Par récurrence, la propriété est vraie pour tout k de $\mathbb{N}$.
- c) Soit $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
 $P(A)B - BP(A) = \sum_{k \geq 0} a_k A^k B - B \sum_{k \geq 0} a_k A^k = \sum_{k \geq 0} a_k (A^k B - BA^k) = \sum_{k \geq 0} k a_k A^k = A \sum_{k \geq 1} k a_k A^{k-1} = AP'(A)$.
- d) Appliquons c) à $\mu_A : 0 = A\mu'_A(A)$. Donc $X\mu'_A \in \mathcal{Z}(A)$. Donc : $\exists Q \in \mathbb{K}[X], X\mu'_A = Q\mu_A$. En raison des degrés, Q est un polynôme constant, disons $Q = \alpha$.
Alors $X\mu'_A = \alpha\mu_A$ avec μ_A non nul et unitaire. Par 2., $\mu_A = X^d$.
Ainsi A est nilpotente (d'ordre de nilpotence d).

- e) Partons de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nilpotente et de trace nulle et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
 $AB - BA = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d-a = 1 \\ c = 0 \end{cases}$
 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

Exercice 10 Puissance d'un endomorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$

Soit $E = \mathbb{C}_2[X]$ et f l'application définie sur E par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = XP + P'(0)X - \frac{1}{2}P''(0)X^3.$$

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de E .
 b) Déterminer la matrice M représentant f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E .
 c) Déterminer le rang, le noyau et l'image de f .
2. Calculer A^n pour tout $n \geq 2$.
3. On définit l'application g sur E par

$$\forall P \in E, \quad g(P) = (P + P')(0) \times (X + X^2).$$

Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$f^n = g.$$

Solution (Ex.10 – Puissance d'un endomorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$)

1. a) • On montre sans problème la linéarité :
 $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (P, Q) \in E, f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.
 • On a bien, pour tout $P \in E, f(P) \in \mathbb{C}[X]$. A-t-on $f(P) \in \mathbb{C}_2[X]$?
 On remarque que :
 $f(1) = X \in \mathbb{C}_2[X]$,
 $f(X) = X^2 + X + 0 \cdot X^2 = X + X^2 \in \mathbb{C}_2[X]$,
 $f(X^2) = X^3 + 0 \cdot X - X^3 = 0 \in \mathbb{C}_2[X]$,
 donc par linéarité, pour tout P de $\mathbb{C}_2[X]$, $f(P) \in \mathbb{C}_2[X]$.
 On peut aussi raisonner en utilisant :
 $f(aX^2 + bX + c) = aX^3 + bX^2 + cX + bX - \frac{1}{2} \times 2aX^3 = (b + c)X + bX^2$.
 • Donc f est bien un endomorphisme de E .
- b) Les calculs précédents donnent $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- c) Déterminer le rang, le noyau et l'image de f .
 $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 2$, donc $\dim \text{Im}(f) = 2$, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \text{Vect}(X, X + X^2) = \text{Vect}(X, X^2)$ et $\dim \text{Ker}(f) = 1$, $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(X^2)$ puisque $f(X^2) = 0$.

2. On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A^2$, donc par récurrence : $\forall n \geq 2, A^n = A^2$.
3. • On vérifie sans problème que g est un endomorphisme de E .
 • $g(1) = X + X^2, g(X) = X + X^2$ et $g(X^2) = 0$ donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = A^2$.
 Comme $\forall n \geq 2, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^n) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$, on a : $\forall n \geq 2, f^n = g$.
 Ou de façon équivalente, deux endomorphismes sont égaux si et seulement si ils coïncident sur une base (par linéarité...).