

Exercice 1 *Se méfier des opérations algébriques, même simples !*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n) . La convergence est-elle uniforme ?
2. Étudier la limite simple de la suite (f_n^2) . La convergence est-elle uniforme ?
3. La suite (f_n^2) converge-elle uniformément sur tout segment de $[0; a]$ de $\mathbb{R}^+$?

Solution (Ex.1 – Se méfier des opérations algébriques, même simples !)

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = x$, donc la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}, \text{ donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f .

2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^2(x) = x^2$, donc la suite (f_n^2) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $f^2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, |f_n^2(x) - f^2(x)| = \left| \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \right|.$$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \stackrel{\text{déf.}}{=} n$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, |f_n^2(x_n) - f^2(x_n)| = \left| 2 + \frac{1}{n^2} \right| > 2$$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n - f\|_\infty > 2$ et $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ ne tend pas vers 0.

Ainsi la suite (f_n^2) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f^2 .

3. Soit $a \geq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; a], |f_n^2(x) - f^2(x)| = \left| \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \right|.$$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n - f\|_{\infty, [0; a]} = \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$ et $(\|f_n - f\|_{\infty, [0; a]})_n$ tend vers 0.

Ainsi la suite (f_n^2) converge uniformément sur tout segment $[0; a]$ vers f^2 .

Moralité : la convergence uniforme ne supporte pas nécessairement les opérations algébriques simples...

Prévisibilité de la situation : de l'identité $f_n^2 - f^2 = (f_n - f)(f_n + f)$, on pressent que pour que $\|f_n^2 - f^2\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$, mieux vaut maîtriser $\|f_n + f\|_\infty$, ce qui ici n'est le cas que sur des intervalles bornés...

Exercice 2 *Réfuter une convergence uniforme*

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : [0; \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = n \sin(x) \cos^n(x)$.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n) .
2. Montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0; \pi/2]$:
 - a) – en calculant $\int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$;
 - b) – en montrant que $(\|f_n - 0\|_\infty)_n$ ne tend pas vers 0.
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a; \pi/2]$ avec $a > 0$.

Solution (Ex.2 – Réfuter une convergence uniforme)

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : [0; \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n \sin(x) \cos^n(x).$$

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n) .
 - Pour $x = 0$ ou $x = \pi/2$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 - Soit $x \in]0; \pi/2[$. Alors $\cos(x) \in]0; 1[$.
Or pour tout $q \in]0; 1[$, $nq^n = n \exp(n \ln q) = \frac{n}{e^{(-\ln q)n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $-\ln(q) > 0$.
Donc : $n \cos^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc : $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0; \pi/2]$.

$$2. a) \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx = \frac{n}{n+1} [-\cos^{n+1}(x)]_0^{\pi/2} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Si la convergence était uniforme, $\int_0^{\pi/2} f_n$ tendrait vers $\int_0^{\pi/2} 0 = 0$.

Donc la convergence n'est pas uniforme.

- b) En analysant la preuve de la convergence simple, on peut remarquer que si $q = 1$, $nq^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Débrouillons-nous pour que $\cos(x) \simeq 1$...

Soit $(x_n)_n$ une suite tendant vers 0, par exemple $x_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{n}$ ($\forall n \geq 1$).

$$n \ln(\cos(x_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n(\cos(x_n) - 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \frac{-x_n^2}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

Alors : $\cos^n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(0) = 1$ et $n \sin(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nx_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Ainsi :

$$\bullet \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [0; \pi/2],$$

$$\bullet \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = 1 \text{ donc : } \exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq N, f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Alors : $\forall n \geq N, \|f_n - f_0\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ et $(\|f_n - 0\|_\infty)_n$ ne tend pas vers 0.

Donc la convergence n'est pas uniforme.

3. Avec l'étude précédente, on pressent que le problème est en 0. Soit $a \in]0; \pi/2[$.
Par croissance de sin et décroissance de cos :

$\forall x \in [a; \pi/2], f_n(x) = n \sin(\pi/2) \cos^n a = n \cos^n a$ donc $\|f_n\|_{\infty, [a; \pi/2]} \leq n \cos^n a$.

Et comme $\cos a \in [0; 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cos^n a = 0$.

Par encadrement : $\|f_n\|_{\infty, [a; \pi/2]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a; \pi/2]$.

Exercice 3 *Permutation limite/intégrale : les 3 méthodes usuelles*

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f_n : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n \sin x}{n+x}$.

On se propose de montrer par trois méthodes à maîtriser que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^\pi f_n(x) dx \right) = \int_0^\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 2 \quad (\#)$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers $f \stackrel{\text{déf.}}{=} \sin$ sur $[0; \pi]$ et calculer $\int_0^\pi f(x) dx$.

2. Comme en première année.

En majorant $\left| \int_0^\pi f_n(x) dx - \int_0^\pi f(x) dx \right|$, montrer $(\#)$.

3. Par convergence uniforme.

Montrer que la convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme et justifier $(\#)$.

4. Par convergence dominée.

Proposer une fonction intégrable dominant toutes les f_n et conclure par le théorème de convergence dominée.

Solution (Ex.3 – Permutation limite/intégrale : les 3 méthodes usuelles)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f_n : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n \sin x}{n+x}$.

On se propose de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^\pi f_n(x) dx \right) = \int_0^\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 2 \quad (\#)$$

par les trois méthodes à maîtriser.

1. Soit $x \in [0; \pi]$.

$$f_n(x) = \frac{n \sin x}{n+x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n \sin x}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sin x,$$

donc (f_n) converge simplement vers $f \stackrel{\text{déf.}}{=} \sin$ sur $[0; \pi]$.

$$\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi \sin(x) dx = 2 \dots \text{si !}$$

2. Comme en première année.

En majorant

$$\left| \int_0^\pi f_n(x) dx - \int_0^\pi f(x) dx \right| \leq \int_0^\pi |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_0^\pi \frac{x \sin x}{n+x} dx \leq \int_0^\pi \frac{\pi}{n} dx$$

$$\left| \int_0^\pi f_n(x) dx - \int_0^\pi f(x) dx \right| \leq \frac{\pi^2}{n},$$

donc par encadrement : $\left| \int_0^\pi f_n(x) dx - \int_0^\pi f(x) dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui démontre $(\#)$.

3. Par convergence uniforme.

$\forall x \in [0; \pi] |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{x \sin x}{n+x} \leq \frac{\pi}{n}$, donc $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\pi}{n}$ et par encadrement : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme. Comme toutes ces fonctions f_n sont continues sur le segment $[0; \pi]$, la permutation intégrale/lime est licite, ce qui justifie $(\#)$.

4. Par convergence dominée.

$\forall x \in [0; \pi], \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x)| \leq \frac{n}{n+x} \leq 1$ donc $x \mapsto 1$ est une fonction intégrable dominant toutes les f_n .

Puisque les f_n et f sont continues, le théorème de convergence dominée s'applique et autorise la permutation intégrale/lime, ce qui justifie $(\#)$.

Exercice 4 *Quelques limites d'intégrales*

Justifier l'existence et déterminer les limites des suites suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-1}^1 \cos \frac{t}{3^n} dt;$
- $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{\pi/4} \tan^n t dt;$
- $\forall n \geq 3, w_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^n + t^{-n}}}.$

Solution (Ex.4 – Quelques limites d'intégrales)

Justifier l'existence et déterminer les limites des suites suivantes :

1. Les u_n existent car les intégrandes sont continues sur le segment $[-1; 1]$.

Soit, pour tout $n, f_n : t \mapsto \cos \frac{t}{3^n}$, qui est continue.

(f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto 1$.

Par convergence uniforme :

Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à $\cos$ avec $|\cos'| \leq 1$, on a :

$$\forall t \in [-1; 1] \left| \cos \frac{t}{3^n} - 1 \right| \leq 1 \times \left| \frac{t}{3^n} - 0 \right|, \text{ donc } \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{3^n}.$$

Par encadrement : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f_n \xrightarrow{\text{evu}} f$.

$$\text{Alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 f_n(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 1 dt = 2.$$

Par le théorème de convergence dominée :

Pour tout n , est dominée par la fonction constante f , intégrable. Par le théorème de convergence dominée, la permutation intégrale/limite est licite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 f_n(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 1 dt = 2.$$

2. Les v_n existent car les intégrandes sont continues sur le segment $[0; \pi/4]$.

Pour tout n , $f_n : t \mapsto \tan^n t$ est continue et dominée par la fonction constante intégrable sur $[0; \pi/4]$ $\varphi : t \mapsto 1$. De plus (f_n) converge simplement vers la

fonction continue par morceaux $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$. Par le théorème de

convergence dominée, la permutation intégrale/limite est licite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} f_n(t) dt = \int_0^{\pi/4} f(t) dt = \frac{\pi}{4}.$$

La convergence n'est pas uniforme $[0, \pi/4]$...

En effet, soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = \text{Arctan}(2^{-1/n})$ (obtenu en résolvant $\tan^n t = 1/2$).

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n \in]0; \pi/4[$ car $2^{-1/n} \in]0; 1[$ et $f_n(t) - f(t) = 1/2$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n - f\|_\infty \geq 1/2$... et $(\|f_n - f\|_\infty)$ ne tend pas vers 0.

3. $\forall n \geq 3$, $w_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^n + t^{-n}}}.$

- *Existence*

$f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{t^n + t^{-n}}$ est continue sur $]0; +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$ car $t^n + t^{-n} \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty$. Donc $\int_0^1 f_n$ existe.

$f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{n/2}}$. Par équivalence de fonctions positives, sachant que l'intégrale

de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n/2}}$ converge car $\frac{n}{2} > 1$, $\int_1^{+\infty} f_n$ converge.

Donc w_n existe pour tout $n \geq 3$.

- *Limite simple des f_n*

Si $t > 1$, $t^n + t^{-n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^n \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Si $t < 1$, $t^n + t^{-n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{t}\right)^n \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

$$\text{Si } t = 1, f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 1 \\ 1/\sqrt{2} & \text{si } t = 1 \end{cases}.$$

- *Domination*

$\forall t \geq 1$, $t^n + t^{-n} \geq t^n$ donc $|f_n(t)| \leq t^{-n/2}$,

$\forall t < 1$, $t^n + t^{-n} \geq t^{-n}$ donc $|f_n(t)| \leq t^{n/2}$.

Soit : $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} t^{3/2} & \text{si } t < 1 \\ t^{-3/2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$

φ est continue et intégrable sur $]0; +\infty[$ (faussement impropre sur $]0; 1]$ et comme intégrale de Riemann sur $[1; +\infty[$ car $n/2 > 1$).

- *Par le théorème de convergence dominée*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f = 0.$$

Exercice 5 Recherche d'un équivalent pour une suite d'intégrales impropres

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sous réserve d'existence,

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x/n)}{x(1+x^2)} dx.$$

1. a) Vérifier l'existence de J_n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
b) Montrer que la suite $(J_n)_n$ converge, vers 0.
2. Déterminer un équivalent de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution (Ex.5 – Recherche d'un équivalent pour une suite d'intégrales impropres)

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De la majoration classique : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq x$, on tire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{\sin(x/n)}{x(1+x^2)} \right| \leq \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+x^2}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ existe (et vaut $\frac{\pi}{2}$), J_n est absolument convergente, donc convergente.

- b) De la majoration précédente découle par l'inégalité triangulaire : $|J_n| \leq \frac{\pi}{2n}$.

Par encadrement, $(J_n)_n$ est une suite convergente, de limite nulle.

2. Déterminer un équivalent de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Heuristique : comme $\sin(x/n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x/n$, $\frac{\sin(x/n)}{x(1+x^2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n(1+x^2)}$, et on peut

penser que $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$... Établissons $nJ_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}(1+x^2)}$.

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est continue.
- $\forall x \in]0; +\infty[, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2}$, donc (f_n) converge simplement vers la fonction continue $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

- De la majoration $|\sin(x)| \leq |x|$ vient $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; +\infty[, |f_n(x)| \leq f(x)$, avec f continue et intégrable sur $]0; +\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Autrement dit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_n = \frac{\pi}{2}$, donc $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$.

Exercice 6 Recherche d'un équivalent pour une suite d'intégrales

Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$u_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n} dt$$

On pourra commencer par effectuer un changement de variable.

Solution (Ex.6 – Recherche d'un équivalent pour une suite d'intégrales)

Commençons par poser $x = 1 - \frac{t}{n}$, changement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; n]$:

$$u_n = n \int_0^1 \sqrt{1 + x^n} dx.$$

Par le théorème de convergence dominée : $\int_0^1 \sqrt{1 + x^n} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Il s'ensuit que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

Exercice 7 Convergence uniforme ?

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0; 1]$.

2. Que dire de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n \ln(x) dx$?

3. Retrouver cette limite en calculant explicitement l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x) dx$.

Solution (Ex.7 – Convergence uniforme ?)

1. Les f_n sont continues sur $[0; 1]$, nulles en 0 et en 1, et dérivables sur $]0; 1]$ avec $f'_n : x \mapsto x^{n-1}(n \ln(x) + 1)$ donc décroissantes sur $[0; e^{-1/n}]$ et croissantes sur $[e^{-1/n}; 1]$.

Donc $\|f_n\|_\infty = -f_n(e^{-1/n}) = \frac{1}{ne} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc : $f_n \xrightarrow{\text{cvu}} 0$.

2. Les f_n sont toutes continues sur le segment $[0; 1]$, le théorème de permutation en cas de convergence uniforme s'applique :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n \ln(x) dx$ existe et vaut $\int_0^1 0 dx = 0$.

3. Par intégration par parties :

$$\int_0^1 x^n \ln(x) dx = -\frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 8 CVU sur $\mathbb{R}$? Sur les segments ?

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $a \in]0; +\infty[$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-a; a]$.
3. Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment du type $[\alpha; \beta]$ où $\alpha < \beta$?

Solution (Ex.8 – CVU sur $\mathbb{R}$? Sur les segments ?)

1. • $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\sin(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$.

Donc $f_n \xrightarrow{\text{cvu}} 0$.

- $f_n(x) - 0 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{nx} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$: $f_n - 0$ n'est pas bornée, il n'y a pas convergence uniforme.

2. De : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin u| \leq |u|$ (IAF par exemple), on tire : $\forall x \in [-a; a] |f_n(x)| \leq \frac{a}{n}$, donc $\|f_n - 0\|_{\infty, [-a; a]} \leq \frac{a}{n}$, donc $\|f_n - 0\|_{\infty, [-a; a]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: il y a convergence uniforme sur $[-a; a]$.

3. Soit $a = \max(|\alpha|, |\beta|)$ de sorte que $[\alpha; \beta] \subset [-a; a]$.

Alors, par définition d'un « sup », $\|f_n - 0\|_{\infty, [\alpha; \beta]} \leq \|f_n - 0\|_{\infty, [-a; a]}$, donc par encadrement $\|f_n - 0\|_{\infty, [\alpha; \beta]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: il y a convergence uniforme sur tout segment.

Exercice 9 CVU de fonctions de classe 1

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$.

1. Montrer que chaque f_n est $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Solution (Ex.9 – CVU de fonctions de classe 1)

1. Par opérations algébriques élémentaires, les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ car $\sqrt{\cdot}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} = |x|$, donc (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f avec $f(x) = |x|$.
En multipliant par la quantité conjuguée : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{1}{n\sqrt{1/n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n - f\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Ainsi la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction $f = |\cdot|$...
3. ...qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ car $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 10 Convergence uniforme ?

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{(1+x)^{1+1/n}}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. a) Établir, pour tout $\alpha \in]0; 1]$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$.
b) La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme ?

Solution (Ex.10 – Convergence uniforme ?)

1. Soit $x \geq 0$. $\frac{1}{(1+x)^{1+1/n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x}$, la suite (f_n) converge simplement vers

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x}.$$

2. a) Soit $\alpha > 0$. Soit $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 + \alpha x - (1+x)^\alpha$. $g'(x) = \alpha(1 - (1+x)^{\alpha-1}) \geq 0$ car $\alpha - 1 \leq 0$. g est croissante et nulle en 0, donc positive sur $\mathbb{R}^+$.

- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$. $|f_n(x) - f(x)| \leq \left| \frac{1 - (1+x)^{1/n}}{(1+x)^{1+1/n}} \right| \leq \frac{(1+x)^{1/n} - 1}{(1+x)^{1+1/n}} \leq$

$$\frac{1}{n} \times \frac{1}{(1+x)^{1+1/n}} \leq \frac{1}{n}.$$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{1}{n},$$

et par encadrement $\|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 11 Convergence uniforme ?

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. Et sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$?

Solution (Ex.11 – Convergence uniforme ?)

1. Observons que chaque f_n est impaire. $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et pour $x \neq 0$,

$$f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

2. Chaque f_n est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'_n(x) = \frac{2^n(1 + n2^n x^2) - 2^n x(n2^{n+1}x)}{(1 + n2^n x^2)^2}$,

$f'_n(x)$ est du signe de $1 - n2^n x^2$. Soit $x_n = \sqrt{\frac{1}{n2^n}}$. Donc f_n est strictement croissante sur $[0; x_n]$ et strictement décroissante sur $[x_n; +\infty[$. Comme $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$, $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n(x_n) = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}}$. Par symétrie, puisque f_n est impaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n - 0\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

et il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $a > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq n_0, x_n \leq a$.

Par l'étude précédente, pour tout $n \geq n_0$, f_n est strictement décroissante sur $[a; +\infty[$ (et positive) donc $\|f_n - 0\|_{\infty, [a; +\infty[} = f_n(a)$. Or $f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (par

convergence simple de 1.).

Donc $\|f_n - 0\|_{\infty, [a; +\infty[} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et la convergence est uniforme sur $[a; +\infty[$.

Exercice 12 Limite d'une suite d'intégrales

Soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^n + e^x}$.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. Cette convergence est-elle uniforme ?
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx$.

Solution (Ex.12 – Limite d'une suite d'intégrales)

1. Soit $x \in [0; +\infty[$. $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0; 1[\\ \frac{1}{1+e} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$
2. Toutes les f_n sont continues mais leur limite simple ne l'est pas donc la convergence n'est pas uniforme.
3. • $(f_n) \xrightarrow{\text{cvs}} f$, • Les f_n et f sont continues par morceaux
• $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, |f_n(x)| \leq e^{-x}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e}.$$

Exercice 13 Limite et équivalent d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos x}{x+n}$ et $I_n = \int_0^\pi f_n(x) dx$.

1. a) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) .
b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

2. Montrer que $I_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solution (Ex.13 – Limite et équivalent d'une suite d'intégrales)

1. a) $\forall n \geq 1, \forall x \in [0; \pi], \left| \frac{\cos x}{x+n} \right| \leq \frac{1}{n}$, donc : $\forall n \geq 1, \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$.

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$, donc $f_n \xrightarrow{\text{cvu}} 0$.

- b) Par **convergence uniforme sur un segment de fonctions continues**, le théorème de permutation donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^\pi 0 dx = 0.$$

2. Il s'agit de montrer que $nI_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On pose : $\forall n \geq 1, g_n = n f_n : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n \cos(x)}{n+x}$.

On a : $g_n \xrightarrow{\text{cvs}} \cos$, et on peut montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g_n(x) dx = \int_0^\pi \cos(x) dx = 0$

soit :

- parce que $g_n \xrightarrow{\text{cvu}} \cos$ (par exemple $\|g_n - \cos\|_\infty \leq \frac{\pi}{n}$);
- parce que le théorème de convergence dominée s'applique (par exemple $\forall n \geq 1, \forall x \in [0; \pi], |g_n(x)| \leq 1$... intégrable sur $[0; 1]$).

Ainsi : $nI_n = \int_0^\pi g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, i.e. $I_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 14 Limite d'une suite d'intégrales

Déterminer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2} dx$

Solution (Ex.14 – Limite d'une suite d'intégrales)

Soit, pour tout $n \geq 1, f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{-x/n}}{1+x^2}$.

- Pour tout $n \geq 1, f_n$ est continue.
- $f_n \xrightarrow{\text{cvs}} f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
- f est c.p.m.
- $\forall n \geq 1, \forall x \in [0; +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée,

☞ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2} dx$ existe ;

☞ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2} dx$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{2}$

Exercice 15 Limite d'une suite d'intégrales

L'objectif de l'exercice est de déterminer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^2} dx$.

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin^n(x)}{x^2}$.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.

2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $g_n = |f_n|$.

Établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x) dx$ existe et vaut 0.

3. Conclure.

Solution (Ex.15 – Limite d'une suite d'intégrales)

Notons que $\frac{\sin^n x}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{n-2}$ donc l'intégrale n'existe qu'à partir de $n \geq 2$ (pas de souci sur $]1; +\infty[$ car $\left| \frac{\sin^n x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ assure l'intégrabilité).

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin^n(x)}{x^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x = 2k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{N}, \\ \text{n'existe pas} & \text{si } x = (2k+1)\pi + \pi/2, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ n'existe pas.

Àïe, la suite (f_n) ne converge pas simplement.

2. Posons : $g_n = |f_n|$. Alors :

$$g_n \xrightarrow{\text{cvs}} g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = k\pi + \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(g vaut presque toujours nulle, sauf en des points isolés...)

- Pour tout $n \geq 2$, g_n est continue.

- $g_n \xrightarrow{\text{cvs}} g$.

- g est continue par morceaux.

- $\forall n \geq 2, \forall x \in]0; +\infty[, |g_n(x)| \leq \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; 1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$.

(Détail sur $]0; 1]$: l'inégalité $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin u| \leq |u|$ assure $\forall x \in]0; 1], g_n(x) \leq x^{n-2} \leq 1$.)

φ étant intégrable sur $]0; +\infty[$, par convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x) dx = \int_0^{+\infty} g(x) dx = 0.$$

Détail en cas de doute (calcul de l'intégrale d'une fonction c.p.m avec une infinité de morceaux) :

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx = \int_0^{\pi/2} 0 dx + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi+\pi/2}^{(k+1)\pi+\pi/2} 0 dx = 0$$

3. Revenons aux intégrales initiales grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \geq 2, \left| \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \right| \leq \int_0^{+\infty} g_n(x) dx.$$

$$\text{Or } \int_0^{+\infty} g_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc par encadrement : } \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 16 Équivalent d'une suite d'intégrales

Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} dx$.

Solution (Ex.16 – Équivalent d'une suite d'intégrales)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}$.

- Pour tout n , f_n est continue.

- $f_n \xrightarrow{\text{cvs}} f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$.

- f est continue.

- De $0 \leq \ln(1+u) \leq u$ pour $u \in \mathbb{R}^+$, on tire $\forall n \forall x, |f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$, fonction intégrable sur $]0; +\infty[$.

Par convergence dominée, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

En prenant ensuite $f_n = n g_n$, $g_n \xrightarrow{\text{cvs}} g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ avec les g_n et g continues, et $\forall n, |g_n| \leq g$ et g intégrable sur $]0; +\infty[$.

$$\text{Par convergence dominée, } n I_n = \int_0^{+\infty} g_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Donc } I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.$$

Exercice 17 L'intégrale se concentre sur $f(0)$

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n f(x)}{1+n^2 x^2}$.

1. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(u) du$ où $g_n : u \mapsto \frac{f(u/n)}{1+u^2}$.
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
4. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $[0; +\infty[$?

Solution (Ex.17 – L'intégrale se concentre sur $f(0)$)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}$.

1. Soit $n \geq 1$. f_n est continue, donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$, et il existe une constante M telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |f_n(x)| \leq \frac{nM}{n^2x^2} \leq \frac{M}{nx^2}.$$

Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ (Riemann $2 > 1$) donc I_n existe.

2. Posons $u : x \mapsto nx$, $\mathcal{C}^1$ strictement croissante sur $]0; +\infty[$ (car $n > 0$), donc :

$$I_n \stackrel{u=nx}{=} \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2} du = \int_0^{+\infty} g_n(u) du \text{ avec } g_n : u \mapsto \frac{f(u/n)}{1+u^2}.$$

3. • Pour tout n , g_n est continue ;
- $g_n \xrightarrow{\text{cvs}} g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2}$;
- g est continue ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in [0; +\infty[, |g_n(u)| \leq \frac{M}{1+u^2}$ avec $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$ intégrable.

Par convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} g(u) du = \frac{\pi}{2} f(0)$.

4. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $[0; +\infty[$?

À x fixé dans $]0; +\infty[$,

- si $f(x) \neq 0$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(x)}{nx^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,
- si $f(x) = 0$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Pour $x = 0$, $f_n(x) = nf(0)$,

- si $f(0) = 0$, $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,
- si $f(0) \neq 0$, $f_n(0)$ diverge vers $\pm\infty$ (précisément $\text{sign}(f(0)) \times \infty$).

Bilan : il y a convergence simple sur $[0; +\infty[$ si, et seulement si, $f(0) = 0$. Dans ce cas, la limite simple est la fonction nulle.