Exercice 1 *Modes de convergence*

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$ $\quad (n \geqslant 1,\ x \in \mathbb{R})$ **2.** $g_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$ $\quad (n \geqslant 1,\ x \in \mathbb{R})$

Solution (**Ex.1** – *Modes de convergence*)

1. $\forall x \in \mathbb{R},\quad |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ donc $||f_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, donc simplement.

2. $g_n(x) = \dfrac{1}{n+x^2}$ $\quad (n \geqslant 1,\ x \in \mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad |g_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$ avec $|g_n(0)| = \dfrac{1}{n}$ donc $||g_n||_\infty = \dfrac{1}{n}$. Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n$ ne converge pas normalement.

Comme à x fixé dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n(x)$ vérifie le théorème des séries alternées car la suite $\left(\dfrac{1}{n+x^2}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante de limite nulle. Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement.

De plus, le théorème donne la majoration :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\mathrm{R}_n(x)| \overset{\text{déf.}}{=} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{n+1+x^2} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent, $(||\mathrm{R}_n||_\infty)_n$ tend vers 0 et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformément, donc simplement.

3. $h_n(x) = \dfrac{x}{(1+n^2x)^2}$ $\quad (n \geqslant 0,\ x \in [\,0\,;+\infty\,[)$ ... **5.** ... puis $h_n'(x)$ (*cf.* **4.**)

Exercice 2 *CVN sur les segments*

Étudier la convergence normale sur $[\,0\,;+\infty\,[$, puis sur $[\,0\,;a\,]$ de : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$

Solution (**Ex.2** – *CVN sur les segments*)

1. Soit : $h_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$ $\quad (n \geqslant 0,\ x \in [\,0\,;+\infty\,[)$

Par croissance comparée : $\forall x \in [\,0\,;+\infty\,[,\quad h_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par convergence de la série exponentielle, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x)$ existe et vaut $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} = 1$. Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} h_n$ converge simplement vers la fonction constante $h : x \mapsto 1$.

Évaluons $||h_n||_\infty$.

$\forall x \in [\,0\,;+\infty\,[,\quad h_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}}{n!}(n-x)$: h_n est croissante sur $[\,0\,;n\,]$ et décroissante sur $[\,n\,;+\infty\,[$, avec $h_n(0) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} h_n(x) = 0$, donc $||h_n||_\infty = h_n(n) = \dfrac{n^n \mathrm{e}^{-n}}{n!}$.

Par l'équivalent de Stirling : $||h_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, donc puisque $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, par le critère des équivalents pour ces termes généraux positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} ||h_n||_\infty$ diverge et il n'y a pas convergence normale sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Cependant, il y a convergence normale sur tout segment $[\,0\,;a\,]$ car dès que $n \geqslant a$, $||h_n||_{\infty,[\,0\,;\,a\,]} = h_n(a) = \dfrac{a^n \mathrm{e}^{-a}}{n!}$, qui est le terme général d'une série exponentielle convergente.

Exercice 3 *Intégrale et somme*

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad f_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x & \text{si } x \in \,]\,0\,;1\,], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Justifier l'existence, puis calculer : $\quad f(x) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

2. Montrer que la convergence de la série des f_n est uniforme sur $[\,0\,;1\,]$.

3. En déduire l'égalité : $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Solution (**Ex.3** – *Intégrale et somme*)

Remarque préalable :

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x & \text{si } x \in \,]\,0\,;1\,], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

définit une fonction continue sur $[\,0\,;1\,]$.

1. • Pour $x=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\quad f_n(x)=0$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe et vaut 0.

• Pour $x\in[\,0\,;\,1\,[$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\quad f_n(x)=(-x^2)^{n+1}$ donc, puisque $-x^2\in\,]-1\,;\,1\,[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe et vaut $-x^2\times\dfrac{1}{1-(-x^2)}\ln n=\dfrac{-x^2\ln x}{1+x^2}$.

Finalement : pour tout $x\in[\,0\,;\,1\,]$, $f(x)\overset{\text{déf.}}{=}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)=\dfrac{-x^2\ln x}{1+x^2}$.

2. Soit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$.
Notons que $\mathrm{R_N}(0)=0$.
Par le critère spécial des séries alternées, pour $x\in\,]\,0\,;\,1\,]$,
$|\mathrm{R_N}(x)|=\left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x\right|\leqslant x^{2\mathrm{N}+4}\,|\ln x|$
Étudions $\varphi:\,]\,0\,;\,1\,]\to\mathbb{R}, x\mapsto x^{2\mathrm{N}+4}\,|\ln x|=-x^{2\mathrm{N}+4}\ln x$.
$\varphi(1)=0=\displaystyle\lim_{x\to0}\varphi(x)$, et $\forall x\in\,]\,0\,;\,1\,]$,
$\varphi'(x)=-(2\mathrm{N}+4)x^{2\mathrm{N}+3}\ln x-x^{2\mathrm{N}+3}=-x^{2\mathrm{N}+3}((2\mathrm{N}+4)\ln x+1)$, donc φ atteint son maximum en $\exp\left(-\dfrac{1}{2\mathrm{N}+4}\right)$.
Il vaut $-\exp\left(-\dfrac{2\mathrm{N}+4}{2\mathrm{N}+4}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2\mathrm{N}+4}\right)=\dfrac{1}{2\mathrm{e}(\mathrm{N}+2)}$
Donc $||\mathrm{R_N}||_\infty\leqslant\dfrac{1}{2\mathrm{e}(\mathrm{N}+2)}$, et par encadrement $||\mathrm{R_N}||_\infty\xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{}0$: la convergence est bien uniforme sur $[\,0\,;\,1\,]$.

3. Rappelons que $\displaystyle\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$ converge car $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^1\ln x\mathrm{d}x=-1-\mathrm{A}\ln\mathrm{A}+\mathrm{A}\xrightarrow[\mathrm{A}\to0^+]{}-1$, ainsi que $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ par équivalence à la première, et $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ qui est faussement impropre puisque $\dfrac{x^2\ln x}{1+x^2}\xrightarrow[x\to0]{}0$.
$\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ par linéarité.
Chaque f_n étant continue sur $[\,0\,;\,1\,]$ et la convergence étant uniforme, la permutation somme/intégrale est licite :
$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x\mathrm{d}x$
Une intégration par parties permettra de conclure :

$\displaystyle\int_0^1 x^{2n+2}\ln x\mathrm{d}x\overset{\text{IPP.}}{=}\left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\ln x\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{2n+3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2n+3}$
$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$, et enfin
$\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Exercice 4 *Étude de dérivabilité*

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $\mathbb{R}$, $\qquad f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{1+n^2}\mathrm{e}^{-nx}$,

et, sous réserve d'existence, $\qquad f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$.

1. Justifier que le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est $[\,0\,;\,+\infty\,[$.
2. Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}_f$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.
4. a) La convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}f_n'(x)$ est-elle normale sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$?
b) Et sur $[\,a\,;\,+\infty\,[$ pour $a>0$ quelconque ?

Solution (**Ex.4** – *Étude de dérivabilité*)

1. Si $x<0$, $(f_n(x))$ ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.
Si $x\geqslant0$, $\left(\dfrac{1}{1+n^2}\mathrm{e}^{-nx}\right)_n$ est une suite décroissante de limite nulle donc par le théorème de Leibniz, la série converge.
Donc $\mathcal{D}_f=[\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. D'après le théorème de Leibniz,
$\forall x\in[\,0\,;\,+\infty\,[, |\mathrm{R_N}(x)|=\left|\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}f_n(x)\right|\leqslant|f_{\mathrm{N}+1}(x)|\leqslant\dfrac{1}{1+(\mathrm{N}+1)^2}$, donc
$||\mathrm{R_N}||_\infty\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{N}^2}$ donc $||\mathrm{R_N}||_\infty\xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{}0$.
La convergence est uniforme et pour tout n, f_n est continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ donc f est continue sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

3. Pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ et on peut raisonner de même pour la majoration du reste :

$$\left\|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n'\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{N}, \text{ donc } \left\|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n'\right\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

La convergence étant uniforme, la somme f est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

4. a) $||f_n'||_\infty \geqslant |f_n'(0)| \geqslant \dfrac{n}{1+n^2}$ or $\dfrac{n}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente, donc par équivalence de termes généraux positifs, puis par minoration, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}||f_n'||_\infty$ diverge. La convergence n'est pas normale sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

b) Soit $a>0$. Alors (*attention à la place des valeurs absolues !*) :

$\forall x \geqslant a, |f_n'(x)|' = -\dfrac{n^2}{1+n^2}\mathrm{e}^{-nx} < 0$ donc :

$||f_n'||_\infty = |f_n'(a)| = \dfrac{n^2}{1+n^2}\mathrm{e}^{-na} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\mathrm{e}^{-a}\right)^n$,

et comme $\mathrm{e}^{-a} \in\,]\,0\,;1\,[$, la série géométrique de raison e^{-a} converge, donc par équivalence de termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}||f_n'||_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[}$ converge.

Il y a convergence normale sur tout intervalle $[\,a\,;+\infty\,[$ avec $a>0$... ce qui n'entraîne pas la convergence normale sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Exercice 5 *Série géométrique dérivée – I*

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^n$.

1. Rappeler le domaine de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

2. Soit $\mathrm{I} = \,]-1\,;1\,[$. On note $\mathrm{S} : \mathrm{I}\to\mathbb{R}, x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

a) Montrer que $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} = 1$. La convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est-elle normale ?

b) Soit $a\in\,]\,0\,;1\,[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[\,-a\,;a\,]$.

3. a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\mathrm{S}' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

b) Finalement, que vaut, pour $x\in\,]-1\,;1\,[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$?

Solution (**Ex.5** – *Série géométrique dérivée – I*)

1. Le domaine de convergence de la série *géométrique* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est $]-1\,;1\,[$.

2. a) $\forall x\in \mathrm{I}, |f_n(x)| \leqslant 1$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant 1$.

$\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = 1$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \geqslant 1$.

Donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} = 1$.

La convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ n'est pas normale puisque $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}||f_n||_{\infty,\mathrm{I}}$ diverge (grossièrement).

b) $\forall x\in[\,-a\,;a\,], |f_n(x)| \leqslant a^n$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant a^n$.

$\displaystyle\lim_{x\to a^-} f_n(x) = a^n$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \geqslant a^n$.

Donc $||f_n||_{\infty,[\,-a\,;a\,]} = a^n$.

La convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est normale sur $[\,-a\,;a\,]$ puisque $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a^n$ converge d'après la question 1 ($a\in\mathrm{I}$).

3. a) La convergence n'étant pas normale sur I, mais normale sur tout $[\,-a\,;a\,]\subset\mathrm{I}$, raisonnons d'abord sur $\mathrm{I}_a = [\,-a\,;a\,]$ où $a\in\,]\,0\,;1\,[$.

- Pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I_a.
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers S sur I_a.
- $\forall x\in\mathrm{I}_a, |f_n'(x)| = n\,|x|^{n-1} \leqslant na^{n-1}$ et $|f_n'(a)| = na^{n-1}$ donc $||f_n'||_{\infty,\mathrm{I}_a} = na^{n-1}$.

Par le critère de D'Alembert :

$$\left|\frac{(n+1)a^n}{na^{n-1}}\right| = \frac{n+1}{n}a \xrightarrow[n\to+\infty]{} a<1 \text{ donc } \sum_{n\geqslant 0} na^{n-1} \text{ converge.}$$

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur I_a. Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformément sur I_a.

Par ces trois points, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[\,-a\,;a\,]\subset\,]-1\,;1\,[$ et $\mathrm{S}' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$,

donc S est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{S}' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ sur $]-1\,;1\,[$

b) D'une part : $\forall x\in\,]-1\,;1\,[, \mathrm{S}'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.

D'autre part : $\forall x\in\,]-1\,;1\,[, \mathrm{S}(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (série géométrique !) donc $\mathrm{S}'(x) =$

$\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

$$\forall x \in \,]-1\,;\,1\,[\,, \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

4. En montrant que $\sum_{n\geqslant 0} f_n''$ converge normalement sur tout $\mathrm{I}_a = [\,-a\,;\,a\,] \subset \,]-1\,;\,1\,[$, on montre de même que S est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;\,1\,[$ et $\mathrm{S}''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$.
Techniquement : $||f_n''||_{\infty,\mathrm{I}_a} = n(n-1)a^{n-2}$ et la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)a^{n-2}$ relève du critère de D'Alembert.

Exercice 6 *Série géométrique dérivée – II*
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto nx^{n-1}$.

1. Déterminer le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

2. Soit $\mathrm{I} = \,]-1\,;\,1\,[$. On note $\mathrm{S} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a) Déterminer $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}}$. La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est-elle normale ?

b) Soit $a \in \,]\,0\,;\,1\,[$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[\,-a\,;\,a\,]$.

3. a) Montrer que S est continue sur I.
b) Déterminer la primitive de S sur I s'annulant en 0.

4. Finalement, que vaut, pour $x \in \,]-1\,;\,1\,[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$?

Solution (**Ex.6** – *Série géométrique dérivée – II*)

1. Si $x = 0$, $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 1} 0$ converge, vers 0.
Si $x \neq 0$:
$\left|\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \dfrac{n+1}{n}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$.
Par le critère de D'Alembert, la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.
Si $|x| = 1$, $|f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ($\neq 0$!) donc la série diverge grossièrement.
Le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est $]-1\,;\,1\,[$.

2. Soit $\mathrm{I} = \,]-1\,;\,1\,[$. On note $\mathrm{S} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a) $\forall x \in \mathrm{I}, |f_n(x)| \leqslant n$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant n$.
$\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = n$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \geqslant n$.
Donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} = n$.
La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ n'est pas normale puisque $\sum_{n\geqslant 1} ||f_n||_{\infty,\mathrm{I}}$ diverge grossièrement.

b) $\forall x \in [\,-a\,;\,a\,], |f_n(x)| \leqslant na^{n-1}$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \leqslant na^{n-1}$.
$\lim_{x\to a^-} f_n(x) = na^{n-1}$ donc $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} \geqslant na^{n-1}$.
Donc $||f_n||_{\infty,[\,-a\,;\,a\,]} = na^{n-1}$.
La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est normale puisque $\sum_{n\geqslant 1} na^{n-1}$ converge d'après la question 1 ($a \in \mathrm{I}$).

3. a) La série converge normalement sur tout $[\,-a\,;\,a\,] \subset \mathrm{I}$ donc S est continue sur I.
b) La primitive F de S sur I s'annulant en 0 est définie par

$$\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathrm{I}$. Par convergence normale donc uniforme sur le segment $[\,0\,;\,x\,]$ – ou le segment $[\,x\,;\,0\,]$ si $x < 0$ –, et continuité des fonctions f_n, on peut permuter somme et intégrale :
$\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$.

4. Pour $x \in \,]-1\,;\,1\,[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \mathrm{S}(x) = \mathrm{F}'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$