Exercice 1 *Détermination de rayon de convergence*

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n(z)$ dans les cas suivants :

1. $u_n(z) = \dfrac{n^2+1}{3^n} z^n$ **2.** $u_n(z) = \mathrm{e}^{-n^2} z^n$ **3.** $u_n(z) = \dfrac{\ln n}{n^2} z^n$

4. $u_n(z) = n! z^n$ **5.** $u_n(z) = \dfrac{n^n}{n!} z^{3n}$ **6.** $u_n(z) = \dfrac{\ln n}{\mathrm{e}^n} z^{2n+1}$

Solution (**Ex.1** – *Détermination de rayon de convergence*)

Je note a_n le coefficient de z^n dans $u_n(z)$.

1. $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{3n^2}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}|z|$ donc $\mathrm{R}=3$.

2. $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \mathrm{e}^{-2n-1}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\mathrm{R}=+\infty$.

3. $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|$ car $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)}$, donc $\mathrm{R}=1$.

4. $\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = (n+1)|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\mathrm{R}=0$ (divergence grossière dès que $z\neq 0$).

5. $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n}|z|^3 = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n |z|^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}|z|^3$ donc $\mathrm{R}=\mathrm{e}^{-1/3}$.

6. $|u_{n+1}(z)u_n(z)| = \dfrac{\ln(n+1)\mathrm{e}^n}{\ln(n)\mathrm{e}^{n+1}}|z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{|z|^2}{\mathrm{e}}$ donc $\mathrm{R}=\sqrt{\mathrm{e}}$.

Exercice 2 *Rayons de convergence abstraits*

On suppose que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $\mathrm{R}\in\,]0\,;+\infty[$.

Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$? Et de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$?

Solution (**Ex.2** – *Rayons de convergence abstraits*)

- Si $|z|<\sqrt{\mathrm{R}}$, alors $\left|z^2\right|<\mathrm{R}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^2)^n$ converge.

Si $|z|>\sqrt{\mathrm{R}}$, alors $\left|z^2\right|>\mathrm{R}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^2)^n$ diverge.

Le rayon de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$ est $\sqrt{\mathrm{R}}$.

- Soit $z\in\mathbb{C}$ quelconque. Soit $r\in\,]0\,;\mathrm{R}[$.

$\dfrac{a_n z^n}{n!} = a_n r^n \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{z}{r}\right)^n = o\left(a_n r^n\right)$ car $\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{z}{r}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Or $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ converge puisque $0<r<\mathrm{R}$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ converge absolument.

Le rayon de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ est infini.

Exercice 3 *Autour du logarithme - I*

Soit f définie, sous réserve d'existence, par : $f : x\mapsto \ln(x^2-5x+6)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2. Former son développement en série entière en 0 en donnant le rayon de convergence **a)** en factorisant x^2-5x+6 ; **b)** en décomposant f' sous la forme $\dfrac{\alpha}{2-x}+\dfrac{\beta}{3-x}$.

Solution (**Ex.3** – *Autour du logarithme - I*)

1. $x^2-5x+6=(2-x)(3-x)$ est strictement positif sur $]-\infty\,;2[\,\cup\,]3\,;+\infty[$ donc l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f=\,]-\infty\,;2[\,\cup\,]3\,;+\infty[$.

2. a) $\forall x\in\mathcal{D}_f$,

$f(x)=\ln(2-x)+\ln(3-x)=\ln\left(2(1-\frac{x}{2})\right)+\ln\left(3(1-\frac{x}{3})\right)=\ln(6)+\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)$.

Du développement : $\forall t\in\,]-1\,;1[\,, \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n}{n}$, on tire

$\forall x\in\,]-2\,;2[$ (de sorte que $\frac{x}{2}\in\,]-1\,;1[$ et $\frac{x}{3}\in\,]-1\,;1[$) :

$f(x)=\ln(6)-\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{2^n n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{3^n n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ avec :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\begin{cases}\ln 6 & \text{si } n=0\\ -\dfrac{1}{2^n n}-\dfrac{1}{3^n n}=-\dfrac{3^n+2^n}{6^n n} & \text{si } n\geqslant 1\end{cases}$$

Comme ce développement est obtenu en sommant une série entière de rayon 2 et une série entière de rayon 3, son rayon 2. (d'ailleurs il ne saurait dépasser 2 vu $\mathcal{D}_f$.

On peut aussi le vérifier par la règle de D'Alembert :

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3^{n+1}}{6\times 3^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$ donc $\mathrm{R}=2$...

b) f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et :

$\forall x\in\mathcal{D}_f, f'(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$

et $\dfrac{\alpha}{2-x}+\dfrac{\beta}{3-x}=\dfrac{\alpha(3-x)+\beta(2-x)}{(2-x)(3-x)}=\dfrac{-(\alpha+\beta)x+3\alpha+2\beta}{x^2-5x+6}$

d'où : $\forall x\in\mathcal{D}_f, f'(x)=-\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{1}{3-x}=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1-(x/2)}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{1-(x/3)}$.

Par la série géométrique, de rayon 1,

$$\forall x\in\,]-2\,;2\,[,\quad f'(x)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n \text{ avec :}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad b_n=-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}$$

Comme ce développement est obtenu en sommant une série entière de rayon 2 et une série entière de rayon 3, son rayon 2. (d'ailleurs il ne saurait dépasser 2 vu $\mathcal{D}_f$.

On peut aussi le vérifier par la règle de D'Alembert...

Primitivons, en observant que $f(0)=\ln(6)$.

$$\forall x\in\,]-2\,;2\,[,\quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \text{ avec :}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\begin{cases}\ln 6 & \text{si } n=0\\ \dfrac{b_{n-1}}{n}=-\dfrac{1}{2^nn}-\dfrac{1}{3^nn}=-\dfrac{3^n+2^n}{6^nn} & \text{si } n\geqslant 1\end{cases}$$

Exercice 4 *Autour du logarithme - II*

Former le développement en série entière en 0 de $f:x\mapsto\ln(x^2+x+1)$ en précisant le rayon de convergence de la série obtenue.

Solution (**Ex.4** – *Autour du logarithme - II*)

Le trinôme $\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1$ ne s'annulant pas, f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour $x\neq 1$, $x^2+x+1=\dfrac{1-x^3}{1-x}$ (somme géométrique), donc :

$$\forall x\in\,]-1\,;1\,[,\quad f(x)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$$

$$\text{avec } \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{3k}=-\dfrac{2}{n} & \text{si } n=3k\\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n=3k+1 \text{ ou } n=3k+2\end{cases}.$$

Par différence de séries entières de même rayon 1, ce développement est au moins de rayon 1.

Mais ceci n'est qu'un minimum...

Cependant, si $x>1$,(a_nx^n) ne converge pas vers 0 et la série diverge grossièrement, donc le rayon vaut exactement 1.

Exercice 5 *T.g. exponentiel du type $P(n)x^n/n!$*

Rayon de convergence et somme de : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)(n-2)}{n!}z^n$.

Solution (**Ex.5** – *T.g. exponentiel du type $P(n)x^n/n!$*)

On a : $(n+1)(n-2)=n^2-n-2=n(n-1)-2$ donc :

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{(n+1)(n-2)z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{(n^2-n-2)z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{n(n-1)z^n}{n!}-2\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}\frac{z^n}{(n-2)!}-2\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{z^n}{n!}=z^2\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-2}\frac{z^n}{n!}-2\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{z^n}{n!}$$

On reconnaît deux séries exponentielles convergentes pour tout z de $\mathbb{C}$, donc :

- le rayon de convergence est infini,
- $\forall z\in\mathbb{C},\quad \mathrm{S}(z)=(z^2-2)\mathrm{e}^z$.

Exercice 6 *Indéfiniment dérivable*

Montrer que la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution (**Ex.6** – *Indéfiniment dérivable*)

$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n$. Cette expression est encore valable pour $x=0$. Donc f est la somme d'une série entière de rayon infini. Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 *Somme d'une série numérique par les S.E.*

Existence et valeur de $\mathrm{S}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)3^n}$.

Solution (**Ex.7** – *Somme d'une série numérique par les S.E.*)

On observe que $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/3)^n}{n(n+1)}$ si elle existe. On s'intéresse donc à cette série entière.

$\forall x \neq 0, \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$ donc la série converge pour tout x tel que $|x|<1$ et diverge si $|x|>1$, donc $R = 1$.

$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\setminus\{0\}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $S = 1 - 2\ln\frac{3}{2}$.

Exercice 8 *Autour de* $(1+x)^\alpha$

1. Déterminer le développement en série entière sur $\left]-1\,;1\right[$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On donnera une expression explicite à l'aide de factorielles de ses coefficients a_n.
2. En déduire que $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ est développable en série entière en 0 en précisant le rayon de convergence et les coefficients de ce développement en fonction des a_n.

Solution (**Ex.8** – *Autour de* $(1+x)^\alpha$)

1. En prenant $\alpha = -1/2$ et $-x^2 \to x$ dans le DSE de $(1+x)^\alpha$:

   $\forall x \in \left]-1\,;1\right[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$ (Rappel : produit des pairs de 2 à $2n$: $2^n n!$, produit des impairs de 1 à $2n-1$: $\frac{(2n)!}{2^n n!}$...)

   Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et $a_{2n+1} = 0$.

2. $\forall x \in \left]-1\,;1\right[, f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec

   $b_0 = a_0$ et $\forall n \geqslant 1, b_n = a_n + a_{n-1} = \begin{cases} a_n & \text{si } n \text{ pair} \\ a_{n-1} & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$, cette dernière écriture étant valable pour $n = 0$...

Exercice 9 *Séries entières et primitives*

1. Former le développement en série entière en 0 de
$$f : \left]-1\,;1\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}.$$
2. Former le développement en série entière e, 0 de
$$g : \left]-1\,;1\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto 2\mathrm{Arctan}(x) + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
3. Établir le lien entre les deux questions précédentes.

Solution (**Ex.9** – *Séries entières et primitives*)

1. Par la série géométrique :

   $\forall t \in \left]-1\,;1\right[, \frac{1}{1-t^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{4n}$.

   Par primitivation, qui conserve le rayon :

   $\forall x \in \left]-1\,;1\right[, f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.
2. Grâce aux séries usuelles, $\forall x \in \left]-1\,;1\right[$:

   $g(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$

   Cherchons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   - Clairement : $a_0 = 0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ pair : $n = 2k$. Alors :
   $a_n = \frac{-1}{n} + \frac{1}{n} = 0$.
   On pouvait aussi remarquer que g est une fonction impaire...
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ impair : $n = 2k+1$. Alors :
   $a_n = 2 \times \frac{(-1)^k}{2k+1} + 2 \times \frac{1}{2k+1}$.
   (i) Si k est pair, $k = 2p$ (et $n = 4p+1$) $a_n = \frac{4}{4p+1} = \frac{4}{n}$.
   (ii) Si k est impair, $k = 2p+1$ (et $n = 4p+3$) $a_n = 0$.
   - Bilan : si $n \equiv 1 \mod 4$ (i.e. n peut s'écrire $n = 4p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$), alors $a_n = \frac{4}{n}$, et sinon, $a_n = 0$.

   Donc $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{4n+1}x^{4n+1}$.
3. Manifestement $g = 4f$, ce qui s'explique par

- $\dfrac{1}{1-X^4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+X^2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-X^2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+X^2} + \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{1}{1+X} + \dfrac{1}{1-X}\right)$

se primitive sur $]-1\,;\,1[$ en $\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(X) + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+X}{1-X} = \dfrac{1}{4}g(X)$...

- ou encore en dérivant g : $g'(x) = ... = \dfrac{4}{1-x^4}$.

Exercice 10 *Expressions fonctionnelles de séries entières*

Déterminer le rayon de convergence et donner une expression fonctionnelle de

1. $f(x) \overset{\text{déf.}}{=} \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2n+1}x^{2n} \quad (x\in\mathbb{R})$,

2. $g(x) \overset{\text{déf.}}{=} \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{n} \quad (x\in\mathbb{R})$,

3. $h(x) \overset{\text{déf.}}{=} \sum\limits_{n\geqslant 0} (2^n+3^n)x^{n} \quad (x\in\mathbb{R})$,

4. $j_p(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{n+p}{p} x^n$ où $p\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$.
On commencera par calculer $(1-x)j_p(x)$.

Solution (**Ex.10** – *Expressions fonctionnelles de séries entières*)

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. En posant $u_n = \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2$ donc par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de f est 1.

$\forall x\in\,]-1\,;\,1[,\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2}$

Par primitivation de série entière :

$\forall x\in\,]-1\,;\,1[,\quad \sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$,

donc $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x\in\,]-1\,;\,0\,[\,\cup\,]\,0\,;\,1\,[\\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. En posant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^n$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ donc par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de f est 1.

- On a : $\forall x\in\,]-1\,;\,1[\,, xg(x^2) = \mathrm{Arctan}(x)$ (développement de référence).

Donc pour $x\in\,]0\,;\,1[,\quad g(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

- Par 1. : $\forall x\in\,]-1\,;\,1[\,, xg(-x^2) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Donc pour $x\in\,]-1\,;\,0[\,, g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right)$.

- Pour $x=0$: $g(0)=1$.

3. Pour $x\neq 0$, $a_nx^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^nx^n$ donc $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3\,|x|$: la série converge si $|x|<1/3$ et diverge si $|x|>1/3$: $\mathrm{R} = \dfrac{1}{3}$.

Pour $x\in\,]-1/3\,;\,1/3\,[$,

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2x)^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(3x)^n$ car ces deux séries converge puisque $|2x|<1$ et $|3x|<1$.

$f(x) = \dfrac{1}{1-2x} + \dfrac{1}{1-3x}$.

4. $\dfrac{\dbinom{n+p+1}{p}}{\dbinom{n+p}{p}} = \dfrac{n+p+1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc le rayon de convergence vaut 1.

Soit $x\in\,]-1\,;\,1\,[$ et $p\in\mathbb{N}^*$,

$(1-x)f_p(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dbinom{n+p}{p}x^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dbinom{n+p}{p}x^{n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dbinom{n+p}{p}x^n - \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dbinom{n+p-1}{p}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dbinom{n+p}{p} - \dbinom{n+p-1}{p}\right)x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dbinom{n+p-1}{p-1}x^n$ par la formule de Pascal.

$(1-x)f_p(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dbinom{n+p-1}{p-1}x^n = f_{p-1}(x)$.

On obtient la formule de récurrence :

$\forall p\in\mathbb{N}, \forall x\in\,]-1\,;\,1\,[\,, f_{p+1}(x) = \dfrac{1}{1-x}f_p(x)$.

Comme $f_0(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n = \dfrac{1}{1-x}$,

$$\forall p\in\mathbb{N}, \forall x\in\,]-1\,;\,1\,[,\quad f_p(x) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}.$$

Remarque : on peut aussi procéder en dérivant f_p...

Exercice 11 *Fonctions DSE solutions d'équations différentielles*

1. Déterminer les fonctions f DSE sur un intervalle du type $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}\,[$ solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \qquad xy'' + 2y' + xy = 0.$$

Préciser R et donner une expression explicite de f.

2. Même question pour

$$(\mathrm{E}') : \qquad x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1.$$

Solution (**Ex.11** – *Fonctions DSE solutions d'équations différentielles*)

1. • Supposons que f est une fonction DSE solution de (E) sur un intervalle $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$.

Écrivons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En substituant le développement en série entière de f dans (E) et par unicité du développement, on obtient :

$$\begin{cases} \forall n \geqslant 0, (n+2)(n+3)a_{n+2} = a_n \\ 2a_1 = 0 \end{cases}$$

On obtient : $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)!}a_0$ et $a_{2p+1} = 0$.

Le rayon de convergence de cette série est infini, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}a_0 & \text{si } x \neq 0 \\ a_0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

• Réciproquement, soit $k \in \mathbb{R}$ quelconque fixé et $f_k : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}k & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f_k étant DSE sur $\mathbb{R}$, f_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On vérifie par le calcul que f satisfait l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier (en séparant $\mathbb{R}^*$ et 0).

• Bilan : les fonctions DSE solutions de (E) sont toutes les fonctions :

$$f_k : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}k & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \quad (\textit{quelconque}).$$

2. • Supposons que f est une fonction DSE solution de (E′) sur un intervalle $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$.

Écrivons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En substituant le développement en série entière de f dans (E′) et par unicité du développement, on obtient :

$$\begin{cases} \forall n \geqslant 2, (n+1)(n+2)a_n = a_{n-2} \\ 6a_1 = 0 \\ 2a_0 = 1 \end{cases}$$

On obtient : $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = \dfrac{1}{(2p+2)!}$ et $a_{2p+1} = 0$.

Le rayon de convergence de cette série est infini, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

• Réciproquement, soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f étant DSE sur $\mathbb{R}$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On vérifie par le calcul que f satisfait l'équation (E′) sur $\mathbb{R}$ tout entier (en séparant $\mathbb{R}^*$ et 0).

• Bilan : l'unique fonction DSE solution de (E′) est la fonction :

$$f_k : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 12 *En passant par l'exponentielle complexe*

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n+1)!}$.

Solution (**Ex.12** – *En passant par l'exponentielle complexe*)

$\forall x \neq 0, \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{|x|}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série converge pour tout x et $\mathrm{R} = +\infty$.

Pour $x = 0$, $f(x) = 1$.

Pour $x > 0$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n+1)!} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Pour $x < 0$: $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n \sqrt{-x}^{2n}}{(2n+1)!} \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n \sqrt{-x}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$