Exercice 1 *Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille de réels $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ telle que la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ soit orthonormale pour le produit scalaire défini par

$$\langle P, Q\rangle \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0).$$

Solution (**Ex.1** – *Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.*)
• Pour la bilinéarité et la symétrie, c'est tout bon par linéarité de la dérivation et de l'évaluation des polynômes, et par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.
• Pour la positivité, il faut et il suffit que les a_k soient tous positifs. En effet, si $a_k < 0$, $\left\langle X^k, X^k\right\rangle = (k!)^2 a_k < 0$, ce qui est interdit.
• Pour la définition, il faut et il suffit que les a_k soient tous strictement positifs. En effet, si $a_k = 0$, $\left\langle X^k, X^k\right\rangle = (k!)^2 a_k = 0$ bien que $X^k \neq 0$, ce qui est interdit.
• Pour $i \neq j$, $\left\langle X^i, X^j\right\rangle = 0$, et la base canonique est orthogonale.
• $\left|\left|X^k\right|\right|^2 = \left\langle X^k, X^k\right\rangle = (k!)^2 a_k$. Le seul choix qui rende orthonormale la base canonique est :

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!], \quad a_k = \frac{1}{(k!)^2}$$

Ainsi : $\langle P, Q\rangle \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2 *Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*
Soit $n \geqslant 1$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pose, pour A et B dans E, $\qquad \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tA.B)$.

1. Montrer que
$$\forall A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A, B\rangle = \sum_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2} a_{i,j} b_{i,j}.$$
2. Vérifier que $\langle .,. \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle une base orthonormale ?
4. Dans cette question, $n = 2$, $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \operatorname{Vect}(M_1, M_2)$.
  a) Donner une base orthonormale de F.
  b) Déterminer $F^\perp$.
  c) Déterminer $d(I_2, F) = \min\limits_{M\in F} ||M - I_2||$.
5. Soit Δ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales. Déterminer $\Delta^\perp$.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que : $\operatorname{Ker}({}^tAA) = \ker(A)$.

Solution (**Ex.2** – *Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)
1. Calculons explicitement $\langle A, B\rangle$ en fonction des coefficients de A et B.
$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ({}^tA)_{i,j}(B)_{j,i}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}b_{j,i}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i}b_{j,i}$$
ce qui est la somme voulue, quitte à permuter le nom des indices muets.
À retenir :
$\langle A, B\rangle$ est la somme des produits coefficient par coefficient des matrices A et B... exactement comme le produit canonique de $\mathbb{R}^n$.
En particulier, $\langle A, A\rangle = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2$ est la somme des carrés des coefficients de A.
2. $\langle .,. \rangle$ est bilinéaire car la transposition et la trace le sont.
$\langle .,. \rangle$ est symétrique car $\operatorname{tr}\big({}^tAB\big) = \operatorname{tr}\big({}^t\big({}^tBA\big)\big) = \operatorname{tr}\big({}^tBA\big)\big)$.
est positif, et ne s'annule que si tous les coefficients de A sont nuls, i.e. si $A = 0$.
$\langle .,. \rangle$ est positif et défini.
3. Comme vu plus haut, $\langle E_{i,j}, E_{k,\ell}\rangle$ est la somme des produits coefficient par coefficient des matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$.
Si $(i,j) \neq (k,\ell)$, le seul « 1 » des matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$ n'est pas au même endroit, donc tous les produits sont nuls, donc $\langle E_{i,j}, E_{k,\ell}\rangle = 0$
De plus, $||E_{i,j}||^2$ est la somme des carrés de ses coefficients, donc vaut 1.
Ainsi la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale.
4. Déterminer $\Delta^\perp$ (on pourra commencer par déterminer une base orthonormale de Δ). La famille $(E_{i,i})_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ est une base de Δ, orthonormale puisque extraite d'une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
• Première approche -
Alors, par complétion en une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{Vect}((E_{i,j})_{i\neq j})$ est le supplémentaire orthogonal de Δ...
• Seconde approche -
Si $A \in \Delta^\perp$, alors $A \perp E_{i,i}$ pour tout i. Or $\langle A, E_{i,i}\rangle = a_{i,i}$, donc $a_{i,i} = 0$ pour tout i.
• Bilan, par l'une ou l'autre approche -
$\Delta^\perp$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

5. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0$, donc $\ker(A) \subset \ker({}^tAA)$.
- ${}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^t(AX)(AX) = 0 \Rightarrow ||AX||^2 = 0 \Rightarrow AX = 0$, donc $\ker({}^tAA) \subset \ker(A)$.

Exercice 3 *Exemple de produit scalaire dans un espace de suites*

Soit $E = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \sum_{n\geqslant 1} u_n^2 \text{ converge}\}$.

1. Étudier si les suites x, y et z définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad z_n = \frac{(-1)^n}{n}$$
sont des vecteurs de E.

2. a) Justifier que, pour tous réels a et b, $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

b) Montrer que si u et v sont dans E, alors $\sum_{n\geqslant 1} u_n v_n$ converge.

c) En déduire que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que
$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R},\ (u,v) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$$
est un produit scalaire sur E.

Solution (**Ex.3** – *Exemple de produit scalaire dans un espace de suites*)

1. $\sum_{n\geqslant 0} x_n^2$ converge, $\sum_{n\geqslant 0} y_n^2$ diverge, $\sum_{n\geqslant 0} z_n^2$ converge, donc $x, z \in E$, $y \notin E$.

2. a) $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2+b^2-2|ab| \geqslant 0 \Rightarrow |ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n| \leqslant \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{2}v_n^2$ assure l'absolue convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n v_n$.

c) E est non vide (par 1.) et, pour $u \in E$ et $v \in E$,
$(\lambda u+v)_n^2 = (\lambda u_n+v_n)^2 = \lambda^2 u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + v_n^2$ assure la convergence par linéarité de $\sum_{n\geqslant 0}(\lambda u_n+v_n)^2$ donc $\lambda u + v \in E$

3. Pas de problème d'existence par 2.b). Linéarité, symétrie sans problème, positivité, définition non plus.

Exercice 4 *L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour minorer*

1. Quel est le minimum de $\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)$ pour $(a_i)_{i=1}^n \in (\mathbb{R}_+^*)^n$?

2. Quel est le minimum de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$ pour f continue strictement positive sur $[\,a\,;\,b\,]$?

Solution (**Ex.4** – *L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour minorer*)

1. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On pose : $x = \left(\frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $y = (\sqrt{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$. $\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) = ||x||^2\,||y||^2 \geqslant \langle x,y\rangle^2 = n^2$.
Ce minorant est atteint pour $a_1 = \cdots = a_n = 1$ par exemple.

2. On munit l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[\,a\,;\,b\,]$ du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Soit f continue strictement positive.
On pose $x = \sqrt{f}$ et $y = 1/\sqrt{f}$.
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = ||x||^2\,||y||^2 \geqslant \langle x,y\rangle^2 = \left(\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^2 = (b-a)^2$$
Ce minorant est atteint pour $f = 1$ par exemple, donc c'est un minimum.

Exercice 5 *Retrouver un produit scalaire à partir d'une norme*

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on désigne par x le triplet (x_1, x_2, x_3).

1. Soit $N : E \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3}$.
Prouver que N est une norme euclidienne sur E.

2. Déterminer une base orthonormale de E pour le produit scalaire associé à N.

Solution (**Ex.5** – *Retrouver un produit scalaire à partir d'une norme*)

1. Produit scalaire associé :
$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(N(x+y)^2 - N(x-y)^2\right) =$
$x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1$.
$\langle x,x\rangle = (x_1+2x_2+x_3)^2 + (x_2-2x_3)^2 + x_3^2$.

2. (u_1,u_2,u_3) avec $u_1 = (1;0;0)$, $u_2 = (-2;1;0)$ et $u_3 = (-5;2;1)$ est une orthonormale de E obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Exercice 6 *Étude d'une isométrie de $\mathbb{R}^3$*

Dans l'espace euclidien canonique $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{M} \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

1. a) Justifier que f est une isométrie.

b) Déterminer l'ensemble F des vecteurs de E fixes par f.

c) Déterminer une base orthonormale $\mathcal{C} = (u, v, w)$ de E telle que :

- (u) soit une base de F ;
- (v, w) soit une base de $\mathrm{F}^\perp$;
- $\mathcal{C}$ ait la même orientation que $\mathcal{B}$.

2. a) Justifier que $\mathrm{F}^\perp$ est stable par f.

b) Montrer que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix}$ où $\mathrm{B} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

c) A-t-on $\mathrm{B} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$?

Solution (**Ex.6** – *Étude d'une isométrie de* $\mathbb{R}^3$)

1. a) On vérifie que les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (ne pas oublier le "1/4" pour la norme des vecteurs !) donc $\mathrm{M} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et f est une isométrie.

b) Soit $(x, y, z) \in \mathrm{E}$.

$$f((x,y,z)) = (x,y,z) \Leftrightarrow (\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4\mathrm{M} - 4\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ -3x + 3y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) \in \mathrm{Vect}((1,1,0)).$$

Donc $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\big((1,1,0)\big)$.

c) Soit $(x, y, z) \in \mathrm{E}$.

$(x,y,z) \in \mathrm{F}^\perp \Leftrightarrow \big((x,y,z) \mid (1,1,0)\big) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$.

Donc $\mathrm{F}^\perp = \mathrm{Vect}\big((1,-1,0),(0,0,1)\big)$.

Prenons $u' = (1,1,0)$, $v' = (1,-1,0)$ et $w' = (0,0,1)$.

$\mathcal{C}' \overset{\text{déf.}}{=} (u', v', w')$ est une base orthogonale de E vérifiant

- (u') est une base de F ;
- (v', w') est une base de $\mathrm{F}^\perp$.

Mais $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}') = -2 < 0$. On permutant v' et w' on obtiendra une base directe.

Ainsi : $\mathcal{C} \overset{\text{déf.}}{=} (u; v; w) \overset{\text{déf.}}{=} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0); (0,0,1); \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)\right)$ convient.

- $\mathcal{C}$ ait la même orientation que $\mathcal{B}$.

2. a) Puisque $\forall t \in \mathrm{F}, f(t) = t$, F est stable par F. Comme f est une isométrie, $\mathrm{F}^\perp$ est aussi stable par f.

Sinon, on peut aussi vérifier que $f(v) \in \mathrm{Vect}(v, w)$ et $f(w) \in \mathrm{Vect}(v, w)$. C'est plus long...

b) $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E}$ est une décomposition en sous-espace stable donc $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$ est diagonale par blocs, et comme $\mathrm{F} = \mathrm{E}_1$, on peut écrire $\mathrm{N} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix}$ où $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $\mathcal{C}$ est une b.o.n. et f une isométrie donc ${}^t\mathrm{N}\mathrm{N} = \mathrm{I}_3$, or ${}^t\mathrm{N}\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t\mathrm{B} \end{pmatrix}$, donc ${}^t\mathrm{B}\mathrm{B} = \mathrm{I}_2$: $\mathrm{B} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

c) $\det(\mathrm{M}) = 1$, donc $\det(\mathrm{N}) = \det(f) = \det(\mathrm{M}) = 1$. Or $\det(\mathrm{N}) = \det(\mathrm{I}_1)\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{B})$, donc $\det(\mathrm{B}) = 1$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 7 *Exemples de matrices de projections orthogonales*

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire canonique) représenté par la matrice $\mathrm{M} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. Justifier que f est un projecteur orthogonal et préciser sur quel sous-espace a lieu cette projection.

2. Soit F le plan d'équation $x - y - z = 0$. Déterminer la matrice représentant la projection orthogonale de E sur F dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.

Solution (**Ex.7** – *Exemples de matrices de projections orthogonales*)

1. $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$ donc $f^2 = f$, donc f est un projecteur.

Plus précisément, f est le projecteur de E sur $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Im}f$ parallèlement à $\mathrm{E}_0 = \mathrm{Ker}f$.

On peut observer que $\mathrm{C}_1 - 2\mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_3 = 0$,

donc $\mathrm{rg}(f) = 2$, $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}((5,2,1),(2,2,-2))$ et $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Vect}((1,-2,-1))$.

Or $\langle (5,2,1),(1,-2,-1)\rangle = 0$ et $\langle (2,2,-2),(1,-2,-1)\rangle = 0$, donc $\mathrm{Im}f \perp \mathrm{Ker}f$.

Donc f est une projection orthogonale.

2. $\big((1,1,0);(1,0,1)\big)$ est une base de F, et $(u, v) \overset{\text{déf.}}{=} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0); \frac{\sqrt{6}}{6}(1,-1,2)\right)$ en est une base orthonormale.

On calcule les images des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ par la formule : $p_F(e_i) = (e_i \mid u)u + (e_i \mid v)v$.

Finalement : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p_F) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 *Étude d'un endomorphisme*

Soit n un entier au moins égal à 3. On travaille dans l'espace $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
On considère deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$ telle que (a, b) soit une famille orthonormale.
On définit sur E l'application f par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle a, x\rangle b - \langle b, x\rangle a.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.

2. a) Déterminer $\mathrm{Ker} f$.

b) Déterminer $\mathrm{Im} f$, en en précisant une base.

c) Justifier que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.

3. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle.$$

On dit que f est antisymétrique.

4. Que dire, pour tout $(x, y) \in E^2$, de $\langle f^2(x), y\rangle = -\langle x, f^2(y)\rangle$?
On dit que f^2 est symétrique.

Solution (**Ex.8** – *Étude d'un endomorphisme*)

1. $\forall x \in E, f(x) \in E$ puisque $a, b \in E$.
$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x + y) = \langle a, \lambda x + y\rangle b - \langle b, \lambda x + y\rangle a = \lambda(\langle a, x\rangle b - \langle b, x\rangle a) + (\langle a, y\rangle b - \langle b, y\rangle a) = \lambda f(x) + f(y)$.

2. a) Comme (a, b) est libre car orthonormale,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (\langle a, x\rangle = 0 \text{ et } \langle b, x\rangle = 0) \Leftrightarrow x \in (\mathrm{Vect}(a, b))^{\perp}.$$

$\mathrm{Ker} f = (\mathrm{Vect}(a, b))^{\perp}$.

b) $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Vect}(a, b)$ par définition de f. De plus, $f(a) = ||a||^2 b = b$ donc $b \in \mathrm{Im} f$, et $f(b) = -||b||^2 a = -a$ donc $a \in \mathrm{Im} f$. Donc $\mathrm{Vect}(a, b) \subset \mathrm{Im} f$.
$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(a, b)$.

c) $\mathrm{Ker} f = (\mathrm{Im} f)^{\perp}$ donc $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires (l'un est l'orthogonal de l'autre).

3. $\forall (x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}\langle f(x), y\rangle &= \langle \langle a, x\rangle b - \langle b, x\rangle a, y\rangle = \langle a, x\rangle \langle b, y\rangle - \langle b, x\rangle \langle a, y\rangle \\ &= \langle \langle b, y\rangle a, x\rangle - \langle \langle a, y\rangle b, x\rangle = \langle \langle b, y\rangle a - \langle a, y\rangle b, x\rangle = \langle -f(y), x\rangle \\ &= -\langle f(y), x\rangle = -\langle x, f(y)\rangle.\end{aligned}$$

On dit que f est antisymétrique.

4. Utilisons la question précédente.
$\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f \circ f(x), y\rangle = -\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, f \circ f(y)\rangle$
Donc $f \circ f$ est symétrique.

Exercice 9 *Orthogonalité des polynômes de Tchebychev*

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille de polynômes définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. a) Calculer T_2 et T_3.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de T_n.

2. a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

b) En déduire, pour n dans $\mathbb{N}^*$, les racines de T_n.

3. Soit f une fonction continue sur $[-1; 1]$. À l'aide de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos(t))\mathrm{d}t$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$ existe.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que

$$\langle .,. \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R},\ (P, Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} \frac{P(u)Q(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$$

est un produit scalaire sur E.

5. Montrer que la famille $(T_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthogonale de E.

6. En déduire une base orthonormale de E.

7. a) Déduire de la question précédente (et sans aucun calcul d'intégrale !) le projeté orthogonal $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)$ de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

b) Déterminer $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \frac{\left(u^2 + au + b\right)^2}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$.

Solution (**Ex.9** – *Orthogonalité des polynômes de Tchebychev*)

1. a) $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$.

b) Par récurrence sur n, on montre que :
- $\deg T_n = n$,
- $\mathrm{dom}(T_0) = 1$ et $\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$ si $n \geqslant 1$,
- T_n a la même parité que l'entier n.

On vérifie la propriété aux rangs $n = 0$ et $n = 1$, puis on montre que les propriétés aux rangs n et $n+1$ entraînent la propriété au rang $n+2$.

2. a) Là encore, par une récurrence (du même type que dans la question précédente),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{T}_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

Détails :

- La relation est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Supposons-la vraie pour n et $n+1$. Par définition de T_{n+2},

$\mathrm{T}_{n+2}(\cos(x)) = 2\cos(x)\mathrm{T}_{n+1}(\cos(x)) - \mathrm{T}_n(x) = 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx) = 2\cos(x)(\cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x)) - \cos(nx) =$
$\cos(nx)(2\cos^2(x) - 1) - \sin(nx)(2\sin(x)\cos(x)) =$
$\cos(nx)\cos(2x) - \sin(nx)\sin(2x) = \cos((n+2)x)$ et c'est gagné !

On peut mener le calcul « de bas en haut », c'est-à-dire partir de $\cos((n+2)x)$...

b) On cherche les racines dans l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
Soit α dans $[-1\,;\,1]$ et $x \in [0\,;\,\pi]$ tel que $\alpha = cos(x)$.

$\mathrm{T}_n(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{T}_n(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(nx) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, nx = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.

Comme $x \in [0\,;\,\pi]$, seuls les $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$ sont possibles.

$\mathrm{T}_n(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!], x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!], \alpha = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

Comme la suite $\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est une suite strictement croissante de $[0\,;\,\pi]$ et comme cos est strictement croissante sur $[0\,;\,\pi]$, les n nombres

$$\alpha_k \overset{\text{déf.}}{=} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \qquad (k \in [\![0\,;\,n-1]\!])$$

sont deux à deux distinctes.

Comme T_n est de degré n, T_n possède au plus n racines distinctes. Donc les $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ sont exactement les n racines de T_n.

3. À l'aide de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi f(\cos(t))\mathrm{d}t$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$ existe. L'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi f(\cos(t))\mathrm{d}t$ existe : elle n'est pas impropre puisque $t \mapsto f(\cos(t))$ est continue sur $[0\,;\,\pi]$.

Le changement de variable $u = \cos(t)$ est $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant sur $]0\,;\,\pi[$.

$\dfrac{du}{dt} = -\sin(t)$ et $\sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)}$ pour $t \in]0\,;\,\pi[$, donc $dt = \dfrac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$.

Enfin $t = 0$ entraîne $u = 1$, $t = \pi$ entraîne $u = -1$.

Le théorème de changement de variable assure que $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$ existe, et que

$$\int_{-1}^1 \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \int_0^\pi f(\cos(t))\mathrm{d}t.$$

4. Montrer que

$$\langle .,. \rangle : \mathrm{E}\times\mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R},\ (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \longmapsto \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{P}(u)\mathrm{Q}(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$$

est un produit scalaire sur E. Démonstration classique. On peut alléger l'écriture en remarquant que

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{P}(u)\mathrm{Q}(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \int_0^\pi \mathrm{P}(\cos(t))\mathrm{Q}(\cos(t))\mathrm{d}t$$

5. Pour $i \neq j$,

$\langle \mathrm{T}_i, \mathrm{T}_j \rangle = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{T}_i(\cos(t))\mathrm{T}_j(\cos(t))\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(it)\cos(jt)\mathrm{d}t$

Or $\cos(it)\cos(jt) = \dfrac{1}{2}(\cos((i+j)t) + \cos((i-j)t))$, d'où

$\langle \mathrm{T}_i, \mathrm{T}_j \rangle = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin((i+j)t)}{i+j} + \dfrac{\sin((i-j)t)}{i-j}\right]_0^\pi = 0$ puisque sin s'annule aux multiples de π.

La famille $(\mathrm{T}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthogonale de E, puisque étant orthogonale sans vecteur nul, elle est libre, et compte $n+1 = \dim(\mathrm{E})$ vecteurs.

6. $||\mathrm{T}_i||^2 = \displaystyle\int_0^\pi (\mathrm{T}_i(\cos(t))^2\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos^2(it)\mathrm{d}t$, or $\cos^2(it) = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2it))$,

- si $i = 0$, $||\mathrm{T}_i||^2 = \pi$
- si $i \neq 0$, $||\mathrm{T}_i||^2 = \dfrac{1}{2}\left[t + \dfrac{\sin(it)}{i}\right]_0^\pi = \dfrac{\pi}{2}$.

La famille $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{T}_0, \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\mathrm{T}_1, \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\mathrm{T}_2, \ldots, \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\mathrm{T}_n\right)$ est une base orthonormale de E.

7. a) La famille $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{T}_0, \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\mathrm{T}_1\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

Donc $p_{\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}^2) = \dfrac{1}{\pi}\left\langle \mathrm{X}^2, \mathrm{T}_0\right\rangle \mathrm{T}_0 + \dfrac{2}{\pi}\left\langle \mathrm{X}^2, \mathrm{T}_1\right\rangle \mathrm{T}_1$.

Pour calculer $\left\langle \mathrm{X}^2, \mathrm{T}_i\right\rangle$, observons que $\mathrm{X}^2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{T}_2 + \dfrac{1}{2}\mathrm{T}_0$. Par orthogonalité de la famille $(\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$:

$\left\langle \mathrm{X}^2, \mathrm{T}_0\right\rangle = \dfrac{1}{2}||\mathrm{T}_0||^2 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\left\langle \mathrm{X}^2, \mathrm{T}_1\right\rangle = 0$.

Donc $p_{\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}^2) = \dfrac{1}{2}$.

b) $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}\frac{\left(u^2+au+b\right)^2}{\sqrt{1-u^2}}du=\min_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}\frac{\left(u^2-(\alpha u+\beta\right)^2}{\sqrt{1-u^2}}du=$ $\displaystyle\min_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}\left|\left|\mathrm{X}^2-(\alpha\mathrm{X}+\beta)\right|\right|^2=\min_{\mathrm{P}\in\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]}\left|\left|\mathrm{X}^2-\mathrm{P}\right|\right|.$

Or d'après le cours ce minimum existe et est atteint (uniquement) pour $\mathrm{P}=p_{\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]}(\mathrm{X}^2)$ i.e. $\mathrm{P}=\dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}\frac{\left(u^2+au+b\right)^2}{\sqrt{1-u^2}}du=\left|\left|\mathrm{X}^2-\frac{1}{2}\right|\right|^2=\left|\left|\frac{1}{2}\mathrm{T}_2+\frac{1}{2}\mathrm{T}_0-\frac{1}{2}\right|\right|^2=\left|\left|\frac{1}{2}\mathrm{T}_2\right|\right|^2=\frac{1}{4}\left|\left|\mathrm{T}_2\right|\right|^2=\frac{\pi}{8}$$

Exercice 10 *Endomorphisme adjoint*

Soit $n\geqslant 2$ et $\mathrm{E}=\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E et, pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de E, on convient de noter X la colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ représentant $\overrightarrow{x}$: $\mathrm{X}=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{x})$.
Pour tout endomorphisme f de E, on appelle *adjoint* de f et on note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice représentative de f : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\big(f^*\big)={}^{\mathrm{t}}\big(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\big)$.

1. Soit $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que : $\forall(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in\mathrm{E}^2,\quad\big\langle f\big(\overrightarrow{x}\big),\overrightarrow{y}\big\rangle=\big\langle\overrightarrow{x},f^*\big(\overrightarrow{y}\big)\big\rangle$.

2. Soient f et g deux endomorphismes de E et λ un scalaire. Justifier les relations :
a) $(\lambda f+g)^*=\lambda f^*+g^*$; **b)** $(f\circ g)^*=g^*\circ f^*$; **c)** $(f^*)^*=f$.

3. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que :
a) $\mathrm{Ker}(f^*)=(\mathrm{Im}f)^\perp$; **b)** $\mathrm{Im}(f^*)=(\mathrm{Ker}f)^\perp$;
c) $\mathrm{Ker}(f\circ f^*)=\mathrm{Ker}(f^*)$; **d)** $\mathrm{Im}(f\circ f^*)=\mathrm{Im}(f)$.

Solution (**Ex.10** – *Endomorphisme adjoint*)

1. a) $\langle f(x),y\rangle={}^{\mathrm{t}}\mathrm{MXY}=({}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{M})\mathrm{Y}={}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{MY})=\langle x,f^*(y)\rangle$.
b) Traduction de ${}^{\mathrm{t}}(\lambda\mathrm{M}+\mathrm{N})=\lambda\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}+{}^{\mathrm{t}}\mathrm{N}$, ${}^{\mathrm{t}}(\mathrm{MN})={}^{\mathrm{t}}\mathrm{N}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}$ et ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{M})=\mathrm{M}$.

2. a) • Soit $x\in\mathrm{Ker}(f^*)$. Alors ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{MX}=0$ et $\forall y,\langle x,f(y)\rangle={}^{\mathrm{t}}\mathrm{X}(\mathrm{MY})={}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{MX})\mathrm{Y}=0$ donc $x\in(\mathrm{Im}f)^\perp$. Donc $\mathrm{Ker}(f^*)\subset(\mathrm{Im}f)^\perp$.
• $\dim\mathrm{Ker}(f^*)=n-\mathrm{rg}(f^*)=n-\mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{M})=n-\mathrm{rg}(\mathrm{M})=n-\mathrm{rg}(f)=n-\dim(\mathrm{Im}f)=\dim((\mathrm{Im}f)^\perp)$ d'où $\mathrm{Ker}(f^*)=(\mathrm{Im}f)^\perp$.
b) Utilisons a) : $\mathrm{Im}(f^*)=(\mathrm{Im}(f^*)^\perp)\perp=(\mathrm{Ker}((f^*)^*))^\perp=(\mathrm{Ker}f)^\perp$
c) $f^*(x)=0\Rightarrow f\circ f^*(x)=0$ donc $\mathrm{Ker}f^*\subset\mathrm{Ker}(f\circ f^*)$;
$f\circ f^*(x)=0\Rightarrow\langle f(f^*(x)),x\rangle=0\Rightarrow($ par 1.a$)\ \langle f^*(x),f^*(x)\rangle=0\Rightarrow$
$||f^*(x)||^2=0\Rightarrow f^*(x)=0$ donc $\mathrm{Ker}(f\circ f^*)\subset\mathrm{Ker}(f^*)$.
• Par double inclusion, $\mathrm{Ker}(f\circ f^*)=\mathrm{Ker}(f^*)$.
d) Utilisons les relations précédentes :
$\mathrm{Im}f=(\mathrm{Ker}(f^*))^\perp=(\mathrm{Ker}(f\circ f^*))^\perp=\mathrm{Im}((f\circ f^*)^*)=\mathrm{Im}((f^*)^*\circ f^*)=\mathrm{Im}(f\circ f^*)$.

Exercice 11 *Majoration des coefficients d'une matrice orthogonale*

On utilisera les produits scalaires caononiques respectifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soit $\mathrm{A}=(a_{i,j})\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que : $\forall(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2,\quad|a_{i,j}|\leqslant 1$.

2. a) Montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|\leqslant n\sqrt{n}$.
b) Donner un exemple dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ où il y a égalité.

3. Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}\right|\leqslant n$.

Solution (**Ex.11** – *Majoration des coefficients d'une matrice orthogonale*)

1. Soit $(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de A est unitaire pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc :

$$|a_{i,j}|=\sqrt{a_{i,j}^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}^2}\leqslant 1.$$

2. a) Rappelons le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\big(\mathrm{A}\mid\mathrm{B}\big)=\displaystyle\sum_{i,j}a_{i,j}b_{i,j}$.

Avec : $\forall(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2,\quad b_{i,j}\overset{\text{déf.}}{=}\begin{cases}1 & \text{si } a_{i,j}\geqslant 0\\ -1 & \text{si } a_{i,j}<0\end{cases}$, on a : $\big(\mathrm{A}\mid\mathrm{B}\big)=\displaystyle\sum_{i,j}|a_{i,j}|$.
De plus, $||\mathrm{A}||^2=\mathrm{tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}.\mathrm{A})=\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n)=n$ donc $||\mathrm{A}||=\sqrt{n}$.
Et $||\mathrm{B}||^2=\displaystyle\sum_{i,j}b_{i,j}^2=\sum_{i,j}1=n^2$ donc $||\mathrm{B}||=n$.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\big|\big(\mathrm{A}\mid\mathrm{B}\big)\big|\leqslant||\mathrm{A}||\,||\mathrm{B}||$:

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|\leqslant n\sqrt{n}.$$

b) Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz lorsque A et B sont colinéaires.
On cherche donc A colinéaire à $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}\pm1&\pm1\\\pm1&\pm1\end{pmatrix}$...

$\mathrm{A} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ fait l'affaire : $\displaystyle\sum_{i,j} |a_{i,j}| = 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

3. Comment récupérer la somme des coefficients de A ?
Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne dont tous les coefficients valent 1.
Alors, avec le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $\langle \mathrm{U}, \mathrm{V} \rangle = {}^t\mathrm{UV} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$:

- $\langle \mathrm{U}, \mathrm{AU} \rangle = {}^t\mathrm{UAU} = \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}$,
- $||\mathrm{U}|| = \sqrt{n}$,
- $||\mathrm{AU}|| = ||\mathrm{U}||$ car A est orthogonale, donc une matrice d'isométrie.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n.$$

Remarque : Là encore, il y a égalité lorsque U et AU sont colinéaires, et $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ est du coup une excellente candidate : pour $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ (et on a bien $\mathrm{I}_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$!),
$\left| \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| = \displaystyle\sum_{i \neq j} 0 + \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$