

Exercice 1 La loi du sauteur en hauteur - Transferts

Dans un concours de saut, la probabilité qu'un sauteur passe la $n^{\text{ème}}$ barre est $\frac{1}{n}$ et est indépendante des sauts précédents.

On note X le numéro de la dernière barre que le sauteur a franchi avant d'échouer.

1. Donner la loi de X et vérifier que $\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = x) = 1$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ existent et les calculer. On observa qu'on a intérêt à commencer par calculer $\mathbb{E}(X + 1)$, puis $\mathbb{E}(X^2 - 1)$.

Solution (Ex.1 - La loi du sauteur en hauteur - Transferts)

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) \stackrel{\text{FPC}}{=} 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \frac{n}{n+1} = \frac{n}{(n+1)!}$.
2. $\mathbb{E}(X + 1) \stackrel{\text{transf.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \stackrel{\text{exp.}}{=} e$, $\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{lin.}}{=} e - 1$.
 $\mathbb{E}(X^2 - 1) \stackrel{\text{transf.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)n(n+1)}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} \stackrel{\text{exp.}}{=} e$, $\mathbb{E}(X^2) \stackrel{\text{lin.}}{=} e + 1$, $\mathbb{V}(X) = 3e - e^2$.

Exercice 2 Sans espoir ... - Absence d'espérance

Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche.

On procède à une succession de tirages suivant le processus : à chaque tirage, on prélève une boule au hasard et on la remet accompagnée d'une autre boule de la même couleur. On note T le temps d'attente du premier tirage d'une boule noire.

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = n)$ et vérifier que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(T = n) = 1$.
2. T possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Solution (Ex.2 - Sans espoir ... - Absence d'espérance)

1. $\mathbb{P}(T = n) \stackrel{\text{FPC}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}$ diverge, $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas.

Exercice 3 Somme de deux uniformes indépendantes - « Convolution »

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X , Y et Z trois variables indépendantes de même loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

1. Montrer que, pour tout k de $\llbracket 2; 2n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{\max(1, k-n) \leq i \leq \min(n, k-1)} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i).$$
2. En déduire $\mathbb{P}(X + Y = k)$ suivant que $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ ou $k \in \llbracket n; 2n \rrbracket$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(X + Y = Z) = \frac{n-1}{n^2}$.
4. Je lance trois dés justes à six faces numérotées de 1 à 6. Quelles est la probabilité que la somme de deux des numéros obtenus soit égale au troisième ?

Solution (Ex.3 - Somme de deux uniformes indépendantes - « Convolution »)

1. Clairement $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 2; 2n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 2; 2n \rrbracket$.

$$[X + Y = k] = \bigcup_{i \in X(\Omega) \text{ et } k-i \in Y(\Omega)} ([X = i] \cap [Y = k - i]).$$

Par incompatibilité de ces événements, puis indépendance des variables aléatoires,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i \in X(\Omega) \text{ et } k-i \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i).$$

Précisons la plage de sommation :

$$(i \in X(\Omega) \text{ et } k - i \in Y(\Omega)) \Leftrightarrow (1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq k - i \leq n)$$

$$\Leftrightarrow (1 \leq i \leq n \text{ et } k - n \leq i \leq k - 1)$$

$$\Leftrightarrow \max(1, k - n) \leq i \leq \min(n, k - 1)$$

2. • $2 \leq k \leq n$ donc $\max(1, k - n) = 1$ et $\min(n, k - 1) = k - 1$,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}.$$

- $n+1 \leq k \leq 2n$ donc $\max(1, k - n) = k - n$ et $\min(n, k - 1) = n$,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=k-n}^n \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) = \sum_{i=k-n}^n \frac{1}{n^2} = \frac{2n - k + 1}{n^2}.$$

3. À l'aide du système complet d'événements $([Z = k])_{1 \leq k \leq n}$,

$$\mathbb{P}(X + Y = Z) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((Z = k) \cap (X + Y = Z)) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((Z = k) \cap (X + Y = k))$$

$$\stackrel{\text{indép.}}{=} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(Z = k) \mathbb{P}(X + Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n^2}.$$

4. Avec $n = 6$, en notant X , Y et Z les numéros des 3 dés,

$$\mathbb{P}((X + Y = Z) \cup (X + Z = Y) \cup (Y + Z = X)) \stackrel{\text{incomp.}}{=}$$

$$\mathbb{P}(X + Y = Z) + \mathbb{P}(X + Z = Y) + \mathbb{P}(Y + Z = X) = 3 \times \frac{6-1}{2 \times 6^2} = \frac{5}{24}.$$

Exercice 4 Binomiale et parité - Fonction génératrice et moments

On dispose de $2n + 1$ jetons dont une face est noire et l'autre blanche. On lance simultanément ces jetons.

- On note B et N respectivement le nombre de faces blanches et noires obtenues. Quelle loi suivent les variables aléatoires B et N ?
- a) Pourquoi une seule des deux couleurs apparaît un nombre impair de fois ?
b) X désigne la variable aléatoire égale à ce nombre impair. Calculer la loi de X.
- a) Exprimer la fonction génératrice de X, notée G_X , à l'aide de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{2n+1} - (1-x)^{2n+1}$.
b) En déduire l'espérance et la variance de X.

Solution (Ex.4 - Binomiale et parité - Fonction génératrice et moments)

- B et N suivent $\mathcal{B}(2n+1, 1/2)$ (par définition de cette loi).
- a) En notant B et N respectivement le nombre de faces blanches et noires obtenues, $B + N = 2n + 1$ est impair, ce qui est impossible si B et N sont tous les deux pairs, ou tous les deux impairs. Donc un, et un seul, des deux nombres B et N est impair.
b) • $X(\Omega) = \{2k+1, k \in [0; n]\}$.
• Pour tout k de $[0; n]$, $[X = 2k+1] = [B = 2k+1] \cup [N = 2k+1]$, cette réunion étant disjointe.

Par additivité :

$$\mathbb{P}(X = 2k+1) = 2 \times \binom{2n+1}{2k+1} \frac{1}{2^{2k+1}} \frac{1}{2^{2n+1-2k-1}} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n+1}{2k+1}$$

- a) Par la formule du binôme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k x^k = 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} x^{2k+1}$$

$$\text{Donc } G_X(x) = \frac{1}{2^{2n+1}} f(x).$$

$$\text{b) } \mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{1}{2^{2n+1}} f'(1) = \frac{(2n+1)2^{2n}}{2^{2n+1}} = \frac{2n+1}{2}.$$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1) = \frac{(2n+1)2n}{4},$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X^2) = \frac{2n(2n+1) + 4n + 2 - (2n+1)^2}{4} = \frac{2n+1}{4}.$$

Exercice 5 Produit de Bernoulli - Corrélation

- Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . Que peut-on dire de X^2 ?
- Soit $p \in]0; 1[$. On effectue une suite de lancer d'une pièce amenant " pile " avec la probabilité p et on note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
 - X_k la variable indicatrice de l'événement « le k -ème lancer donne " pile " »,
 - Y_k la variable indicatrice de l'événement « les k -ème et $(k+1)$ -ème lancers donnent tous les deux " pile " ».
 Pour tous k et j dans $\mathbb{N}^*$, calculer le coefficient de corrélation $\rho(Y_k, Y_j)$.

Solution (Ex.5 - Produit de Bernoulli - Corrélation)

- $X(\Omega) = \{0; 1\}$ donc X^2 ne peut prendre que les valeurs $0^2 = 0$ et 1^2 .
De plus : $(X = 0 \Leftrightarrow X^2 = 0)$ et $(X = 1 \Leftrightarrow X^2 = 1)$.
Donc finalement $X^2 = X$ (et en particulier $X^2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$).
- Soient k et j dans $\mathbb{N}^*$. On a $Y_k = X_k X_{k+1}$ et $Y_j = X_j X_{j+1}$.
 - Si $j \neq k-1$ et $j \neq k$ et $j \neq k+1$, alors les variables X_k, X_{k+1}, X_j et X_{j+1} sont 4 variables distinctes indépendantes, donc $Y_k = X_k X_{k+1}$ et $Y_j = X_j X_{j+1}$ sont indépendantes et leur covariance est nulle. Donc $\rho(Y_k, Y_j) = 0$.
 - Si $j = k$, alors $Y_j = Y_k$, $\text{cov}(Y_k, Y_j) = \mathbb{V}(Y_k)$, $\sigma(Y_k)\sigma(Y_j) = \sigma(Y_k)^2 = \mathbb{V}(Y_k)$, $\rho(Y_k, Y_j) = 1$. Ceci n'est pas surprenant puisqu'il y a un lien affine évident entre Y_k et Y_j : $Y_j = 1 \times Y_k + 0 \dots$
 - Si $j = k+1$, alors $Y_k Y_j = X_k X_{k+1}^2 X_{k+2} = X_k X_{k+1} X_{k+2}$.
Par indépendance, $\mathbb{E}(Y_k Y_j) = \mathbb{E}(X_k X_{k+1} X_{k+2}) = \mathbb{E}(X_k) \mathbb{E}(X_{k+1}) \mathbb{E}(X_{k+2}) = p^3$ et toujours par indépendance $\mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(X_k X_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k) \mathbb{E}(X_{k+1}) = p^2$. Donc $\text{cov}(Y_k, Y_j) = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$.
Calculons $\mathbb{V}(Y_k)$. $Y_k(\Omega) = \{0; 1\}$ et $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}((X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 1)) = \mathbb{P}(X_k = 1) \mathbb{P}(X_{k+1} = 1)$ par indépendance, donc $\mathbb{P}(Y_k = 1) = p^2$ et $Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$.
Par conséquent, $\mathbb{V}(Y_k) = p^2(1-p^2)$. Il en est de même pour Y_j : $Y_j \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$.
Alors $\sigma(Y_k)\sigma(Y_j) = \sqrt{p^2(1-p^2)} \sqrt{p^2(1-p^2)} = p^2(1-p^2)$. Finalement $\rho(Y_k, Y_j) = \frac{p^3(1-p)}{p^2(1-p^2)} = \frac{p(1-p)}{(1-p)(1+p)} = \frac{p}{1+p}$.
 - Si $j = k-1$, alors $k = j+1$ et en permutant les rôles de k et j dans ce qui précède, on obtient encore $\rho(Y_k, Y_j) = \frac{p}{1+p}$.

Exercice 6 Un produit - Formule des probabilités totales

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit Y une variable aléatoire réelle indépendante de X, et suivant la loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Soit $Z = XY$.

- Donner l'espérance et la variance de Z puis déterminer la loi de Z.

2. Calculer la probabilité que Z soit paire.

Solution (Ex.6 – Un produit - Formule des probabilités totales)

1. a) Par indépendance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \lambda \frac{3}{2} = \frac{3\lambda}{2}$.

$$\text{De même : } \mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = (\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2)\mathbb{E}(Y^2) = (\lambda + \lambda^2)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5\lambda + 5\lambda^2}{2},$$

$$\mathbb{V}(Z) = \frac{10\lambda + 10\lambda^2 - 9\lambda^2}{4} = \frac{5}{2}\lambda + \frac{1}{4}\lambda^2$$

b) • Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $Y = 2$ entraîne Z pair :

$$[Z = 2k + 1] = [X = 2k + 1] \cap [Y = 1]$$

Par indépendance :

$$\mathbb{P}(Z = 2k + 1) = \mathbb{P}(X = 2k + 1)\mathbb{P}(Y = 1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k+1}}{2(2k+1)!}.$$

$$[Z = 2k] = ([X = 2k] \cap [Y = 1]) \cup ([X = k] \cap [Y = 2])$$

La réunion étant disjointe :

$$\mathbb{P}(Z = 2k) = \mathbb{P}([X = 2k] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 2])$$

Par indépendance :

$$\mathbb{P}(Z = 2k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{2(2k)!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{2k!}.$$

$$2. \mathbb{P}(Z \text{ impaire}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = 2k + 1) = \frac{e^{-\lambda}}{2} \text{sh}(\lambda) = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{4} \text{ et } \mathbb{P}(Z \text{ paire}) = \frac{3 + e^{-2\lambda}}{4}$$

Exercice 7 Loi de Pascal - Fonctions génératrices

Soit $p \in]0; 1[$. Soit (T_n) une suite de variables indépendantes suivant toutes la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$.

- Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction génératrice de S_n , et en déduire sa loi. On pourra observer ce que donne la n -ième dérivation de la série géométrique...
- Soit $k \geq 2$. Déterminer la loi de T_1 sachant $[S_2 = k]$.
- On lance plusieurs fois une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir est p . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le rang moyen d'obtention du n -ième pile ?

Solution (Ex.7 – Loi de Pascal - Fonctions génératrices)

1. Par indépendance des T_k , $G_{S_n} = \prod_{k=1}^n G_{T_k}$.

$$\text{Or pour tout } k, G_{T_k} : t \mapsto \frac{pt}{1-qt}, \text{ donc } G_{S_n} : t \mapsto p^n t^n \frac{1}{(1-qt)^n}.$$

Saisissons-nous de l'indication, pour x tel que $|x| < 1$:

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{ d'une part,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{1-x} \right) &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1) \dots (k+1) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} x^k \text{ d'autre part.} \end{aligned}$$

On en tire : $\forall t \in [0; 1]$,

$$\frac{1}{(1-qt)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!} (qt)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} q^k t^k.$$

$$\text{D'où : } G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} q^k p^n t^{k+n} = \sum_{j=n}^{+\infty} \binom{j-1}{j-n} q^{j-n} p^n t^j.$$

On en déduit :

- $S_n(\Omega) = [n, +\infty[$,
- $\forall j \geq n, \mathbb{P}(S_n = j) = \binom{j-1}{j-n} q^{j-n} p^n$.

Ceci s'interprète facilement : S_n est le rang d'apparition du n -ième succès dans un schéma de Bernoulli. Donc $S_n(\Omega) = [n, +\infty[$. De plus, les suites d'épreuves favorables à $[S_n = j]$ sont les suites de j lancers dont n succès avec le dernier à la fin, $j-n$ échecs, à placer parmi les $j-1$ épreuves de rang 1 à $j-1$. Cela fait $\binom{j-1}{j-n}$ suites possibles, deux à deux incompatibles et toutes de probabilité

$p^n q^{j-n}$. Donc $\mathbb{P}(S_n = j) = \binom{j-1}{j-n} q^{j-n} p^n \dots$ ce qui en fait redémontre le résultat précédent.

2. Sachant $[S_2 = k]$, T_1 prend ses valeurs dans $[1; k-1]$. Soit $i \in [1; k-1]$.

$$\mathbb{P}_{[S_2=k]}(T_1 = i) = \frac{\mathbb{P}([S_2 = k] \cap [T_1 = i])}{\mathbb{P}(S_2 = k)} = \frac{\mathbb{P}([T_2 = k-i] \cap [T_1 = i])}{\mathbb{P}(S_2 = k)}$$

Or T_1 et T_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{P}_{[S_2=k]}(T_1 = i) = \frac{\mathbb{P}(T_2 = k-i)\mathbb{P}(T_1 = i)}{\mathbb{P}(S_2 = k)} = \frac{pq^{k-i-1}pq^{i-1}}{\binom{k-1}{k-2}q^{k-2}p^2} = \frac{1}{k-1}$$

La seule question est de savoir où a eu lieu le premier des 2 succès, et la moralité est que ça ne dépend plus de la probabilité de succès, mais est parfaitement uniforme : la loi de T_1 conditionnée par $[S_2 = k]$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1; k-1 \rrbracket$.

$$3. \mathbb{E}(S_n) \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(T_i) = \frac{n}{p}.$$

Exercice 8 Loi uniforme sur différents supports

- Calculer l'espérance et la variance d'une variable X de loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.
- Soit $a < b$ deux entiers et Y une variable de loi uniforme sur $\llbracket a; b \rrbracket$.
 - Déterminer une transformation affine $t \mapsto \alpha t + \beta$ envoyant $\llbracket a; b \rrbracket$ sur un intervalle du type $\llbracket 1; n \rrbracket$.
 - En déduire l'espérance et la variance de Y .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que valent l'espérance et la variance d'une variable de loi uniforme sur $\{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$?

Exercice 9 Minimum et maximum de deux variables géométriques

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

On pose $T = \min(X, Y)$ et $Z = \max(X, Y)$.

- Loi de T , première méthode
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{P}(X \geq k)$? En déduire $\mathbb{P}(T \geq k)$ puis montrer que T suit une loi usuelle dont on précisera le paramètre.
- Loi de T , seconde méthode
On lance indéfiniment simultanément deux pièces, l'une argentée et l'autre dorée, ayant toutes deux la probabilité p d'amener pile. On note A et D respectivement le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile avec la pièce argentée, respectivement avec la pièce dorée.
 - Quel est la loi de A et de D ? Quelle est la probabilité de l'événement « le premier lancer amène au moins un pile » ?
 - On note P le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile, sans distinction de couleur. Quel est la loi de P ?
 - Conclure.
- Déterminer la loi de Z , vérifier que $\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(Z = k) = 1$ et calculer son espérance.

Solution (Ex.9 – Minimum et maximum de deux variables géométriques)

Posons $q = 1 - p$.

Soit $q = 1 - p$.

1. Première méthode

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geq k) = q^{k-1}$ ($k-1$ échecs successifs).

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = \mathbb{P}([X \geq k] \cap [Y \geq k]) \stackrel{\text{indép.}}{=} q^{k-1} q^{k-1} = q^{2k-2}.$$

$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k+1) = q^{2k-2} - q^{2k} = (q^2)^{k-1} (1 - q^2)$ ce qui prouve que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2 = p(2 - p)$.

2. Seconde méthode

On lance indéfiniment simultanément deux pièces, l'une argentée et l'autre dorée, ayant toutes deux la probabilité p d'amener pile. On note A et D respectivement le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile avec la pièce argentée, respectivement avec la pièce dorée.

- La loi de A et de D est $\mathcal{G}(p)$.
- Soit B l'événement « le premier lancer amène au moins un pile ».
 $\mathbb{P}(\overline{B}) \stackrel{\text{indép.}}{=} q^2$, donc $\mathbb{P}(B) = 1 - q^2$.
- La loi de P est $\mathcal{G}(\mathbb{P}(B)) = \mathcal{G}(1 - q^2)$.
- $P = \min(A, D)$: on retrouve le même résultat.

- $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Z \leq k) = \mathbb{P}([X \leq k] \cap [Y \leq k]) \stackrel{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X \leq k) \mathbb{P}(Y \leq k)$$

or $\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(Y > k) = (1 - p)^k$ (les k premières expériences sont des échecs), donc $\mathbb{P}(Z \leq k) = (1 - q^k)^2$ (y compris pour $k = 0$... remarque pour ce qui va suivre).

$$\text{Enfin, } \mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k-1) = (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2$$

$$\mathbb{P}(Z = k) = 2q^{k-1} - 2q^k + q^{2k} - q^{2k-2} = 2pq^{k-1} - (q^2)^{k-1} (1 - q^2)$$

- De $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ pour $r \in]0; 1[$, on tire :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) = 2p \times \frac{1}{1-p} - (1 - q^2) \times \frac{1}{1 - q^2} = 1.$$

- De $\sum_{k=1}^{+\infty} k r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$ pour $r \in]0; 1[$ (obtenue par dérivation de la série géométrique), on tire :

$\mathbb{E}(Z)$ existe et

$$\mathbb{E}(Z) = 2p \times \frac{1}{p^2} - (1 - q^2) \times \frac{1}{(1 - q^2)^2} = \frac{2}{p} - \frac{1}{2p - p^2} = \frac{3 - 2p}{p(2 - p)}.$$

3. **Exercice 10** Écllosion

Un insecte pond des œufs, dont le nombre suit une loi de Poisson de paramètre λ . Chaque œuf a une probabilité p d'éclore. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'insectes nés. Étudier la loi et l'espérance de X .

Solution (Ex.10 – Éclosion)

Notons Y la variable aléatoire égale au nombre d'œufs pondus.

Le support de X est $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La loi de X conditionnée par $[Y = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y = n])_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\mathbb{P}([X = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = n])\mathbb{P}_{[Y=n]}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ en tenant}$$

compte de $\mathbb{P}_{[Y=n]}(X = k) = 0$ pour $n < k$,

$$\mathbb{P}([X = k]) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k} (1-p)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!}$$

$$\mathbb{P}([X = k]) = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}, \text{ donc } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p).$$

Par conséquent, $\mathbb{E}(X) = \lambda p$.

Exercice 11 *Antirépartition, puis espérance totale*

Deux joueurs procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce, laquelle obtient pile avec une probabilité $p \in]0; 1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$. Le joueur A commence ses lancers et s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X le nombre de lancers qu'il a effectués.

Ensuite, le joueur B effectue autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers du joueur B ayant donné un pile.

1. Rappeler la loi de X , indiquer $Y(\Omega)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
2. Calculer $\mathbb{P}([Y = 0])$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1} = \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}}.$$

4. a) Déterminer, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(Y \geq n)$.
b) Montrer que Y admet une espérance dont la valeur est indépendante du paramètre p .
5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{E}_{[X=k]}(Y)$ l'espérance de Y pour la probabilité condi-

tionnelle $\mathbb{P}_{[X=k]}$. Autrement dit : $\mathbb{E}_{[X=k]}(Y) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = n])$.

- a) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}_{[X=k]}(Y)$ en précisant sa valeur, et justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{E}_{[X=k]}(Y)$.
- b) En admettant que la permutation des sommes est licite, justifier la *formule des l'espérance totale* :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{E}_{[X=k]}(Y) = \mathbb{E}(Y).$$

Indication : on ne cherchera pas à remplacer les différentes probabilités par leur valeur...

- c) Retrouver alors la valeur de $\mathbb{E}(Y)$.

Solution (Ex.11 – Antirépartition, puis espérance totale)

Je pose $q = 1 - p$.

1. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Sachant $[X = k]$, Y compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de k épreuves, donc : $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = n]) = \begin{cases} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases} = \binom{k}{n} p^n q^{k-n}.$$

2. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ permet d'écrire :

$$\mathbb{P}([Y = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p q^k = p q \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = p q \frac{1}{(1-q^2)} = \frac{q}{1+q}.$$

3. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ permet d'écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = n]) = \sum_{k=n}^{+\infty} q^{k-1} p \binom{k}{n} p^n q^{k-n} \\ &= \frac{p^{n+1}}{n! q^{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} (q^2)^k \end{aligned}$$

Et un petit coup de série entière :

pour $z \in]-1; 1[$, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} z^k = z^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} z^{k-n} = z^n \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{1-z} \right) =$

$$z^n \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$$

D'où :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = \frac{p^{n+1}}{n!q^{n+1}} \times q^{2n} \frac{n!}{(1-q^2)^{n+1}} = \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}}$$

4. a) $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geq n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{q(1+q)} \left(\frac{q}{1+q} \right)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{k-n} = \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}} \times \frac{1}{1-q/(1+q)} \\ \mathbb{P}(Y \geq n) &= \frac{q^{n-1}}{(1+q)^n} \end{aligned}$$

b) Puisque $\left| \frac{q}{1+q} \right| < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Y \geq n)$ converge. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, cela prouve que $\mathbb{E}(Y)$ existe et vaut :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq n) = \frac{1}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1} = \frac{1}{1+q} \times \frac{1}{1-q/(1+q)} = 1,$$

qui est bien indépendante de p .

5. a) • La somme définissant $\mathbb{E}_{[X=k]}(Y)$ n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls, elle existe et :

$$\mathbb{E}_{[X=k]}(Y) = \sum_{n=0}^k n \binom{k}{n} p^n q^{k-n} = kp, \text{ espérance d'une variable de loi } \mathcal{B}(k, p).$$

• $\mathbb{P}([X = k])\mathbb{E}_{[X=k]}(Y) = p^2 k q^{k-1}$ est le terme général d'une série entière convergente : la dérivée de la série géométrique de paramètre $q \in]0; 1[$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\mathbb{E}_{[X=k]}(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mathbb{P}([X = k]) \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = n) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (n \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = n])) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = n]) \right) \\ &\stackrel{\text{FPT}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}([Y = n]) = \mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

c) Retrouver alors la valeur de $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 12 La séquence pile-face par les fonctions génératrices

On considère une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » est $p \in]0; 1[$ et la probabilité d'obtenir « face » est $q \stackrel{\text{déf.}}{=} 1 - p$.

On lance successivement et indépendamment la pièce et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première séquence « pile-face ». On convient de prendre X égale au rang du « pile » de cette séquence.

Ainsi, si les premiers lancers donnent : $F_1, F_2, P_3, F_4, P_5, \dots$, alors $X = 3$. On note :

- $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{P}(X = k)$;
- P_1 (resp. F_1) l'événement « obtenir « pile » (resp. « face ») au premier lancer ».

1. a) À l'aide du système complet (P_1, F_1) , montrer que :

$$(\heartsuit) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = p^k q + q a_{k-1}.$$

b) En déduire que l'événement J « la séquence pile-face n'apparaît jamais » est presque impossible.

2. a) À l'aide de $(\heartsuit)$, montrer que : $\forall t \in [0; 1], \quad G(t) = \frac{pqt}{1-t+pqt^2}$.

b) En déduire $\mathbb{E}(X)$.

3. Pour quelle valeur de p l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est-elle maximale ?

Solution (Ex.12 – La séquence pile-face par les fonctions génératrices)

1. a) À l'aide du système complet (P_1, F_1) ,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}_{P_1}(X = k) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(X = k).$$

$$\bullet \quad \mathbb{P}_{P_1}(X = k) = \mathbb{P}(P_2 \cap P_3 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}) \stackrel{\text{indép.}}{=} p^{k-1} q.$$

$$\bullet \quad \mathbb{P}_{F_1}(X = k) = \mathbb{P}(\text{« obtenir la première séquence PF en } k-1 \text{ coups »}) = \mathbb{P}(X = k-1)$$

$$\bullet \quad \text{Conclusion : } \forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = p^k q + q a_{k-1}.$$

b) $\bar{J} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X = k]$ et par incompatibilité

$$\mathbb{P}(\bar{J}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Par $(\heartsuit)$ et comme $a_0 = 0$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = q \sum_{k=1}^{+\infty} p^k + q \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \frac{qp}{1-p} + q \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ d'où } (1-q) \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = p \text{ et finalement } \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1.$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(J) = 1 - \mathbb{P}(\bar{J}) = 0.$$

2. a) Soit $t \in [0; 1]$. Nous avons : $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k t^k = p^k q t^k + q a_{k-1} t^k$.

En sommant pour k parcourant $\mathbb{N}^*$, en se souvenant que $a_0 = 0$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} p^k q t^k + \sum_{k=1}^{+\infty} q a_{k-1} t^k$$

$$G(t) = qpt \sum_{k=1}^{+\infty} (pt)^{k-1} + qt \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} t^{k-1}$$

$$G(t) = qpt \times \frac{1}{1-pt} + qtG(t).$$

$$(1-qt)G(t) = \frac{pqt}{1-pt} \text{ donc } G(t) = \frac{pqt}{(1-pt)(1-qt)} = \frac{pqt}{1-t+pkt^2}.$$

$$\text{b) } \forall t \in [0; 1], G'(t) = \frac{pq(1-t-pqt^2) - pqt(2pkt-1)}{(1-t+pkt^2)^2} = \frac{pq(1-pqt)}{(1-t+pkt^2)^2}$$

$$\mathbb{E}(X) = G'(1) = \frac{pq(1-pq)}{(1-1+pq)^2} = \frac{1}{pq} - 1.$$

3. $\mathbb{E}(X)$ est minimale lorsque pq est maximale.

$$pq = p(1-p) = p-p^2 = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \text{ est maximale si, et seulement si, } p = 1/2.$$

$\mathbb{E}(X)$ est minimale si, et seulement si, $p = 1/2$, et vaut alors 3.