Propagation d'une épidémie & résolutions numériques d'équations

Le modèle SIR est historiquement le premier exemple de modèle à compartiments, c'est-à-dire dans lequel on divise la population en plusieurs catégories. C'est encore aujourd'hui le modèle à la base des simulations actuelles. Il a été introduit en 1927 par Anderson Gray McKendrick (1876–1943).

Pour une population donnée, on étudie la taille de trois sous-populations au cours du temps t : $\mathrm{S}(t)$ représente les personnes saines (susceptible en anglais) au temps t, $\mathrm{I}(t)$ les personnes infectées (infected), et $\mathrm{R}(t)$ les personnes retirées (removed).

Il convient de bien différencier les personnes saines des personnes retirées : les personnes saines n'ont pas encore été touchées par le virus, alors que les personnes retirées sont guéries, et donc immunisées. Autrement dit, les personnes retirées ne sont plus prises en compte. Par conséquent, le modèle SIR de base suppose la maladie non mortelle [(1)].

Le modèle SIR peut donc être représenté par le schéma suivant :

$$\boxed{\mathrm{S}} \xrightarrow{\quad\beta\quad} \boxed{\mathrm{I}} \xrightarrow{\quad\gamma\quad} \boxed{\mathrm{R}}$$

où

- β représente le *taux de transmission*, c'est à dire le taux de personnes saines qui deviennent infectées
- γ le *taux de guérison*, c'est à dire le taux de personnes infectées qui deviennent retirées.

Mathématiquement, le modèle SIR est donné par le système suivant :

$$(\mathrm{SIR}) \quad \forall t \in [\,0\,;\,+\infty\,[\,, \begin{cases} \dfrac{\mathrm{dS}(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta \mathrm{S}(t)\mathrm{I}(t) & (1) \\ \dfrac{\mathrm{dI}(t)}{\mathrm{d}t} = \beta \mathrm{S}(t)\mathrm{I}(t) - \gamma \mathrm{I}(t) & (2) \\ \dfrac{\mathrm{dR}(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma \mathrm{I}(t) & (3) \end{cases}$$

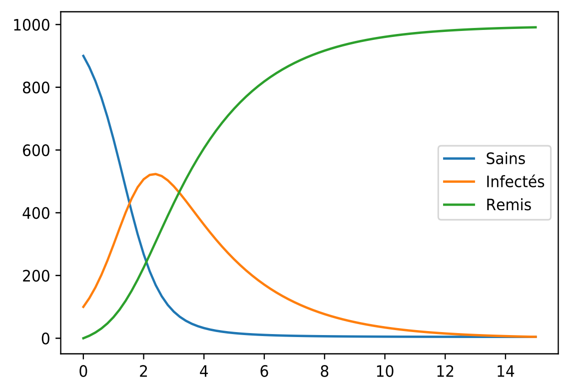
avec

$$\mathrm{R}(0) = 0, \quad \mathrm{S}(0) > 0, \quad \mathrm{I}(0) > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}(0) + \mathrm{I}(0) = \mathrm{N}.$$

où S, I et R sont trois fonctions dérivables sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

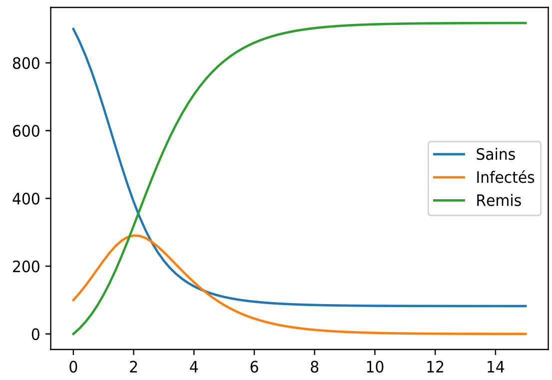
Au départ de l'épidémie, *a priori* le nombre $\mathrm{I}(0)$ de personnes infectées est très faible au regard de la population totale N.

En T.D. d'informatique, nous programmerons la résolution numérique de ce système, qui permet suivant les paramètres β, γ, N et $\mathrm{I}(0)$ d'obtenir l'évolution de l'épidémie. Voici quelques exemples :

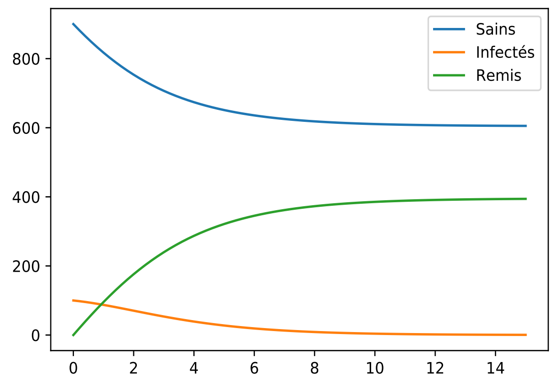


Toute la population est atteinte suite à un pic épidémique

(1). Pour tenir compte de la mortalité, on pourrait introduire une quatrième catégorie M(T) et un taux μ de mortalité s'appliquant aux infectés de sorte que $\mathrm{M}'(t) = \mu \mathrm{I}(t)$.



Stabilisation après un pic épidémique avec immunité grégaire



Stabilisation sans pic épidémique avec immunité grégaire

Exercice 1 *Quelques propriétés du modèle SIR*

Dans tout ce qui suit, le temps t appartient à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

1. Que peut-on dire de la classe de dérivabilité sur $[0\,;+\infty[$ des fonctions S, I et R ?

2. Justifier que la population totale $\mathrm{N}(t)=\mathrm{S}(t)+\mathrm{I}(t)+\mathrm{R}(t)$ est constante au cours du temps.

3. Justifier que

$$\forall t\in[0\,;+\infty[,\quad \mathrm{S}(t)=\mathrm{S}(0)\mathrm{e}^{-\beta\displaystyle\int_0^t \mathrm{I}(u)\mathrm{d}u}.$$

4. Justifier que S et I sont strictement positives et que $\mathrm{R}(t)$ est strictement positif pour $t>0$.

5. Montrer que, sur $[0\,;+\infty[$, S décroît strictement vers une limite $\mathrm{S}_\infty>0$, I tend vers 0 et R croît strictement vers une limite $\mathrm{R}_\infty<\mathrm{N}$.

6. Justifier que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{I}(u)\mathrm{d}u$ existe et est finie.

On notera $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{I}(t)\mathrm{d}t$ cette limite.

7. a) Établir les relations

$$\ln(\mathrm{S}_\infty)-\ln(\mathrm{S}(0))=-\beta\int_0^{+\infty}\mathrm{I}(t)\mathrm{d}t \text{ et } \mathrm{S}_\infty+\gamma\int_0^{+\infty}\mathrm{I}(t)\mathrm{d}t=\mathrm{I}(0)+\mathrm{S}(0).$$

b) En déduire que S_∞ vérifie la relation

$$-\ln\left(\frac{\mathrm{S}_\infty}{\mathrm{S}(0)}\right)=\frac{\beta}{\gamma}(\mathrm{N}-\mathrm{S}_\infty).$$

8. Montrer finalement qu'en se permettant l'approximation $\mathrm{S}(0)\simeq\mathrm{N}$ (le nombre initial d'infectés est très très faible au regard de la population totale), on a

$$-\ln\left(1-\frac{\mathrm{R}_\infty}{\mathrm{N}}\right) \simeq \frac{\beta}{\gamma}\mathrm{R}_\infty.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ *Taux de reproduction $\mathcal{R}_0$ et théorème du seuil*

On définit le *taux de reproduction* $\mathcal{R}_0$ par

$$\mathcal{R}_0 \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\beta \mathrm{S}(0)}{\gamma} \simeq \frac{\beta \mathrm{N}}{\gamma}.$$

En général, le nombre initial d'infectés n'est pas connu précisément – il faudrait tester toute la population pour le connaître –, mais s'il concerne quelques cas, voire quelques milliers de cas, pour une population s'évaluant en dizaines de millions ou plus, l'approximation est tout à fait recevable.

Théorème du seuil :

1. a) Montrer que si $\mathcal{R}_0 \leqslant 1$, alors I est décroissante et il n'y a pas de pic épidémique.

b) Montrer que si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors I est strictement croissante jusqu'à un pic épidémique puis décroissante.

2. $\mathcal{R}_0 \in \left]0\,;+\infty\right[$ étant fixé, montrer que l'équation

$$\ln(1-i) + \mathcal{R}_0 i = 0$$

d'inconnue i admet une unique solution dans $\left]0\,;1\right[$.

Quelques interprétations

• βN est le nombre de personnes qu'une personne infectée contamine par unité de temps et $1/\gamma$ est la durée moyenne de la période infectieuse (c'est la durée moyenne en unité de temps pour atteindre la guérison. En effet, pensez à l'espérance de la loi géométrique : si la probabilité de guérison par unité de temps est γ, alors le temps moyen pour obtenir la guérison est $1/\gamma$ unités de temps).
Donc $\mathcal{R}_0$ est le nombre moyen de « cas secondaires » dûs à une personne infectée.

• Le théorème du seuil montre l'intérêt de ramener $\mathcal{R}_0$ en-dessous de 1, et l'interprétation de $\mathcal{R}_0$ indique des stratégies pour réduire l'épidémie :
(i) confinement, distanciation sociale et fermeture de lieux fréquentés pour réduire le taux de transmission β ;
(ii) traitement médicaux pour augmenter le taux de guérison γ et réduire la période infectieuse ;
(iii) dépistage et quarantaine pour réduire simultanément β et $1/\gamma$.

• Suivant les conditions initiales, on observe que la propagation s'arrête lorsque le nombre d'immunisés R atteint un certain seuil. C'est l'**immunité grégaire ou collective**.
Pour atteindre cet état, il faut que la proportion d'immunisés soit $i = \dfrac{\mathrm{R}_\infty}{\mathrm{N}}$.
On a vu que R_∞ est implicitement défini par

$$-\ln\left(1-\frac{\mathrm{R}_\infty}{\mathrm{N}}\right) = \mathcal{R}_0\frac{\mathrm{R}_\infty}{\mathrm{N}}.$$

L'étude de la fonction $i \mapsto \ln(1-i) + \mathcal{R}_0 i$ montre que l'équation

$$\ln(1-i) + \mathcal{R}_0 i = 0$$

admet une unique solution dans $\left]0\,;1\right[$.

• Parmi les moyens de lutte, la **vaccination** permet de baisser $\mathcal{R}_0$, l'objectif étant alors de passer sous le seuil de 1.
Si une proportion p de la population est vaccinée, cela revient remplacer dans le modèle SIR initial S(0) par $(1-p)\mathrm{S}(0)$ et R(0) par $p\mathrm{S}(0)$. $\mathcal{R}_0$ devient alors $(1-p)\mathcal{R}_0$ et la condition pour qu'il n'y ait pas d'épidémie devient

$$(1-p)\mathcal{R}_0 \leqslant 1 \iff p \geqslant 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

On atteint alors une immunité collective par vaccination.
Dans son flash-presse du 15 avril 2020, l'Institut Pasteur donne les valeurs suivant de l'immunité collective

Maladie	$\mathcal{R}_0$	p
Grippe saisonnière	2	50%
Rougeole	12 – 20	90% – 95%
COVID-19 (estimé)	$3,3$	70%

Exercice 3 *Méthodes de dichotomie, du point fixe et de Newton*

Soit $\mathcal{R}_0 \in \,]\,1\,;\,+\infty\,[$. On souhaite déterminer numériquement le taux final d'immunisés $\tau = \dfrac{\mathrm{R}_\infty}{\mathrm{N}}$, défini implicitement par

$$\tau \in \,]\,0\,;\,1\,[\quad \text{et} \quad \ln(1-\tau) + \mathcal{R}_0\tau = 0.$$

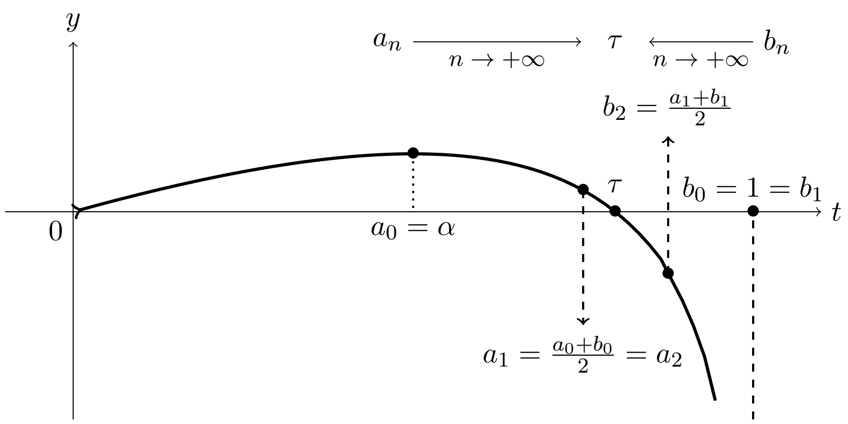
1. Soit

$$f : \,]\,0\,;\,1\,[\to \mathbb{R}, t \mapsto \ln(1-t) + \mathcal{R}_0 t.$$

a) Montrer que $f(t) = 0$ admet une unique solution.

b) On pose $\alpha = 1 - \dfrac{1}{\mathcal{R}_0}$. Justifier que $\tau \in \,]\,\alpha\,;\,1\,[$.

2. *Méthode de dichotomie*



Résolution par dichotomie

a) Justifier que l'on peut employer la méthode de dichotomie pour déterminer τ.

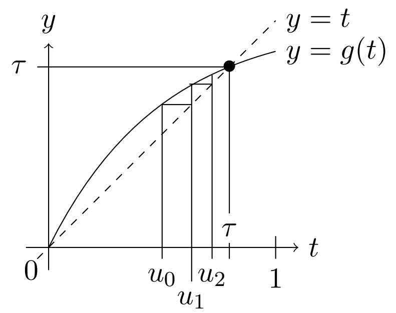
b) Définir la fonction d'en-tête `f(r,t)` où `r` recevra la valeur de $\mathcal{R}_0$.

c) Programmer une fonction `dicho(r0,e)` calculant τ avec une erreur maximale `e`.

d) Pour $\mathcal{R}_0 = 2$, combien de boucles le calcul de τ avec une précision 10^{-7} nécessite-t-il ?

e) Donner des approximations de τ à 10^{-7} près pour $\mathcal{R}_0 = 1.5$ (ébola), $\mathcal{R}_0 = 2.5$ (grippe), $\mathcal{R}_0 = 3.3$ (COVID-19 ?) puis $\mathcal{R}_0 = 15$ (rougeole).

3. *Méthode du point fixe*



Approximations successives par la méthode du point fixe

On définit

$$g : \,]\,0\,;\,1\,[\to \mathbb{R}, t \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\mathcal{R}_0 t}.$$

a) Vérifier que

$$f(t) = 0 \iff g(t) = t.$$

b) Justifier que l'intervalle $]0\,;1[$ est stable par g, puis que $[\alpha\,;1]$ est stable par g. *On pourra commencer par montrer que $g(\alpha) \geqslant \alpha$.*

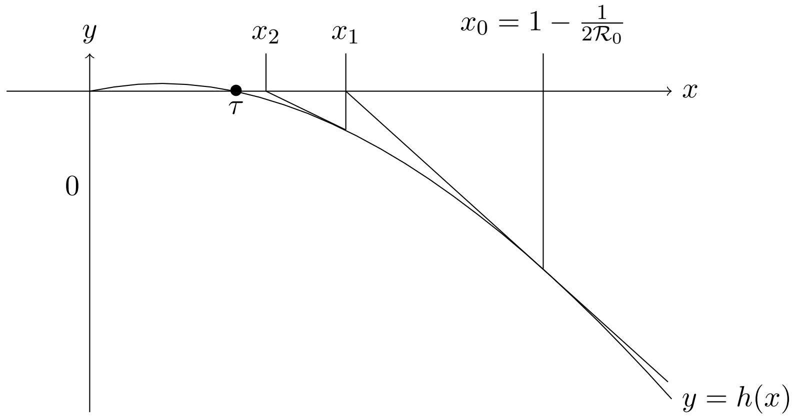
c) On pose $u_0 = \alpha$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = g(u_n)$.
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \tau| \leqslant \frac{k^n}{\mathcal{R}_0} \quad \text{avec } k = \frac{\mathcal{R}_0}{e^{\mathcal{R}_0 - 1}} \in\,]0\,;1[.$$

d) Programmer une fonction `fixe(r0,e)` calculant τ avec une erreur maximale `e`. On commencera par évaluer le nombre de boucles nécessaires pour calculer τ avec une précision `e`.

e) Donner des approximations de τ à 10^{-7} près pour $\mathcal{R}_0 = 1.5$ (ébola), $\mathcal{R}_0 = 2.5$ (grippe), $\mathcal{R}_0 = 3.3$ (COVID-19 ?) puis $\mathcal{R}_0 = 15$ (rougeole), précisant le nombre de boucles nécessaires à ses calculs.

4. *Méthode des tangentes de Newton*

On pose
$$h : x \mapsto 1 - e^{-\mathcal{R}_0 x} - x.$$
On construit une suite (x_k) suivant la méthode des tangentes de Newton en posant
$$x_0 = \frac{\alpha+1}{2} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = x_k - \frac{h(x_k)}{h'(x_k)}.$$



Méthode des tangentes de Newton

a) Justifier que la formule de récurrence
$$x_{k+1} = x_k - \frac{h(x_k)}{h'(x_k)}$$
est conforme au schéma précédent, *i.e.* que x_{k+1} ainsi défini est l'abscisse de l'intersection de la tangente à $\mathcal{C}_h$ en x_k et de l'axe des abscisses.

b) Programmer une fonction `Newton(r0,e)` calculant τ avec une erreur maximale `e`, en prenant pour condition d'arrêt que $|x_{k+1} - x_k| \leqslant$ e.

c) Donner des approximations de τ à 10^{-7} près pour $\mathcal{R}_0 = 1.5$ (ébola), $\mathcal{R}_0 = 2.5$ (grippe), $\mathcal{R}_0 = 3.3$ (COVID-19 ?) puis $\mathcal{R}_0 = 15$ (rougeole), précisant le nombre de boucles nécessaires à ses calculs.