Exercice 1 *Un algorithme pour calculer les sinus*

1. Justifier que, pour tout nombre réel x,

$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

2. On note ϕ l'application de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [-1;1], \quad \phi(t) = 3t - 4t^3$$

a) Démontrer que : $\forall t \in [-1;1], \quad \phi(t) \in [-1;1]$.

b) Établir que, pour tout couple (t,t') d'éléments de $[-1;1]$:

$$\left|\phi(t) - \phi(t')\right| \leqslant 9\left|t - t'\right|.$$

3. On définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions numériques sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = x$$

et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 2, \quad f_n(x) = 3f_{n-1}\left(\frac{x}{3}\right) - 4\left(f_{n-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)^3.$$

a) Prouver que

$$\forall x \in [-1;1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|f_n(x) - \sin x\right| \leqslant \frac{|x|^3}{2.3^n}.$$

b) Que peut-on en conclure ?

4. *Application* –
En prenant $n = 2$, montrer que $\sin(0,3) \simeq 0,296$ avec une erreur inférieure à $0,0015$.

Solution (**Ex.1 –** *Un algorithme pour calculer les sinus*)

1. On peut par exemple linéariser $\sin^3(x)$:

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{i}{8}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)$$

$$\sin^3(x) = \frac{i}{8}\left(2i\sin(3x) - 6i\sin(x)\right) = \frac{1}{4}\left(3\sin(x) - \sin(3x)\right).$$

2. **a)** Il suffit d'établir le tableau de variation de Φ pour vérifier que $\boxed{\forall t \in [-1;1],\ \phi(t) \in [-1;1].}$
Notez que ϕ est impaire, donc une étude sur $[0;1]$ suffit.

b) Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1;1]$ et

$$\forall t \in [-1;1],\ \Phi'(t) = 3 - 12t^2.$$

Comme $-1 \leqslant t \leqslant 1$, alors $0 \leqslant t^2 \leqslant 1$, donc $0 \leqslant 12t^2 \leqslant 12$ donc $-12 \leqslant -12t^2 \leqslant 0$ donc $-9 \leqslant \Phi'(t) \leqslant 3$, donc $\left|\Phi'(t)\right| \leqslant 9$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis, Φ est 9−lipschitzienne et on a

$$\boxed{\forall (t,t') \in ([-1;1])^2,\ \left|\phi(t) - \phi(t')\right| \leqslant 9\left|t - t'\right|.}$$

3. **a)** • Soit pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « $\forall x \in [-1;1],\ \left|f_n(x) - \sin x\right| \leqslant \frac{|x|^3}{2.3^n}$ ».

• Établissons $\mathcal{P}_1$, *i.e.* $\forall x \in [-1;1], |\sin x - x| \leqslant \frac{|x|^3}{6}$.
Il suffit d'établir l'inégalité sur $[0;1]$ par parité (plus exactement toutes les fonctions intervenant sont impaires).
La formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire

$$\forall x \in [0;1], \sin(x) = x + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\sin^{(3)}(t)\mathrm{d}t$$

D'où

$$\forall x \in [0;1], |\sin(x) - x| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\sin^{(3)}(t)\mathrm{d}t\right|$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\forall x \in [0;1], |\sin(x) - x| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(x-t)^2}{2}\sin^{(3)}(t)\right|\mathrm{d}t$$

Or : $\forall t \in [0;x], \quad 0 \leqslant \frac{(x-t)^2}{2}\sin^{(3)}(t) \leqslant \frac{(x-t)^2}{2}$.
Par croissance de l'intégrale

$$\forall x \in [0;1], |\sin(x) - x| \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire en calculant l'intégrale majorante

$$\forall x \in [0;1], |\sin(x) - x| \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

On peut aussi, par étude sur $[0;1]$ de $x \mapsto \sin(x) - x$ puis de $x \mapsto \frac{x^3}{6} - x +$

$\sin(x)$, *montrer successivement*

$$\forall x \in [0;1], \quad 0 \leqslant x - \sin(x),$$

$$\forall x \in [0;1], \quad x - \sin(x) \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$.Soit $x \in [-1;1]$. En remarquant que $f_{n+1}(x) = \Phi(f_n(x/3))$ et $\sin x = \Phi(\sin(x/3))$, on a :

$$\begin{aligned}\left|f_{n+1}(x) - \sin x\right| &= \left|\Phi(f_n(x/3)) - \Phi(sin(x/3))\right| \\ &\leqslant 9\left|f_n(x/3) - \sin(x/3)\right| \text{ (d'aprés 1.b)} \\ &\leqslant 9\frac{\left|x/3\right|^3}{2.3^n} \text{ (d'aprés } \mathcal{P}_n) \\ &\leqslant \frac{\left|x\right|^3}{2.3^{n+1}}.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$.

- Par récurrence, on a prouvé $\mathcal{P}_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x|}{2.3^n} = 0$ pour $x \in [-1;1]$, on en déduit par encadrement $\boxed{\forall x [-1;1],\ \sin x = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x).}$

4. - $f_2(x) = 3 \times \frac{x}{3} - 4\left(\frac{x}{3}\right)^3 = x - \frac{4}{27}x^3$, donc $f_2(0,3) = 0,3 - 0,004 = 0,296$.
   - $\frac{0,3^3}{2.3^2} = \frac{3}{2.10^{-3}} = 1,5.10^{-3} = 0,0015$.
   - D'après la majoration précédente $\sin(0,3) \simeq 0,296$ avec une erreur inférieure à $0,0015$.