

Durée : 3 heures.

On s'efforcera d'argumenter rigoureusement ses raisonnements en évitant le style télégraphique et en rédigeant de vraies phrases (sujet, verbe et compléments éventuels!).

On encadrera la réponse finale de chaque question.

Si on est amené à admettre la réponse à une question, *on l'indiquera clairement sur la copie.*

☆☆☆☆☆

Les parties 2 à 6 sont indépendantes entre elles.

Partie 1 – Transformation d'Abel

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de nombres de $\mathbb{C}$. Établir la formule de sommation par parties

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1}(u_{k+1} - u_k) + \sum_{k=0}^{n-1} u_k(v_{k+1} - v_k) = u_n v_n - u_0 v_0 \quad (1)$$

2. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ deux suites de nombres de $\mathbb{C}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$, ainsi que $B_0 = 0$ (comme toute somme vide).

Établir, à l'aide de la relation (1), la formule appelée *transformation d'Abel*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad (2)$$

Partie 2 – Application aux calculs de sommes finies classiques

3. a) En prenant : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = k$ et $b_k = 1$ dans la formule (2), retrouver la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n k$.

- b) En prenant : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = k^2 - k$ et $b_k = 1$ dans la formule (2), retrouver la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n k^2$.

4. On définit la *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n \geq 0}$ par

$$F_0 = F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

- a) En prenant : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = F_k$, ainsi que : $b_1 = 1$ et $\forall k \geq 2$, $b_k = 0$ dans la formule (2), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1$.

- b) En prenant : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = F_k$, ainsi que : $b_1 = 0$ et $\forall k \geq 2$, $b_k = F_{k-2}$ dans la formule (2), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}$.

Partie 3 – Critère de Dirichlet et application

5. On reprend les notations de la question 2. et on suppose d'une part que la suite (a_n) est une suite de réels décroissante et convergente de limite nulle, et d'autre part que la suite (b_n) est bornée.

Démontrer que la série de terme général $a_n b_n$ converge.

Cette propriété est connue sous le nom de *critère de Dirichlet*.

6. Soit $x \in [0; 2\pi[$ et $p \in]0; +\infty[$. On s'intéresse à la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n^p}$.

- a) On suppose dans cette question que $x = 0$. Étudier la convergence de la série précédente.

Dans toute la suite de cette question, on suppose $x \in]0; 2\pi[$.

- b) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{n=1}^m e^{inx} \right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$.

- c) En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n^p}$.

- d) À quelle condition nécessaire et suffisante cette série est-elle absolument convergente ?

- e) Quelle est la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n}$?

Partie 4 – Théorème de Leibniz et irrationalité de e

7. a) Rappeler précisément les hypothèses du théorème de Leibniz pour assurer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.
 b) À l'aide du critère de Dirichlet (énoncé dans la question 5.), démontrer que sous ces hypothèses, une série alternée converge.
 c) Rappeler sans démonstration la majoration du reste d'une telle série.

8. L'objectif de cette question est de démontrer que e est un nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $e = \frac{p}{q}$.

On raisonne par l'absurde et, e étant strictement positif, on suppose qu'il existe un couple d'entiers $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $e = \frac{p}{q}$.

- a) Justifier que $s = p! \left(\frac{q}{p} - \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{k!} \right)$ est un nombre entier.

- b) Justifier que $s = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k p!}{k!}$, et en déduire que $|s| \leq \frac{1}{p+1}$.

- c) Montrer que si p est impair alors s est strictement positif. *Indication : on pourra regrouper deux par deux les termes dans l'expression précédente de s .*

- d) Qu'en est-il si p est pair ?

- e) Conclure.

Partie 5 – Formule sommatoire d'Abel et constante d'Euler

9. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle. Pour tout x réel strictement positif, on pose

$$A(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} a_n = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} a_n$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x .

En particulier, si $x < 1$, cette définition entraîne que $A(x) = 0$, comme toute somme vide.

Soit φ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

Montrer, à l'aide de la transformation d'Abel (2), que

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \sum_{1 \leq n \leq x} a_n \varphi(n) = A(x) \varphi(x) - \int_1^x A(u) \varphi'(u) du \quad (3)$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule sommatoire d'Abel*.

10. Démontrer à l'aide d'une série que la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

est convergente.

On note γ sa limite, appelée *constante d'Euler*.

11. a) Montrer que : $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

b) Déterminer la nature des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor u \rfloor}{u^2} du$ et $\int_1^{+\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^2} du$.

c) Montrer à l'aide de (3) que, pour tout $x \geq 1$,

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n} = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor u \rfloor}{u^2} du.$$

d) En déduire

$$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^2} du.$$

Partie 6 – Un peu plus sur γ , $\ln(2)$ et $\ln(3)$

On rappelle (cf. partie précédente) que

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$$

et on continue de noter, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

12. *Un encadrement de γ*

a) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$.

b) En déduire la variation de (u_n) .

c) En déduire aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 1 - \ln(2)$.

d) Montrer finalement que : $1 - \ln(2) \leq \gamma < 1$.

13. Un développement en série de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$

a) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

c) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

d) Proposer une démonstration de l'identité

$$\ln(3) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k} \right)$$

14. Un développement asymptotique de la somme partielle de la série harmonique

a) Soit $(a_n)_{n \geq n_0}$ et $(b_n)_{n \geq n_0}$ deux suites réelles ne s'annulant pas.

Montrer l'équivalence

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \geq n_0, \forall n \geq N_0, |a_n - b_n| \leq \varepsilon |b_n|.$$

b) Soit $\sum_{n \geq n_0} a_n$ et $\sum_{n \geq n_0} b_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs.

On note, pour $n \geq n_0$, $R_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $R'_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$ leur reste respectif.

On suppose que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$.

Montrer que

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} R'_n.$$

c) Justifier que la série de terme général $v_n = \frac{-1}{2n(n+1)}$ converge et déterminer explicitement son reste d'ordre n défini par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

d) Soit $w_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $w_n = \frac{1}{n} - (\ln(n) - \ln(n-1))$.

Montrer que la série de terme général w_n converge et donner un équivalent de son reste d'ordre n .

Que vaut sa somme ?

e) Montrer finalement que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Les séries divergentes sont l'œuvre du démon, et fonder la moindre démonstration sur elles est une honte. On peut obtenir n'importe quel résultat que l'on souhaite démontrer à partir de ces séries, dont l'utilisation a conduit à une multitude de désastres et de paradoxes.

Niels ABEL (1802–1829)

