Liste des commentaires :

1) : La récurrence n'est pas nécessaire : il s'agit d'un simple télescopage.
3.a) : Toute réponse non conforme à la **formule à connaître** est évidemment fausse. Donc si on a trouvé autre chose que $n(n+1)/2$, on doit signaler que le résultat obtenu est faux.
Attention à ne pas utiliser la formule à démontrer (au rang $n-1$ par exemple). C'est logiquement incohérent.
3.b) : La **formule** donnant la somme des carrés des entiers consécutifs est **à connaître**.
4.a) : On n'a pas $B_k = 0$ mais $B_k = 1$ pour tout $k \geqslant 1$.
La méthode est imposée par l'énoncé, obtenir le résultat par toute autre méthode n'apportera pas de points...
Question facile si on fait attention : $\sum_{k=1}^{n} F_k b_k = F_1 = 1$ car $b_1 = 1$ et pour tout $k \geqslant 2$, $b_k = 0$.
5) : $a_{n+1} - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ et (B_n) bornée ne suffisent pas pour affirmer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(a_{n+1} - a_n)B_n$ converge. Avec $\forall n \geqslant 1, a_n = \ln(n)$ et $B_n = 1$ alors $(a_{n+1} - a_n)B_n = \ln(1 + 1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{/}n$ et la série diverge.
Étudier la série des différences associée à la suite $u_n \overset{\text{déf.}}{=} (a_{n+1} - a_n)B_n$ est très compliquée : $u_{n+1} - u_n =???$.
Il faut prendre le temps qu'expliquer pourquoi $a_nB_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Écrire « (a_n) converge **vers 0** et (B_n) est bornée » suffit, car alors $a_nB_n = O(a_n)$.
Rien ne dit que la série de t.g. b_n converge. D'ailleurs question 7.b) on appliquera le critère de Dirichlet avec $b_n \overset{\text{déf.}}{=} (-1)^n$ or $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n$ diverge grossièrement.
Comme a décroît, $a_{k+1} - a_k \leqslant 0$ donc $|a_{k+1} - a_k| = a_k - a_{k+1}$.
Attention ! $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ n'assure pas que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Contre-exemple : $a_n \overset{\text{déf.}}{=} 1/n$. Tout ce qu'on peut dire est qu'**il n'y a pas divergence grossière.**
Dans tous les **principes de comparaison**, on **compare** les **termes généraux, pas les sommes partielles**.
6.a) : Il faut citer « Riemann », en disant « série de Riemann » ou « par la propriété de Riemann ».
On de demande pas de redémontrer le cours !
Attention à la notation des suites ! u_n est un nombre (le $n-$ème terme), (u_n) désigne (toute) la suite.
Dire qu'il y a convergence si $p > 1$ est vrai mais insuffisant. Car dire « ça converge si $p > 1$ » ne signifie pas « ça diverge si $p \leqslant 1$.
$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p}$ n'est pas une série géométrique, lourde erreur... la raison ne saurait dépendre de l'indice n ! ! !
6.b) : Pour sommer suivant la formule des suites géométriques, il faut préciser que e^{ix} car on a choisi $x \in]\,0\,;\,2\pi\,[$.
La formule de sommation des termes géométriques est à connaître **parfaitement**.
À savoir faire !
Pour évacuer les valeurs absolues, il faut préciser que $\sin(x/2) > 0$ car $x \in]\,0\,;\,2\pi\,[$.
6.c) : Il n'y a pas absolue convergence lorsque $p \leqslant 1$.
Horreur : $\sin(x/2) \leqslant 1$ donc $\frac{1}{\sin(x/2)} \leqslant 1$? ? ?
Pour utiliser le critère de Dirichlet abec $b_n = e^{inx}$, ce n'est pas (b_n) qui doit être bornée mais la suite $\left(\sum_{n=1}^{m} e^{inx}\right)_{m\geqslant 1}$ qui doit être bornée.
On ne peut pas comparer ($\leqslant$ ou $\geqslant$) deux nombres complexes non réels.
Les sommes partielles bornées n'entraînent pas la convergence de la série. Contre-exemple : $\forall n \geqslant 0, \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right| \leqslant 1$ (la somme valant 1 ou 0) mais la série $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k$ diverge grossièrement.
6.d) : Condition nécessaire et suffisante signifie qu'on veut savoir quand il y a convergence, et quand il n'y a pas convergence. Une équivalence ou un “si, et seulement si,...”.
Attention ! $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ n'assure pas que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Contre-exemple : $a_n \overset{\text{déf.}}{=} 1/n$. Tout ce qu'on peut dire est qu'**il n'y a pas divergence grossière.**
La série $\sum_{n\geqslant 1} \left|e^{inx}\right|$ diverge grossièrement puisque $\left|e^{inx}\right| = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$.
6.e) : Pour appliquer le critère de Dirichlet (ce qui n'est pas le meilleur argument mais peut fonctionner), ce ne sont pas les suite $(\sin(nx))$ et $(\cos(nx))$ qui doivent être bornées mais les suites $(\sum_{k=1}^{n}\sin(kx))$ et $(\sum_{k=1}^{n}\cos(kx))$. En particulier, $|\sin(kx)| \leqslant 1$ entraîne

seulement $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| \leqslant n$, ce qui n'est pas une preuve de bornitude (majorant dépend de n).
À priori, on devrait utiliser ce qui précède, non ?
Le théorème de comparaison série/intégrale ne s'applique pas ici : il faudrait une fonction f positive décroissante...
7.a) : Ce type de question de cours peut se solder par juste ou faux, tous les points ou aucun.
La positivité de la suite n'est pas une hypothèse du critère des séries alternées. Ça n'apporte rien puisque toute suite réelle décroissante de limite nulle est positive.
La **stricte** décroissance n'est pas une hypothèse nécessaire.
Il n'y a pas d'équivalence dans le théorème de Leibniz : la série de t.g. $(-1)^n u_n$ peut converger sans que u_n soit décroissante de limite nulle. Prendre par exemple $u_n = (-1)^n/n^2$...
7.b) : On prend $b_n = (-1)^n$ mais c'est la suite (B_n) qui doit être bornée.
Attention à la notation des suites ! u_n est un nombre (le $n-$ème terme), (u_n) désigne (toute) la suite.
Hors sujet : on souhaite **démontrer** le théorème de Leibniz.
A priori, on utilise ce qui précède.
Attention à na pas confondre la notation des séries et celle des suites.
7.c) : Question de cours à savoir !
Hors sujet : on ne demande pas le signe du reste.
Les valeurs absolues autour du reste sont indispensables.
8.a) : Un équivalent ne fournit jamais une égalité.
$\mathrm{e} \simeq 2,718...$ n'est pas un nombre entier !
8.b) : La convergence de la série exponentiellet de paramètre -1 fait partie du cours (pas à redémontrer).
p est fixé dans l'énoncé et ne peut pas tendre vers $+\infty$.
8.c) : L'énoncé est précis : on demande le signe **strict**.
10) : Attention à la notation des suites ! u_n est un nombre (le $n-$ème terme), (u_n) désigne (toute) la suite.
Question très classique !
On attend une démonstration, pas un rappel.
$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ n'implique pas $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'ailleurs $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma \geqslant 1-\ln(2) > 0$.
$u_{k+1} - u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ n'entraîne pas $\sum_{k\geqslant 1}(u_{k+1}-u_k)$ converge. Exemple : $\ln(k+1)-\ln(k) = \ln(1+1/k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ mais $\ln(k+1)-\ln(k) \underset{k\to+\infty}{\sim} 1/k$ entraîne que $\sum_{k\geqslant 1}(\ln(k+1)-\ln(k))$ diverge.
11.a) : $x \geqslant \lfloor x\rfloor$ et non $x \leqslant \lfloor x\rfloor$! ! !
On ne dispose pas de théorème d'encadrement pour les équivalents.
11.b) : Ne pas anticiper en disant que d'après ce qui suit la première intégrale devrait converger. Elle diverge.
Écrire $\int_1^{+\infty} \ldots \mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \ldots \mathrm{d}t$ suppose déjà l'existence de ces intégrales.
Si on utilise le critère des équivalents pour établir la divergence, il faut mentionner la positivité (ou au moins le signe constant.
Les fonctions étudiées ici ne sont pas continues mais « continues par morceaux ».
Attention à la notation des fonctions.
11.c) : Il faut définir clairement φ : ensemble de départ ? d'arrivée ? et dire qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ pour utiliser ce qui précède.
12.a) : À savoir faire !
Un équivalent ne donne pas le signe de la différence : $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}$ n'indique pas qui est le plus grand des deux.
L'énoncé habituel de l'inégalité des accroissements finis ne donne pas le signe strict.
Le développement de $\ln(n+1)-\ln(n)$ ne donne pas le signe de la différence : $n^2 - 100 = n^2 + o\left(n^2\right)$ me permet-il de dire que $n^2 - 100 \geqslant n^2$? ? ?
12.b) : Il faut quantifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n \ldots$.
Attention à la notation des suites.
12.c) : On ne place jamais « $\forall n \in \mathbb{N}$ » dans la propriété de récurrence lorsqu'on fait une récurrence sur n.
Pour une inégalité, on n'effectue que des passages à la limite avec des inégalités **larges** : $\forall n \geqslant 1, 1 + \frac{1}{n} > 1$ mais $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$...
12.d) : Remarque que $\forall n \geqslant 2, u_n < u_1 = 1$ est insuffisant pour affirmer que $\gamma < 1$ car on ne prolonge que des inégalités **larges** par passage à la limite.
13.a) : Si on veut appliquer le critère de Dirichlet, c'est la suite (B_n) et non (b_n) qui doit être bornée.
Attention à la notation des suites.
À savoir faire.
13.b) : Si dans une somme $1 \leqslant 2k \leqslant 2n$, alors $1 \leqslant k \leqslant n$...
14.a) : On demande de **démontrer l'équivalence**.
14.c) : Si on utilise le critère des équivalents, il faut préciser que les t.g. sont de signes constants, ici négatifs.