

Durée : 4 heures.

On s'efforcera d'argumenter rigoureusement ses raisonnements en évitant le style télégraphique et en rédigeant de vraies phrases (sujet, verbe et compléments éventuels!).

On encadrera la réponse finale de chaque question.

Si on est amené à admettre la réponse à une question, *on l'indiquera clairement sur la copie.*

☆☆☆☆☆

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 - Étude d'une fonction définie par une série

Soit α un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x , on pose

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

On note I le domaine de définition de

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Q1. a) Justifier que $I = \mathbb{R}^+$.

b) Soit $0 < a < b$ deux réels. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_{\infty, [a; b]} \leq \frac{n^\alpha b e^{-na}}{n^2 + 1}.$$

c) Justifier *rigoureusement* que S est continue sur $]0; +\infty[$.

Q2. a) Donner une condition *nécessaire et suffisante* pour que la série des fonctions f_n converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

b) Dans ce cas, la fonction S est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?

Jusque la fin de cet exercice, on suppose dorénavant $\alpha \geq 2$.

Q3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k/n}.$$

b) On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k/n}$.

Montrer que $u_n = \frac{1}{2n} \times \frac{e^{-(n+1)/n}}{1 - e^{-1/n}}$, puis que (u_n) converge vers une limite strictement positive à déterminer.

c) Justifier *rigoureusement* que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Q4. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $S\left(\frac{1}{n}\right) \geq u_n$ et en déduire que S n'est pas continue en 0.

Exercice 2 - Développement d'une intégrale en somme

Q5. Pour $(k, p) \in \mathbb{N}^2$, on considère, sous réserve d'existence,

$$I_{p,k} = \int_0^1 x^p \ln^k(x) dx.$$

- a) Justifier l'existence de $I_{p,k}$ pour tout $(k, p) \in \mathbb{N}^2$.
- b) Exprimer, pour $(p, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $I_{p,k}$ en fonction de $I_{p,k-1}$.
- c) En déduire que, pour tout $(p, k) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$.

Q6. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\forall x \in]0; 1], \quad f_n(x) = \frac{(x \ln(x))^n}{n!},$$

ainsi que l'intégrale I définie, sous réserve d'existence, par

$$I = \int_0^1 x^x dx.$$

- a) Justifier l'existence de I .
- b) Montrer, à l'aide du théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque, que

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

- c) Justifier que les fonctions f_n sont prolongeables par continuité sur le segment $[0; 1]$ et démontrer l'égalité précédente à l'aide du théorème d'intégration terme à terme lié à la convergence uniforme.

Exercice 3 - Autour des polynômes de Tchebychev

Dans ce problème, on étudie les polynômes de Tchebychev de première espèce définis par

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

On note, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $\|P\|_\infty$ la norme infinie de P sur le segment $[-1; 1]$

$$\|P\|_\infty \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{x \in [-1; 1]} |P(x)|.$$

On notera que $\|P\|_\infty$ est toujours définie puisque P est une fonction continue.

On rappelle qu'un polynôme est dit *unitaire* lorsque son coefficient dominant est égal à 1.

Partie 1 – Premières propriétés

Q7. Calculer T_2 et T_3 .

Q8. Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n \quad \text{et} \quad \text{dom}(T_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

où, pour tout polynôme P non nul, $\text{dom}(P)$ désigne le coefficient dominant de P .

Q9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, T_n a la même parité que l'entier n .

Q10. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \quad (\heartsuit).$$

On notera que cette relation induit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1; 1], \quad T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x)).$$

Q11. Que valent, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n(1)$ et $T_n(-1)$?

Q12. En dérivant deux fois $(\heartsuit)$ par rapport à θ la relation précédente, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1; 1], \quad (1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

Q13. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = 0.$$

Partie 2 – Étude d'un endomorphisme

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$ et on considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_m[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X], \quad \varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'.$$

Q14. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$.

Q15. Déterminer la matrice M représentant l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$. On donnera explicitement les coefficients $(m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m+1}$ en fonction de i et j .

Q16. φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$?

Q17. Justifier que φ est diagonalisable et préciser son spectre, son polynôme caractéristique et la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

Q18. Déterminer une base $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}_m[X]$ formée de vecteurs propres de φ échelonnée en degré.

Q19. On note Π la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{T}$ et D la matrice $\Pi^{-1}M\Pi$. Que vaut D ?

Soit ψ l'endomorphisme $\frac{1}{m^2}\varphi$.

On note N la matrice représentant ψ dans la base $\mathcal{B}$ et Δ la matrice $\Pi^{-1}N\Pi$.

Q20. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta^n$.

Q21. Justifier que l'endomorphisme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n$ est un projecteur et préciser son rang.

Partie 3 – Racines et extrema de T_n sur $[-1; 1]$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Q22. À l'aide de $(\heartsuit)$, déterminer toutes les racines de T_n et justifier que T_n est scindé à racines simples.

Q23. Justifier que $\|T_n\|_\infty = 1$.

Q24. Montrer que, dans $[-1; 1]$, l'équation $|T_n(x)| = 1$ possède exactement $n + 1$ solutions.

Q25. En déduire les racines de T_n' .

Q26. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_k(\operatorname{ch}(\theta)) = \operatorname{ch}(k\theta).$$

Q27. En déduire que, si $x \notin [-1; 1]$, alors $|T_n(x)| > 1$.

Partie 4 – Approximation uniforme de la fonction nulle

Cette partie utilise des résultats de la partie précédente que l'on pourra admettre.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette partie, on montre que le polynôme

$$t_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2^{n-1}} T_n$$

est un unitaire de degré n réalisant le minimum de la norme infinie sur $[-1; 1]$, *i.e.* tel que pour tout polynôme $P \neq t_n$ tel que $\deg(P) = n$ et $\text{dom}(P) = 1$, $\|P\|_\infty \geq \|t_n\|_\infty$.

Q28. Justifier que $\|t_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Q29. Soit un polynôme P unitaire de degré n . On raisonne par l'absurde en supposant que $\|P\|_\infty < \|t_n\|_\infty$ et on pose $Q = t_n - P$.

a) Justifier que $\deg(Q) \leq n - 1$.

b) Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose : $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Montrer que Q change de signe dans chacun des n intervalles $]x_k; x_{k+1}[$ (où $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$).

c) Justifier que Q possède au moins n racines distinctes.

d) En déduire une contradiction.

e) Qu'a-t-on démontré ?

Économe de son temps comme de son argent, Tchebychev n'aimait pas enseigner. Mauvais pédagogue, il engueulait sans cesse ses élèves. Maladivement ponctuel, il arrêta ses cours à la seconde près, souvent en milieu d'une phrase... que du bonheur pour ses élèves !



Pafnouti TCHEBYCHEV (1821–1904)

Questions qu'il faut avoir traitées

Q1.a)b) - Q2 - Q3.b) - Q4

Q5.a)b)c) - Q6.a)

Q7 - Q8 - Q9 - Q11 - Q12 - Q14 - Q15 - Q16 - Q17

Q22 - Q23 - Q24