

Exercice 1 - Étude d'une fonction définie par une série

- Q1. a)**
- Si $x < 0$ alors $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{xe^{-nx}}{n^{2-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ car $n^{2-\alpha} = o(e^{-nx})$. Donc la série de t.g. $f_n(x)$ diverge grossièrement.
 - Si $x = 0$, alors la série de t.g. $f_n(x)$ est la série nulle, donc converge.
 - Si $x > 0$ alors $n^2 f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{xn^{4-\alpha}}{e^{nx}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $n^{4-\alpha} = o(e^{nx})$. Donc $f_n(x) = o(1/n^2)$ et la série de t.g. $f_n(x)$ converge par domination puisque la série de Riemann de t.g. $1/n^2$ converge ($2 > 1$).

$$\boxed{\text{Donc } I = \mathbb{R}^+}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\forall x \in [a; b], 0 < x \leq b$ et $-na \geq -nx$ donc $e^{-na} \geq e^{-nx}$, d'où $\forall x \in [a; b], |f_n(x)| \leq \frac{n^\alpha b e^{-na}}{n^2 + 1}$.
Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_{\infty, [a; b]} \leq \frac{n^\alpha b e^{-na}}{n^2 + 1}.$$

- c)** Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. Comme en a), $\frac{n^\alpha b e^{-na}}{n^2 + 1} = o(1/n^2)$ et la série de t.g. $\|f_n\|_{\infty, [a; b]}$ converge par majoration. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a; b]$.

Comme de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a; b]$, S est continue sur $[a; b]$.

Ainsi S est continue sur tout segment $[a; b]$ de $]0; +\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc } S \text{ est continue sur }]0; +\infty[}.$$

- Q2. a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions les variations sur $\mathbb{R}^+$ de $g_n : x \mapsto xe^{-nx}$. g_n est dérivable et $g'_n : x \mapsto e^{-nx}(1 - nx)$, donc g_n est croissante sur $[0; 1/n]$ et décroissante sur $[1/n; +\infty[$.

Comme g_n est positive, $\|g_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} = g_n(1/n) = e^{-1}/n$. Et comme $\frac{n^\alpha}{n^2 + 1} > 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} = \frac{n^{\alpha-1} e^{-1}}{n^2 + 1}.$$

$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n^{3-\alpha}}$ donc par équivalence de t.g. positifs, la série de t.g. $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+}$ converge si, et seulement si, $3 - \alpha > 1$ i.e. $\alpha < 2$ d'après la propriété de Riemann.

$\boxed{\text{La série des fonctions } f_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}^+ \text{ si, et seulement si, } \alpha < 2.}$

- b)** Dans ce cas, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$, et comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$,

$$\boxed{\text{la fonction } S \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}.$$

Jusque la fin de cet exercice, on suppose dorénavant $\alpha \geq 2$.

- Q3.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

- a)** $R_n(1/n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k^\alpha}{n(k^2 + 1)} e^{-k/n} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k^\alpha}{k^2 + 1} e^{-k/n}$
or $\forall k \geq n+1, \frac{k^\alpha}{k^2 + 1} \geq \frac{k^\alpha}{2k^2} \geq \frac{1}{2} k^{\alpha-2} \geq \frac{1}{2}$ car $\alpha \geq 2$.

$$\boxed{\forall n \geq \mathbb{N}^*, R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k/n},}$$

la convergence de la dernière série étant assurée par majoration par le t.g. de $R_n(1/n)$.

- b)** • $\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k/n} = e^{-(n+1)/n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k/n} = e^{-(n+1)/n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(e^{-1/n}\right)^k$ et en reconnaissant une série géométrique de raison $e^{-1/n} \in]0; 1[$,

$$\boxed{u_n = \frac{1}{2n} \times \frac{e^{-(n+1)/n}}{1 - e^{-1/n}}.}$$

- $1 - e^{-1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $e^{-(n+1)/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-1}$ donc

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e} > 0.}$$

c) Supposons que $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq R_n(1/n) \leq \|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+}$, $R_n(1/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par encadrement.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq R_n(1/n)$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par encadrement, ce qui est exclu.

Il est impossible que $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}^+ .}$

Q4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $S(1/n)$ est la somme d'une série à t.g. positifs, elle est plus grande que son reste d'ordre n , donc

$$S(1/n) \geq R_n(1/n) \geq u_n \geq 0.$$

Supposons S continue en 0 : $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} S(0) = 0$.

Par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > 0$: ceci est absurde, donc

$\boxed{S \text{ n'est pas continue en } 0.}$

Exercice 2 - Développement d'une intégrale en somme

Q5. a) Pour tout $(k, p) \in \mathbb{N}^2$, $x \mapsto x^p \ln^k(x)$ est continue sur $]0; 1]$ et

$$x^{p+1/2} \ln^k(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc $x^p \ln^k(x) = o(1/\sqrt{x})$ or $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ est intégrable sur $]0; 1]$ (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$).

Par domination,

$\boxed{I_{p,k} \text{ existe pour tout } (k, p) \in \mathbb{N}^2.}$

b) Soit $(p, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ $u : x \mapsto \ln^k(x)$ et $v : x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1]$ avec $u(x)v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc en intégrant par parties

$$I_{p,k} = \left[\frac{x^{p+1} \ln^k(x)}{p+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1} k \ln^{k-1}(x)}{(p+1)x} dx.$$

$$\boxed{\text{Pour } (p, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, I_{p,k} = -\frac{k}{p+1} I_{p,k-1} .}$$

c) Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k : \ll \forall p \in \mathbb{N}, I_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}} \gg$

• $\forall p \in \mathbb{N}, I_{p,0} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$, donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_{k-1}$.

$\forall p \in \mathbb{N}, I_{p,k} = -\frac{k}{p+1} I_{p,k-1} = -\frac{k}{p+1} \times \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(p+1)^k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$, donc $\mathcal{P}_k$ est vérifiée.

• Par récurrence, on a démontré

$$\boxed{\text{Pour tout } (p, k) \in \mathbb{N}^2, I_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}} .}$$

Q6. a) $g : x \mapsto x^x = \exp(x \ln(x))$ est continue sur $]0; 1]$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

$\boxed{\text{L'intégrale faussement impropre } I \text{ existe.}}$

b) • Les fonctions f_n sont intégrables d'après la question précédente : $\int_0^1 f_n = \frac{1}{n!} I_{n,n}$.

• Comme série exponentielle de paramètre $x \ln(x)$, on a

$$\sum_{n \geq 0} f_n \xrightarrow{\text{cvS}} S :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x \ln(x)) = x^x.$$

• S est continue sur $]0; 1]$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{n!} |I_{n,n}|$ (car f_n est de signe constant) donc $\int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$. Or : $\forall n \geq 1, 0 \leq \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{n^2}$, donc la série de terme général $\int_0^1 |f_n|$ converge.

Par le théorème d'intégration terme à terme

$$\int_0^1 S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx,$$

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

c) • *Petite étude préalable...*

Soit $h :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \ln(x)$. h est dérivable avec $h' : x \mapsto \ln(x) + 1$, donc h est décroissante sur $]0; 1/e]$ puis croissante, tendant vers 0 en 0 et nulle en 1 (donc négative). Ainsi

(i) h est prolongeable en une fonction $\tilde{h}$ continue sur $[0; 1]$ en posant $\tilde{h}(0) = 0$,

$$(ii) \|h\|_{\infty} = \left\| \tilde{h} \right\|_{\infty} = |h(1/e)| = \frac{1}{e}.$$

- Du coup chaque f_n est prolongeable par continuité en une fonction $\tilde{f}_n$ continue sur $[0; 1]$.
- De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\| \tilde{f}_n \right\|_{\infty} = \frac{(1/e)^n}{n!}.$$

Or la série de terme général $\frac{(1/e)^n}{n!}$ est une série exponentielle donc convergente.

Donc la série des $\tilde{f}_n$ est normalement convergente, donc uniformément convergente sur $[0; 1]$.

Ainsi le théorème d'intégration terme à terme en cas de convergence uniforme sur un segment pour les fonctions $\tilde{f}_n$ continues s'applique :

$$\int_0^1 \tilde{S}(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \tilde{f}_n(x) dx$$

où $\tilde{S}$ est le prolongement par continuité de S en 0 (précisément $\tilde{S}(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} x^x$). On a bien :

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice 3 - Autour des polynômes de Tchebychev

Partie 1 – Premières propriétés

Q7. $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$

Q8. Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons-la vraie aux rangs n et $n + 1$. Alors il existe Q tel que $T_{n+1} = 2^n X^{n+1} + Q$ avec $\deg(Q) \leq n$.

Donc $T_{n+2} = 2^{n+1} X^{n+2} + 2XQ - T_n$ avec $\deg(2XQ - T_n) \leq n + 1$, donc T_{n+2} est de degré $n + 2$ et de coefficient dominant 2^{n+1} : la propriété est vraie au rang $n + 2$.

- Par récurrence j'ai démontré

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n \text{ et } \text{dom}(T_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Q9. Notons que la propriété voulue peut s'écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(-X) = (-1)^n T_n(X).$$

Raisonnons à nouveau par récurrence sur n . L'initialisation est acquise. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons cette propriété acquise pour n et $n + 1$.

$$T_{n+2}(-X) = 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) = -(-1)^{n+1} 2X T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(-X) = (-1)^{n+2} (2X T_{n+1} - T_n) = (-1)^{n+2} T_{n+2} \text{ donc la propriété est vraie au rang } n + 2.$$

Par récurrence, j'ai établi que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, T_n \text{ a la même parité que l'entier } n.$$

Q10. Une ultime récurrence sur n dont je ne détaille que les points essentiels.

- $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0.\theta)$ et $T_1(\cos(\theta)) = \cos(1.\theta)$.
- $\cos((n+2)\theta) = \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta)$
 $= \cos(n\theta)(2\cos^2(\theta) - 1) - 2\sin(n\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)$
 $= 2\cos(\theta)(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)) - \cos(n\theta)$
 $= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$
 $= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))$

- Par récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Q11. $T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n.0) = 1$ et $T_n(-1) = T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ ou en utilisant la parité,

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n(1) = 1 \text{ et } T_n(-1) = (-1)^n.$$

Q12. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} T'_n(\cos(\theta))(-\sin(\theta)) &= -n\sin(n\theta) \text{ puis} \\ T''_n(\cos(\theta))\sin^2(\theta) - T'_n(\cos(\theta))\cos(\theta) &= -n^2\cos(n\theta) \text{ d'où} \\ (1 - \cos^2(\theta))T''_n(\cos(\theta)) - \cos(\theta)T'_n(\cos(\theta)) &+ n^2T_n(\cos(\theta)). \end{aligned}$$

Comme tout x de $[-1; 1]$ peut s'écrire $x = \cos(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R},$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1; 1], \quad (1 - x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

Q13. Le polynôme $(1 - X^2)T''_n - XT'_n + n^2T_n$ admet une infinité de racines (tous les $x \in [-1; 1]$), donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 - X^2)T''_n - XT'_n + n^2T_n = 0.$$

Partie 2 – Étude d'un endomorphisme

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$ et on considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_m[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X], \quad \varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'.$$

Q14. • Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. $\varphi(P)$ est clairement un polynôme et
 $\deg(P'') \leq \deg(P) - 2$ donc $\deg((X^2 - 1)P'') \leq \deg(P) \leq m,$
 $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$ donc $\deg(XP') \leq \deg(P) \leq m,$
donc $\deg(\varphi(P)) \leq m$ et $\varphi(P) \in \mathbb{R}_m[X].$

- Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_m[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R},$

$$\varphi(\lambda P + Q) = (X^2 - 1)(\lambda P + Q)'' + X(\lambda P + Q)' = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q) \text{ par linéarité de la dérivation.}$$

$$\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_m[X].$$

Q15. • $\varphi(1) = 0, \varphi(X) = X$

- $\forall k \in \llbracket 2; m \rrbracket, \quad \varphi(X^k) = (X^2 - 1)k(k-1)X^{k-2} + XkX^{k-1} = k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}$

$$\bullet \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & \ddots & & (0) & \vdots \\ \vdots & \ddots & 4 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & (0) & & \ddots & \ddots & \ddots & -m(m-1) \\ \vdots & & & & \ddots & (m-1)^2 & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & m^2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1; m+1 \rrbracket, \quad m_{i,j} = \begin{cases} (j-1)^2 & \text{si } j = i \\ -j(j+1) & \text{si } j = i+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q16. $\varphi(1) = 0$ et $1 \neq 0$ donc φ n'est pas injective, donc n'est pas un automorphisme.

Ou encore, vu sa matrice, $\text{rg}(\varphi) = m < \dim(\mathbb{R}_m[X])$, ou encore $\det(\varphi) = \det(M) = 0 \dots$

$$\varphi \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathbb{R}_m[X].$$

Q17. Comme M est triangulaire supérieure,

$$\text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(M) = \{k^2, k \in \llbracket 0; m \rrbracket\},$$

donc φ possède exactement $m + 1 = \dim \mathbb{R}_m[X]$ valeurs propres distinctes, donc

$$\varphi \text{ est diagonalisable, avec } \chi_\varphi = \prod_{k=0}^m (X - k^2) = X(X - 1)(X - 2^2) \dots (X - m^2).$$

Enfin, puisque φ est diagonalisable,

$$\forall k \in \llbracket 0; m \rrbracket, \quad \dim(E_{k^2}) = \omega(k^2) = 1.$$

Q18. D'après la dernière question de la partie précédente,

$$\forall k \in \llbracket 0; m \rrbracket, \quad \varphi(T_k) = k^2 T_k,$$

donc $T_k (\neq 0)$ est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre k^2 .

Comme la famille $(T_k)_{0 \leq k \leq m}$ est échelonnée en degré d'après la première partie, c'est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.

$\mathcal{T} = (T_0, T_1, \dots, T_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$ formée de vecteurs propres de φ échelonnée en degré.

Q19. D représente φ dans la base de vecteurs propres $\mathcal{T}$, donc

$$D = \text{diag}(0, 1, 2^2, \dots, m^2).$$

Q20. $N = \frac{1}{m^2}M$ et $\Delta = \frac{1}{m^2}D = \text{diag}\left(\frac{k^2}{m^2}, k \in \llbracket 0; m \rrbracket\right)$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta^n = \text{diag}\left(\left(\frac{k^2}{m^2}\right)^n, k \in \llbracket 0; m \rrbracket\right)$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta^n = \text{diag}(0, \dots, 0, 1).$$

Q21. Soit $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta^n = \text{diag}(0, \dots, 0, 1)$. $L = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n\right)$ et $L^2 = \text{diag}(0^2, \dots, 0^2, 1^2) = L$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n \text{ est un projecteur et } \text{rg}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n\right) = \text{rg}(L) = 1.$$

Partie 3 – Racines et extrema de T_n sur $[-1; 1]$

Q22. • Cherchons les racines de T_n dans $[-1; 1]$. Soit $x \in [-1; 1]$ et $\theta = \text{Arccos}(x) \in [0; \pi]$.

$$T_n(x) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

De plus : $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \in [0; \pi] \iff -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2}$, or $\theta \in [0; \pi]$, donc

$$T_n(x) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

$$T_n(x) = 0 \iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right).$$

La suite $\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ est strictement croissante à valeurs dans $[0; \pi]$ et la fonction $\cos$ est strictement

décroissante sur $[0; \pi]$ donc les n nombres $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ sont deux à deux distincts (suite strictement décroissante).

• Comme $\deg(T_n) = n$, T_n possède au plus n racines distinctes.

• Finalement, T_n a exactement n racines distinctes, toutes dans $[-1; 1]$ et est scindé à racines simples puisque $\deg(T_n) = n$

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left[X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \right]$$

Q23. $\forall x \in [-1; 1], T_n(x = \cos(n \text{Arccos}(x))) \in [-1; 1]$. De plus, $T_n(1) = 1$. Donc

$$\|T_n\|_\infty = 1.$$

Q24. Soit $x \in [-1; 1]$ et $\theta = \text{Arccos}(x) \in [0; \pi]$.

$$|T_n(x)| = 1 \iff \cos(n\theta) = \pm 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = k\pi \iff \exists k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \theta = \frac{k\pi}{n}$$

$$|T_n(x)| = 1 \iff \exists k \in \llbracket 0; n \rrbracket, x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Ces $n + 1$ nombres étant deux à deux distincts,

$$T_n \text{ possède exactement } n + 1 \text{ solutions.}$$

- Q25.** • Sur $] -1; 1[$, chaque fois que T_n vaut ± 1 , T_n atteint un extremum local puisque $\|T_n\|_\infty = 1$, donc T'_n s'annule. Donc les $n - 1$ nombres $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$ sont $n - 1$ racines distinctes de T'_n .
- Comme $\deg(T'_n) = \deg(T_n) - 1 = n - 1$, T_n n'a pas d'autre racine.

Les $n - 1$ racine de T'_n sont $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$.

- Q26.** On raisonne par récurrence sur k comme dans la première partie.

- $T_0(\text{ch}(\theta)) = 1 = \text{ch}(0.\theta)$ et $T_1(\text{ch}(\theta)) = \text{ch}(\theta) = \text{ch}(1.\theta)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie aux rangs n et $n + 1$.

$$\begin{aligned} \text{ch}((n+2)\theta) &= \text{ch}(n\theta)\text{ch}(2\theta) + \text{sh}(n\theta)\text{sh}(2\theta) \\ &= \text{ch}(n\theta)(2\text{ch}^2(\theta) - 1) + 2\text{sh}(n\theta)\text{sh}(\theta)\text{ch}(\theta) \\ &= 2\text{ch}(\theta)(\text{ch}(n\theta)\text{ch}(\theta) + \text{sh}(n\theta)\text{sh}(\theta)) - \text{ch}(n\theta) \\ &= 2\text{ch}(\theta)\text{ch}((n+1)\theta) - \text{ch}(n\theta) \\ &= 2\text{ch}(\theta)T_{n+1}(\text{ch}(\theta)) - T_n(\text{ch}(\theta)) \end{aligned}$$

- Par récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\text{ch}(\theta)) = \text{ch}(n\theta).$$

- Q27.** • $\text{ch} :]0; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[$ est une bijection car continue strictement croissante ($\text{ch}' = \text{sh} > 0$ sur $]0; +\infty[$ et $\text{ch}(]0; +\infty[) =]1; +\infty[$).

Soit $x > 1$. Il existe un (unique) $\theta \in]0; +\infty[$ tel que $x = \text{ch}(\theta)$. On a alors $T_n(x) = \text{ch}(n\theta) > 1$ car $n\theta > 0$. Ce qui prouve que : $\forall x > 1, |T_n(x)| > 1$.

- Par parité de T_n , $\forall x < 1, |T_n(x)| = |(-1)^n T_n(-x)| = |T_n(-x)| > 1$ car $-x > 1$.

$$\forall x \notin [-1; 1], \text{ alors } |T_n(x)| > 1.$$

Variante sans utiliser la question précédente -

- S'il existe $x > 1$ tel que $T_n(x) = 1$, comme $T_n(1) = 1$ et T_n est dérivable, l'application du théorème de Rolle montre qu'il existe $y \in]1; x[$ tel que $T'_n(y) = 0$. Ceci est impossible car toutes les racines de T'_n sont dans $[-1; 1]$. Donc

$$\forall x > 1, T_n(x) \neq 1.$$

- Supposons maintenant qu'il existe $x > 1$ tel que $T_n(x) < 1$. Comme $T_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{n-1}t^n \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à T_n continu sur $[x; +\infty[$ montre qu'il existe $y \in]x; +\infty[$ tel que $T_n(y) = 1$, ce qui est exclu par le point précédent. Donc

$$\forall x > 1, T_n(x) \geq 1.$$

- Donc finalement $\forall x > 1, T_n(x) > 1$.
- Et on conclut comme par la première méthode en invoquant la parité pour $x < -1$.

Partie 4 – Approximation uniforme de la fonction nulle

- Q28.** D'après l'exercice précédent, $\|T_n\|_\infty = 1$, donc par homogénéité $\|t_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$.

- Q29.** a) t_n et P sont unitaires de degré n donc $\deg(Q) = \deg(t_n - P) \leq n - 1$ (les monômes dominants se détruisent).

b) Pour tout $n \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $t_n(x_k) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x_k) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(k\pi) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$.

Pour k pair, $Q(x_k) = \frac{1}{2^{n-1}} - P(x_k)$ avec $|P(x_k)| \leq \|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$ donc $Q(x_k) > 0$.

Pour k impair, $Q(x_k) = \frac{-1}{2^{n-1}} - P(x_k)$ avec $|P(x_k)| \leq \|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$ donc $Q(x_k) < 0$.

Donc Q change de signe dans chacun des n intervalles $[x_k; x_{k+1}]$ (où $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$).

- c) Dans chaque $[x_k; x_{k+1}]$ (où $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$), Q qui est une fonction continue, change de signe donc s'annule. Comme Q ne s'annule pas aux extrémités de chacun de ces intervalles,

Q possède au moins n racines distinctes.

- d) Q est un polynôme de degré au plus $n - 1$ possédant au moins n racines distinctes donc Q est le polynôme nul. Donc $P = t_n$. Donc $\|P\|_\infty = \|t_n\|_\infty$, ce qui est contradictoire.

- e) On a démontré que tout polynôme P unitaire de degré n vérifie $\|P\|_\infty \geq \|t_n\|_\infty$. Autrement dit,

t_n est un polynôme réalisant le minimum de $\|\cdot\|_\infty$ parmi les polynômes unitaires de degré n .