

Exercice 1

Soit α un paramètre réel quelconque et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x(1 + n^\alpha e^{-nx}).$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de α la suite de fonctions (f_n) converge uniformément.
2. Justifier l'existence et déterminer la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx})dx.$$

3. Justifier l'existence et déterminer la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + n^2 e^{-nx})dx.$$

Solution (Ex.1 –)

1. $f_n \xrightarrow{\text{cvs}} f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x.$

Par étude de $f_n - f$, $\|f_n - f\|_\infty = (f_n - f)(1/n) = n^{\alpha-1}e^{-1}.$

Il y a donc convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1.$

2. $\alpha = 1/2$ donc il y a convergence uniforme sur le segment $[0; 1]$ et le théorème de permutation s'applique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx})dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

3. $\alpha = 2$ et il n'y a pas convergence uniforme.

Un calcul explicite par intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(1 + n^2 e^{-nx})dx &= \int_0^1 xdx + [-xne^{-nx}]_0^1 + \int_0^1 ne^{-nx}dx \\ &= \frac{1}{2} - ne^{-n} - e^{-n} + e^0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$, ce qui prouve au passage qu'on n'a aucune chance de pouvoir utiliser le théorème de convergence dominée...