

ELECTROSTATIQUE / CONDUCTEURS

Exercice 1 Étude de capteurs capacitifs

Ce problème se concentre sur l'étude de 2 capteurs capacitifs utilisés en téléphonie portable. L'un sert à mesurer des champs électriques (partie E), l'autre est à la base de nombreux écrans tactiles (partie F)

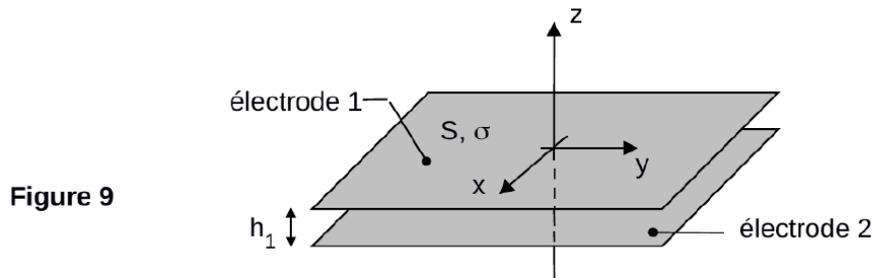
E/ Capteur de champ électrique

Pour vérifier que le champ électrique rayonné par des antennes relais n'est pas supérieur aux normes de sécurité, il faut disposer de capteurs de champ électrique. Dans cette partie, nous étudions un tel capteur, basé sur un effet capacitif.

Vu la fréquence des champs électriques à mesurer, la petite taille du capteur permet de traiter le problème dans le cadre de l'électrostatique.

E1. Quelle propriété doivent vérifier les dimensions du capteur pour que cette approximation de régime quasi-stationnaire soit valable ?

Considérons pour commencer le condensateur plan d'axe z de la figure 9. L'aire des électrodes est notée S . L'électrode 1 porte une charge par unité de surface σ ($\sigma > 0$) . L'électrode 2 porte une charge par unité de surface $-\sigma$. Elles sont séparées par une distance h_1 . Pour ce qui est de l'étude des symétries et des invariances, le condensateur peut être considéré comme infini dans les directions x et y (les effets de bord sont négligés).



E2. Justifier que le champ électrique \vec{E} est de la forme $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$.

E3. On rappelle que $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. En déduire que le champ $E(z)$ entre les électrodes du condensateur est constant. Sa composante selon \vec{u}_z sera notée E_{int} .

E4. Considérons tout d'abord que le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur. En utilisant une surface de Gauss bien choisie, établir la relation $E_{\text{int}} = \frac{-\sigma}{\epsilon_0}$

E5. Montrer que la différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ aux bornes du condensateur s'écrit $U = \frac{Q}{C_0}$, où Q est la charge totale portée par l'électrode 1.

Donner l'expression de C_0 en fonction de S , h_1 et ϵ_0 .

Ce dispositif est maintenant plongé dans un champ extérieur uniforme $\vec{E}_{\text{ext}} = E_{\text{ext}} \vec{u}_z$, dont la mesure est envisagée.

E6. Montrer que $U = \frac{Q}{C_0} - E_{\text{ext}} h_1$.

Le dispositif peut alors être représenté par le schéma électrique de la figure 10.

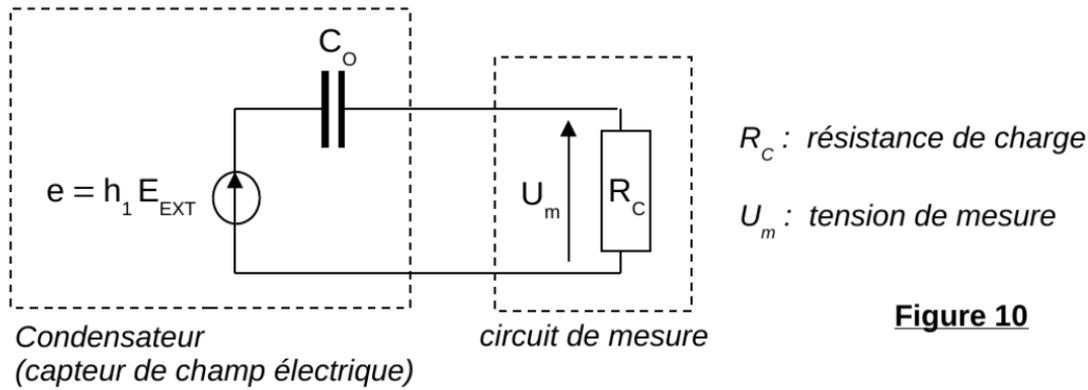


Figure 10

Le champ électrique E_{ext} varie sinusoidalement à la pulsation $\omega = 2\pi f$.

E7. Montrer que, si R_C est grande par rapport à une valeur limite R_{LIM} , il est alors possible d'écrire : $U_m = K_0 E_{ext}$. Exprimer R_{LIM} en fonction de C_0 et ω . En déduire l'expression de la constante K_0 en fonction des données.

En réalité, les électrodes ont la forme de demi-sphères de rayons r_1 et $r_2 \approx r_1$ (voir photographie, figure 11). Comme elles sont espacées d'une distance $h_1 \ll r_1$ et r_2 , les résultats précédents restent valables, à condition de prendre pour S la surface d'une demi-sphère.



Figure 11 : exemple de capteur (doc. ETCA)

Données : $f = 2,0 \text{ GHz}$, $r_1 = 2,0 \text{ cm}$, $h_1 = 2,0 \text{ mm}$
 $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

E8. Calculer numériquement C_0 et R_{LIM} . Que penser par ailleurs de l'approximation quasi-stationnaire ?

F/ Ecran tactile

Des écrans tactiles équipent la quasi-totalité des téléphones portables produits actuellement. Pour les modèles les plus performants, la présence d'un doigt sur l'écran est détectée grâce à un capteur à effet capacitif qui est étudié de manière très simplifiée dans cette partie. Il s'agit d'un phénomène électrostatique.

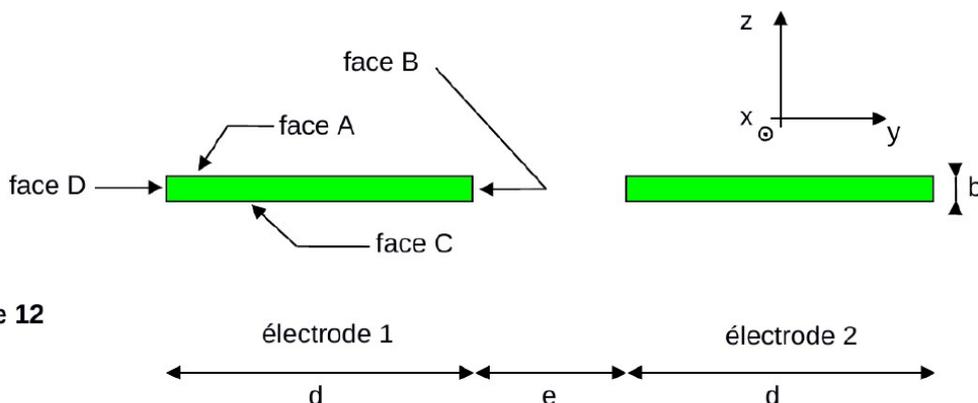


Figure 12

Ce capteur est constitué de deux électrodes métalliques (Figure 12) réalisant un condensateur de capacité C . Lorsque l'utilisateur pose son doigt sur le capteur, les lignes de champ électrique sont déformées, et la capacité du dispositif s'en trouve modifiée.

La capacité du capteur sera calculée tout d'abord en l'absence du doigt (questions F1 à F5), puis en présence de celui-ci (questions F6 à F9).

Description du capteur :

- Les deux électrodes du capteur sont représentées sur la figure 12, en coupe dans le plan (y,z) . Leurs caractéristiques géométriques sont les suivantes : longueur $\ell = 10 \text{ mm}$ (selon Ox), largeur $d = 1,0 \text{ mm}$, épaisseur $b = 40 \text{ nm}$, distance entre les électrodes $e = 0,50 \text{ mm}$.
- L'électrode 1 est portée au potentiel $V_1 = 5,0 \text{ V}$ et l'électrode 2 au potentiel $V_2 = -5,0 \text{ V}$.
- En ce qui concerne les symétries et invariances, les électrodes sont supposées infiniment longues dans la direction x . Le potentiel V est donc indépendant de x .
- Les surfaces équipotentielles sont représentées sur les figures A2 et A3 de l'annexe A, à rendre avec la copie, en coupe dans le plan (y,z) . La figure A2 est une vue d'ensemble. La figure A3, plus détaillée et agrandie 66 fois, sera seule utilisée pour les calculs numériques. Sur la figure A3, les équipotentielles sont séparées de $0,30 \text{ V}$.

F1. Tracer l'allure des lignes de champ électrique sur la figure A3.

F2. Déduire de la figure A3 la valeur numérique du champ électrique au point P.

Le champ électrique \vec{E} au voisinage d'un conducteur (parfait) s'écrit $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$, où σ est la charge surfacique portée par cette surface ; cette relation, appelée aussi théorème de Coulomb, fait intervenir le vecteur unitaire \vec{n} , perpendiculaire à la surface et sortant du conducteur.

Les champs électriques moyens au niveau des faces A, B, C et D de l'électrode 1 sont notés respectivement E_A , E_B , E_C et E_D .

F3. Justifier que la capacité C du capteur a pour expression approchée :

$$C = \ell \epsilon_0 \frac{E_A d + E_B b + E_C d + E_D b}{V_1 - V_2}$$

F4. Calculer numériquement la capacité C , sachant que $E_A = E_C = 9,0 \text{ kV/m}$, $E_B = 30 \text{ kV/m}$, $E_D = 25 \text{ kV/m}$ et $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$. Proposer une méthode simple de mesure de C .

L'utilisateur place désormais son doigt sur l'écran. La conductivité de l'intérieur du corps humain est assez élevée pour que celui-ci soit assimilé à un conducteur. Pour simplifier, ce conducteur sera supposé plan et situé à une hauteur $h = 0,20 \text{ mm}$ au-dessus du capteur (voir figure 13).

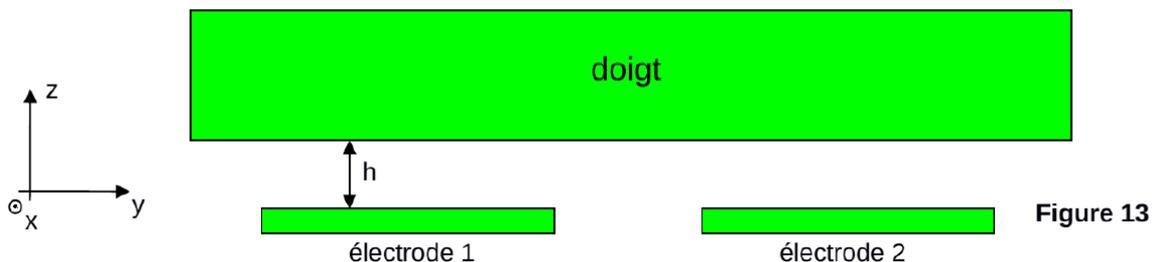
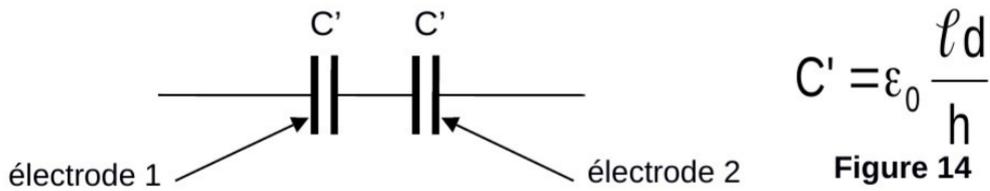


Figure 13

- F5.** Préciser, en la justifiant succinctement, la valeur du potentiel V_d du doigt. Reproduire sommairement la figure 13 sur votre copie, en y ajoutant l'allure des équipotentielles pour cette situation. Justifier le champ électrique au voisinage d'une des faces de l'électrode 1 augmente, par rapport à la situation sans le doigt.
- F6.** Estimer numériquement la valeur C_d de la capacité du capteur en présence du doigt. Conclure sur le fonctionnement du capteur.

Pour vérifier l'estimation précédente de C_d , proposons le schéma électrique simplifié de la figure 14.



- F7.** Quelle zone de ce circuit équivalent représente le doigt de l'utilisateur ? Expliquer très succinctement l'expression donnée à C' . Justifier que ce circuit équivaut finalement à un seul condensateur de capacité C_{eq} . Exprimer C_{eq} en fonction de d , ℓ , h et ϵ_0 . Calculer numériquement C_{eq} . Conclure.
- F8.** Quelle doit être la propriété particulière de ces électrodes pour qu'elles puissent être utilisées dans un écran tactile ?

ANNEXE 1

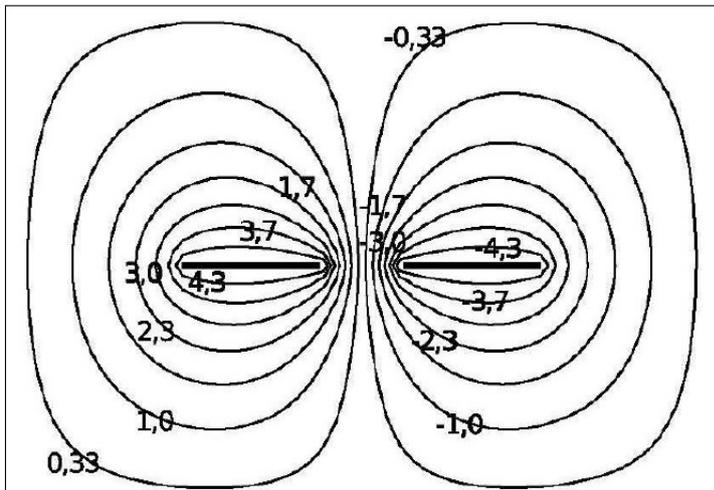
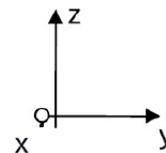


Figure A2

Forme des équipotentielles correspondant au capteur capacitif étudié dans les questions F1 à F5. Les valeurs indiquées correspondent au potentiel électrique (en Volt) le long d'une équipotentielle.



Exercice 2 Étude d'un conducteur

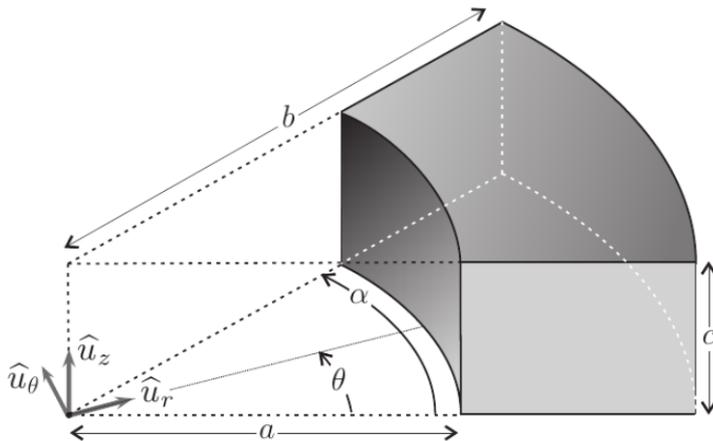


FIGURE 3 – Portion d'un conducteur torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique γ de l'ordre de $10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Il forme un tore tronqué de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c .

On cherche à déterminer la résistance orthoradiale R d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles $\theta = 0$ où on applique un potentiel uniforme $V = U$ et $\theta = \alpha$ où on applique un potentiel $V = 0$.

❑ 6 — On rappelle la valeur numérique de la constante $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ dans les unités du système international. Rappeler le nom et l'unité pratique de cette constante.

❑ 7 — Établir, dans un conducteur ohmique, l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge ρ . En déduire que $\rho \simeq 0$ tant que la durée T caractéristique de variation des grandeurs électromagnétiques est très supérieure à une durée τ dont on donnera l'expression en fonction de γ et ε_0 ainsi que la valeur numérique.

❑ 8 — Montrer qu'un terme peut être négligé dans l'équation de Maxwell-Ampère si $T \gg \tau$.

❑ 9 — Établir l'équation vérifiée en régime permanent et dans le conducteur ohmique par le potentiel électrique V .

❑ 10 — On suppose que V ne dépend que de l'angle θ en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel $\vec{\text{grad}}V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta$ et de son laplacien $\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$. Déterminer les expressions de $V(\theta)$, du champ \vec{E} et de la densité de courant \vec{j} .

❑ 11 — Déterminer l'expression de l'intensité totale I traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore. En déduire sa résistance orthoradiale R en fonction de a , b , c , γ et α .

❑ 12 — Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section S et de longueur L . Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression du conducteur torique quand b est très proche de a .

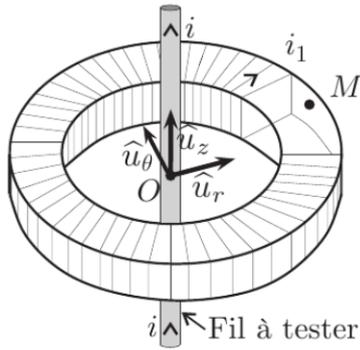


FIGURE 4 – Partie active de la pince

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité.

Son principal intérêt est l'absence de contact physique avec le conducteur et le fait qu'il ne soit pas nécessaire d'ouvrir le circuit pour mesurer le courant qui le traverse contrairement à l'implantation d'un ampèremètre classique.

Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage torique comportant N spires enroulées sur un tore de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c , d'axe (O, z) . Le fil conducteur utilisé pour le bobinage possède une résistance linéique λ .

Un point M intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques : $\vec{OM} = r\hat{u}_r + z\hat{u}_z$ avec $r \in [a, b]$ et $z \in [0, c]$.

Un fil rectiligne infini de même axe (O, z) est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. On note $i_1(t)$ l'intensité du courant circulant dans la bobine torique. On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires.

□ **13** — Rappeler ce qu'on appelle approximation des états quasi-stationnaires. Montrer que cette approximation permet de simplifier l'équation de Maxwell-Ampère. Énoncer dans ce cas le théorème d'Ampère.

□ **14** — Montrer qu'au point M intérieur au tore, le champ magnétique peut se mettre sous la forme $\vec{B} = B(r)\hat{u}_\theta$ où l'on précisera l'expression de $B(r)$ en fonction de μ_0 , $i(t)$, $i_1(t)$, N et r .

□ **15** — Calculer le flux Φ de \vec{B} à travers le bobinage et en déduire les expressions des coefficients d'autoinductance L du bobinage et de mutuelle inductance M entre le fil et le bobinage.

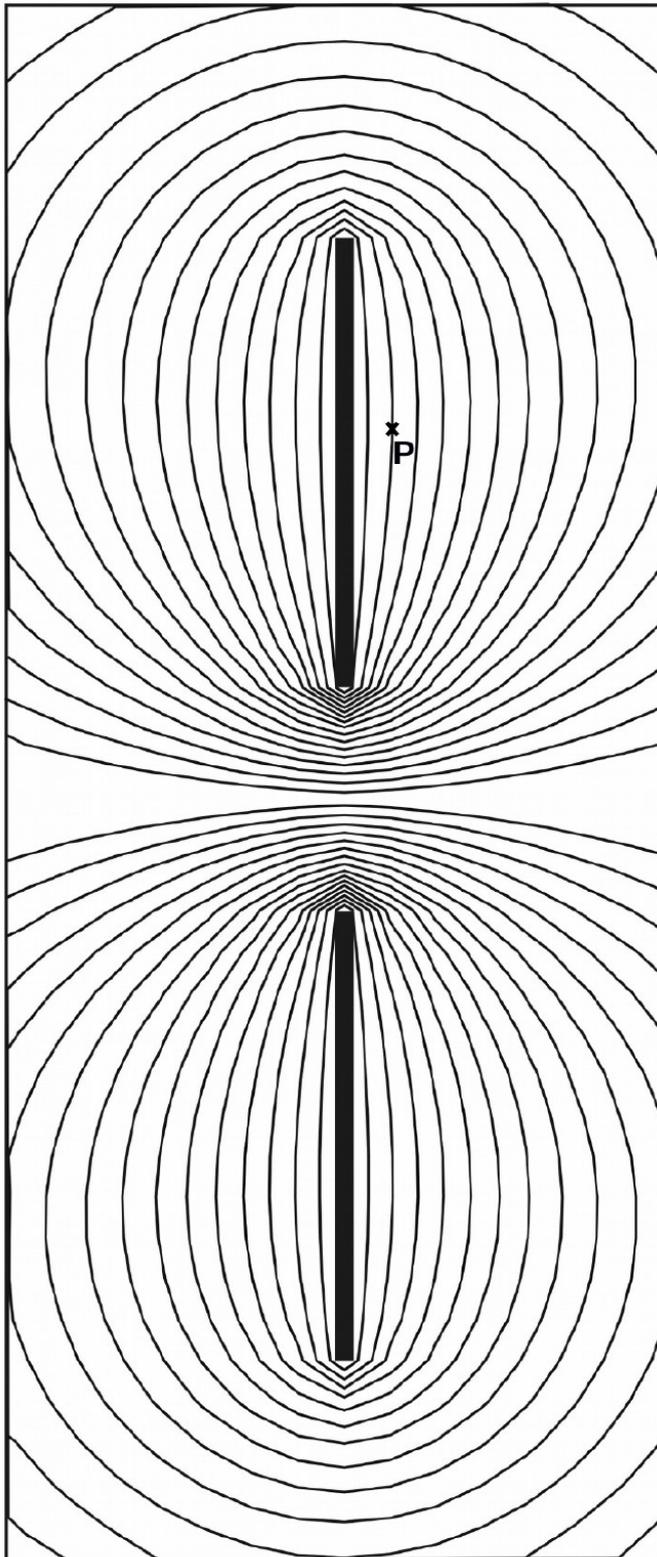
□ **16** — Déterminer l'expression de la résistance totale R_p du bobinage en fonction de a , b , c , N et λ .

On se place en régime sinusoïdal forcé avec $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i} = I_0\sqrt{2}e^{j\omega t}$ et $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i}_1 = I_1\sqrt{2}e^{j\omega t}e^{j\varphi_1}$.

□ **17** — Le bobinage formant un circuit fermé, déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}}$ en fonction de M , ω , R_p et L .

□ **18** — Dans quel régime de pulsation ce dispositif peut-il former une pince ampèremétrique ?

ANNEXE 2 A RENDRE AVEC LA COPIE



La figure a été agrandie 66 fois

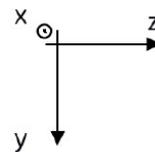


Figure A3

Forme des équipotentielle
correspondant au capteur
capacitif étudié dans les
questions F1 à F5.

Les équipotentielles sont
tracées tous les 0,30 V.