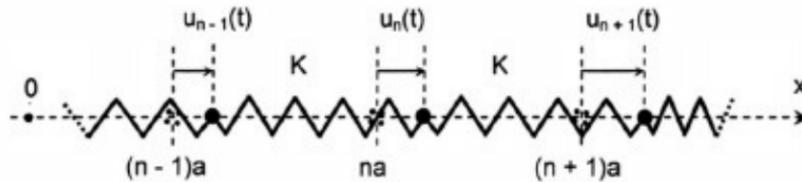


**Exercice 1** Etude d'un barreau métallique

**A – Modèle microscopique et approximation des milieux continus**

À l'échelle microscopique, un matériau solide homogène peut être modélisé par une chaîne infinie d'atomes assimilés à des points matériels de même masse  $m$  et reliés entre eux par des ressorts identiques, de longueur à vide  $a$  et de raideur  $K$ . Ces ressorts modélisent, dans l'approximation linéaire, les interactions électromagnétiques entre les atomes lorsqu'ils se déplacent au voisinage de leur position d'équilibre.

Considérons un modèle unidimensionnel dans lequel tous les atomes se déplacent sans frottement sur un axe  $Ox$ . La **figure 1** représente cette disposition où chaque atome est numéroté par un entier  $n$ . Lorsqu'il est en équilibre mécanique, l'atome référencé ( $n$ ) est situé à l'abscisse  $x_n(\text{éq}) = n a$  ; en dehors de l'équilibre, sa position devient  $x_n(t) = x_n(\text{éq}) + u_n(t)$ .



**Figure 1 : Chaîne infinie d'atomes**

**A1\*a.** Établir l'expression de la résultante des forces exercées par les atomes ( $n - 1$ ) et ( $n + 1$ ) sur l'atome ( $n$ ).

**A1\*b.** En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'atome ( $n$ ) et montrer qu'elle peut s'écrire :  $\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \omega_0^2 (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$ , en explicitant  $\omega_0$  en fonction de  $K$  et  $m$ .

L'équation précédente admet des solutions sinusoïdales de pulsation  $\omega$ . Afin de les étudier, introduisons la représentation complexe  $\underline{u}_n(t)$  et cherchons ces solutions sous la forme  $\underline{u}_n(t) = \underline{U}_n \exp(j\omega t)$  où  $\underline{U}_n$  désigne l'amplitude complexe du déplacement de l'atome ( $n$ ).

**A2\*a.** Établir la relation entre  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\underline{U}_{n-1}$ ,  $\underline{U}_n$  et  $\underline{U}_{n+1}$ .

**A2\*b.** Quelle est la valeur particulière de  $\omega$  associée à une solution telle que  $\underline{U}_{n-1} = \underline{U}_n$  pour toute valeur de  $n$  ? Quelle interprétation physique peut-on en donner ?

**A2\*c.** Déterminer de même la pulsation correspondant à  $\underline{U}_n = -\underline{U}_{n-1}$  pour toute valeur de  $n$ .

Dans toute la suite de cette partie, nous étudierons une solution particulière de la forme  $\underline{u}_n(t) = \underline{A} \exp[j(\omega t - k na)]$  où  $\underline{A}$  est un nombre complexe indépendant de  $n$  et  $k$  un nombre réel.

**A3\*a.** Quelle signification physique peut-on attacher à ce type de déplacement ? Quelle hypothèse fait-on en supposant que  $\underline{A}$  est indépendant de  $n$  ?

**A3\*b.** Vérifier que l'expression proposée est bien solution de l'équation établie en **A1\*b**, à condition que  $k$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $a$  soient reliés par une équation à expliciter. Réaliser un schéma représentant l'évolution de  $\omega$  en fonction de  $k$ . Quel est le domaine de pulsations admissibles ?

**A3\*c.** Pourquoi est-il possible de restreindre les valeurs de  $k$  à l'intervalle  $[-\pi/a, \pi/a]$  ?

**A3\*d.** Montrer que le déplacement  $\underline{u}_n(t)$  reproduit exactement le déplacement  $\underline{u}_{n-1}(t)$ , mais avec un retard temporel  $\tau$  dont on donnera l'expression en fonction de  $\omega_0$ ,  $k$  et  $a$ .

Considérons désormais le cas particulier où  $k$  est positif.

**A4\*a.** Déterminer la vitesse de phase  $V_\phi$  en fonction de  $\omega_0, k$  et  $a$ . La propagation est-elle dispersive ?

**A4\*b.** Quelle est la valeur limite de cette vitesse quand  $k \rightarrow 0$  ? Commenter.

**A4\*c.** On définit une autre vitesse, appelée vitesse de groupe  $V_g = \frac{d\omega}{dk}$ . Exprimer la vitesse de groupe en fonction de  $\omega_0, k$  et  $a$ .

**A4\*d.** Etudier les limites de  $V_\phi$  et  $V_g$  quand  $k \rightarrow \frac{\pi}{a}$ . Quelle signification physique peut-on attribuer à ces résultats ?

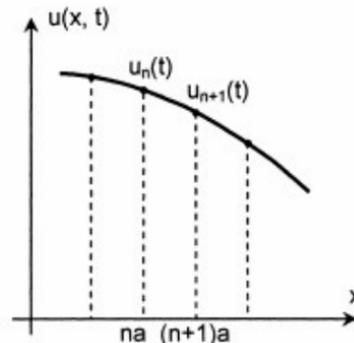
L'approximation des milieux continus permet de faire passer une fonction  $u(x,t)$  par tous les points représentatifs des atomes de la chaîne à chaque instant (figure 2). Cela est possible lorsque  $u_n$  est peu différent de  $u_{n+1}$ .

Définissons la fonction continue et dérivable  $u(x,t)$  des variables d'espace  $x$  et de temps  $t$  telle que  $u(x,t) = u_n(t)$  lorsque  $x = na$ . Supposons que  $u(x,t)$  varie peu dans l'espace, à l'échelle de  $a$ . En considérant que l'atome ( $n$ ) occupe l'abscisse  $x$ , remarquons que :

et

$$u(x + a, t) = u(na + a, t) = u_{n+1}(t)$$

$$u(x - a, t) = u(na - a, t) = u_{n-1}(t).$$



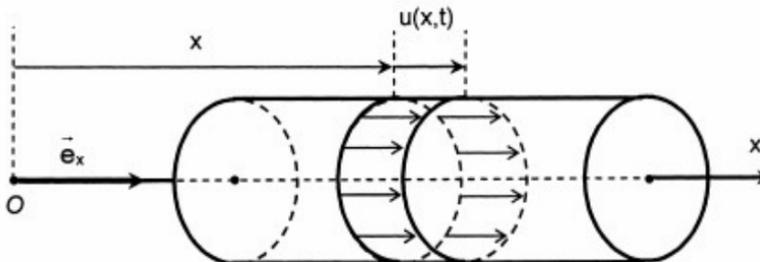
**Figure 2 :** Représentation de  $u(x, t)$  à  $t$  fixé

**A5.** En utilisant un développement limité à l'ordre 2, montrer que la fonction  $u(x,t)$  vérifie une équation de d'Alembert de la forme  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$  et exprimer la célérité  $C$  en fonction de  $K, m$  et  $a$ . Comparer  $C$  à une expression obtenue en A4. et interpréter ce résultat.

### B – Modèle macroscopique et module d'Young

Un barreau solide est initialement immobile dans un référentiel galiléen d'axe  $Ox$ . Lorsqu'il est au repos, ce barreau est un cylindre homogène d'axe  $Ox$ , taillé dans un matériau de masse volumique  $\rho$ , dont l'aire de chaque section sera notée  $S$ .

Une onde de déformation élastique longitudinale (onde de compression-dilatation) se propage à l'intérieur du barreau dans la direction de  $Ox$  ; cette onde est caractérisée par le champ scalaire des déplacements  $u(x,t)$  tel qu'une section située à l'abscisse  $x$  en l'absence d'onde se déplace à l'abscisse  $x + u(x,t)$  lors du passage de celle-ci (figure 3).



**Figure 3 :** Onde élastique longitudinale dans un barreau

Dans la limite des petites déformations, la matière située à gauche de la section déplacée en  $x + u(x,t)$  exerce sur celle-ci une force de rappel  $\vec{F}_g$  dont l'expression générale est :  $\vec{F}_g = -E \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) S \vec{e}_x$ , où  $E$  désigne le module d'élasticité d'Young. De même, la matière située à droite de la section exerce sur celle-ci une force  $\vec{F}_d$ .

**B1.** Etablir la dimension de  $E$  et justifier que  $\vec{F}_d = -\vec{F}_g$ .

En l'absence d'onde, une tranche élémentaire de barreau située entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  possède un volume  $dV = S dx$ . Lors du passage de l'onde, son volume devient  $dV'$ . La dilatation volumique  $\delta$  de cette tranche est définie comme le quotient  $\delta = \frac{dV' - dV}{dV}$ .

**B2.** Expliciter la relation entre  $\delta$  et  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ .

**B3.** En appliquant le principe fondamental de la dynamique à cette tranche, montrer que dans la limite des petits déplacements  $u(x,t)$  satisfait à une équation de d'Alembert de la forme :  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ .  
Exprimer la célérité  $C$  en fonction de  $E$  et  $\rho$ .

### C – Liaison interatomique et module d'Young

Au sein d'un réseau cristallin métallique, l'énergie potentielle d'interaction de deux atomes  $A$  et  $B$  distants de  $r$  peut s'écrire :  $E_p(r) = -\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\mu}{r^{10}}$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux constantes positives. La force exercée par  $A$  sur  $B$  est de la forme  $\vec{F}_{AB} = F(r) \vec{u}$ , où  $\vec{u}$  désigne le vecteur unitaire directeur de la droite  $(AB)$ , dirigé de  $A$  vers  $B$ .

**C1\*a.** Déterminer l'expression de  $F(r)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $r$ . La distance d'équilibre entre deux atomes étant  $r_0$ , en déduire une relation entre  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $r_0$ .

**C1\*b.** Calculer les valeurs numériques de  $\mu$  (exprimé en  $\text{eV} \cdot \text{nm}^{10}$ ) et de  $E_p(r_0)$  (exprimé en  $\text{eV}$ ) dans le cas précis du tungstène, métal pour lequel  $r_0 = 0,274 \text{ nm}$ ,  $\lambda = 0,37 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2$ . (rappelons qu'un électron-volt est égal à  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ )  
Quel sens concret peut on donner à  $E_p(r_0)$  ?

**C1\*c.** Tracer l'allure de la courbe  $E_p(r)$  en indiquant ses points remarquables. Dans quels domaines de  $r$  la force entre les deux atomes est elle attractive ou répulsive?

**C2.** En effectuant un développement limité de  $F(r)$ , montrer que pour de petits déplacements autour de la position d'équilibre  $r_0$ , la force d'interaction  $F(r)$  est équivalente à celle d'un ressort dont on explicitera la raideur  $K$  en fonction de  $\lambda$  et  $r_0$ .  
Calculer  $K$  (exprimé en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ) pour le tungstène.

## Exercice 2 Étude des ondes stationnaires le long d'une corde tendue

Une fine corde métallique homogène, quasi-inextensible et sans raideur, de masse linéique  $\mu$ , est soumise à une tension d'équilibre  $T$ . Ses déformations dans le plan  $(x, y)$  sont décrites par une fonction de hauteur  $y = h(x, t)$ . Dans tout le problème, les déformations de la corde par rapport à l'axe horizontal sont supposées suffisamment faibles pour que :

- l'angle  $\alpha(x, t)$  que fait la courbe  $h$  avec l'horizontale soit un infiniment petit d'ordre 1, tout comme la dérivée  $\partial h / \partial x$ .
- les déplacements d'un point matériel lié à la corde n'aient qu'une composante verticale, les déplacements horizontaux étant négligeables.

Les extrémités de la corde sont dénommées A et B, d'abscisse respective  $x_A$  et  $x_B$ . Le milieu de la corde est noté C, d'abscisse  $x_C$  (Figure II.1). Tout au long du problème, on négligera les effets de pesanteur devant les forces de tension de la corde.

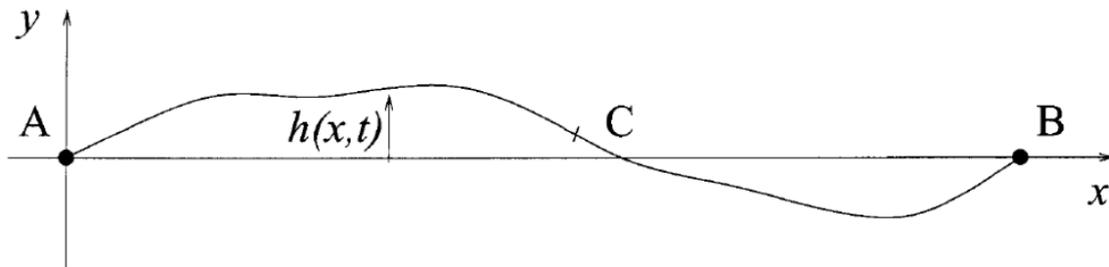


Figure II.1

### - II.1.1

Soit un point O d'abscisse  $x_O$  situé dans l'intervalle  $[AB]$  ( $x_A < x_O < x_B$ ). La partie de la corde située à droite du point O ( $x > x_O$ ) exerce à chaque instant sur la partie de la corde située à sa gauche une certaine force  $\vec{F}(x_O, t)$ .

Comment s'exprime, en fonction de  $T$  et d'une dérivée de  $h(x, t)$ , la composante verticale (suivant  $y$ ) de cette force  $\vec{F}$  ?

### - II.1.2

Etablir, dans le cadre des hypothèses énoncées ci-dessus, l'équation de d'Alembert vérifiée par  $h(x, t)$ . Exprimer la célérité  $c$  associée en fonction des paramètres  $\mu$  et  $T$ .

### - II.1.3

Peut-on observer des discontinuités spatiales de la dérivée  $\partial h / \partial x$  en des points autres que A et B ? Justifier votre réponse.

### - II.1.4

La corde est fixée en ses deux extrémités A et B à une hauteur nulle, soit  $h(x_A, t) = 0$  et  $h(x_B, t) = 0$ . La longueur de la corde entre ces deux points est  $2L$ , et l'on choisit l'origine du

repère de façon à avoir  $x_A = 0$  et  $x_B = 2L$ .

On recherche les ondes stationnaires de vibration de la corde sous la forme :

$$h(x, t) = Z \sin(kx + \phi) \cos(\omega t)$$

où  $Z$  est une amplitude arbitraire.

Donner, en la démontrant, la relation existant entre  $\omega$ ,  $k$  et  $c$ .

- **II.1.5**

Les valeurs admissibles de  $k$  (norme du vecteur d'onde) forment une suite de valeurs discrètes  $k_n$ , où  $n = 1, 2, 3 \dots$  est entier positif.

Donner l'expression des  $k_n$  admissibles, des pulsations propres  $\omega_n$  et des fréquences  $f_n$  associées.

Comment choisir la phase  $\phi$  ?

- **II.1.6**

Tracer soigneusement l'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental  $k_1$ , telle qu'on pourrait l'observer à l'aide, par exemple, d'une caméra rapide ou d'une lampe stroboscopique.

Tracer de la même façon l'allure des déformations associées à la première, deuxième et troisième harmonique (respectivement  $k_2, k_3, k_4$ ).

Compter et faire figurer sur votre schéma, à chaque fois, le nombre de "noeuds" et de "ventres" associés à ces modes de vibration.

- **II.1.7**

On peut montrer que l'énergie mécanique **par unité de longueur**  $e(x, t)$  associée à l'onde est égale à :

$$e(x, t) = \frac{\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Calculer la valeur moyenne temporelle  $\langle e \rangle$  en un point quelconque  $x$  de la corde, pour le mode de vibration fondamental.

- **II.1.8**

En déduire l'énergie totale associée à la vibration du mode fondamental. On exprimera le résultat en fonction de la tension  $T$  de la corde, de sa demi-longueur  $L$  et de l'amplitude  $Z$  des vibrations.

*Application numérique* : Que vaut l'amplitude  $Z$  des vibrations lorsque l'énergie totale du mode est égale à 0,1 J, avec  $L = 1$  m,  $T = 100$  N ?